物理学基礎 II

講義 12 の板書ノート

磁場とローレンツ力とアンペールの法則

谷村 省吾

3次元ベクトル $\mathbf{d} = d_x \mathbf{e}_x + d_y \mathbf{e}_y + d_z \mathbf{e}_z$

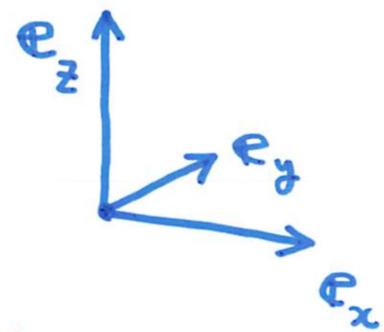
$$= (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)\begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix} \overset{\text{略して}}{=} \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix}$$

$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$: 単位ベクトル, 基底

$\mathbf{e}_x$: 東向き

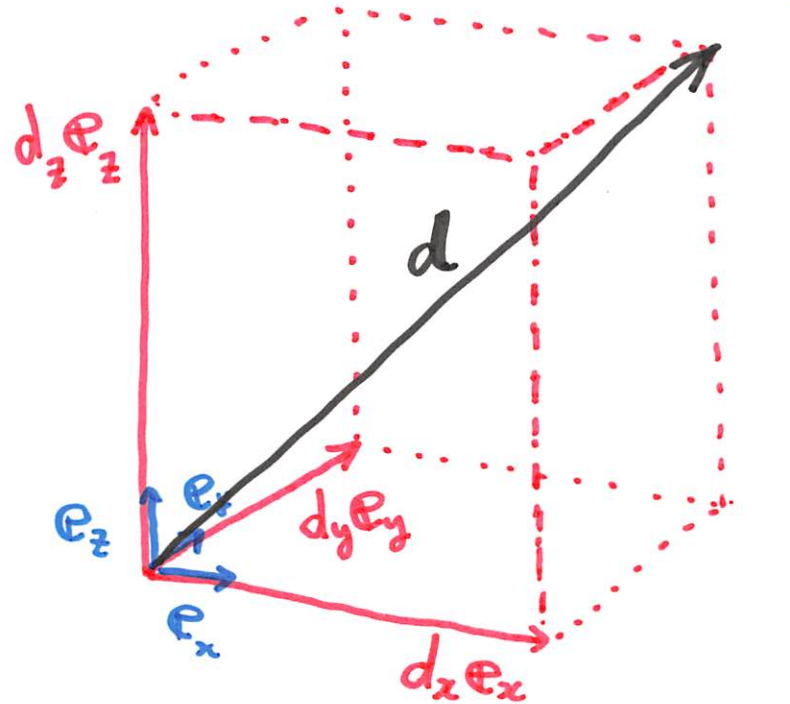
$\mathbf{e}_y$: 北向き

$\mathbf{e}_z$: 上向き



変位ベクトル

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11\mathrm{m} \\ 12\mathrm{m} \\ 13\mathrm{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1100\mathrm{cm} \\ 1200\mathrm{cm} \\ 1300\mathrm{cm} \end{pmatrix}$$



2つのベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の内積 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ はスカラー

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} := (a_x, a_y, a_z)\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

1つのベクトル $\mathbf{a}$ のノルム $\|\mathbf{a}\|$ もスカラー

$$\|\mathbf{a}\| := \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}$$

ノルムの2乗の方が数学的には扱いやすい：

$$\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}^2 = (a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2$$

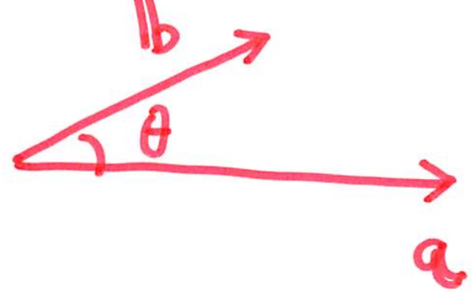
$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角 θ のコサインを次の式で定める：

$$\cos\theta := \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|}$$

ただし

$$\mathbf{a} \neq \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$$

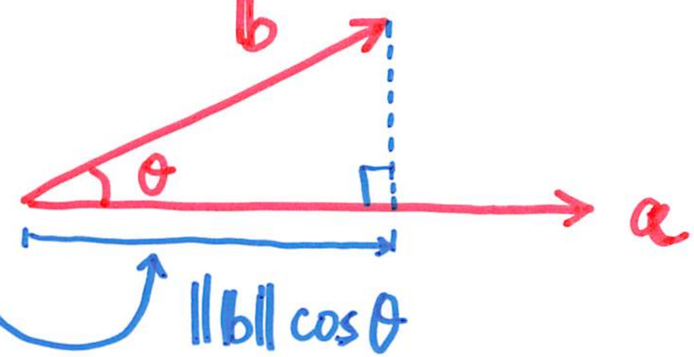
とする.



内積の幾何学的意味

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\ \underbrace{\|\mathbf{b}\|\cos\theta}_{}$$

ベクトル a に沿う b の影の長さ



a と b が直交していると、$\cos\theta = \cos 90^\circ = 0$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$$

影の長さ = 0

a と b がなす角が直角よりも大きいと、

$$-1 \leqq \cos\theta < 0$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} < 0$$

a に対して落とした b の影が a とは逆方向になる.

内積 a·b は、「a と b が同じ向きかげん」を表している.

2つのベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{b}$ の 外積 $\mathbb{a}\times\mathbb{b}$ は ベクトル

$$\mathbb{a}\times\mathbb{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

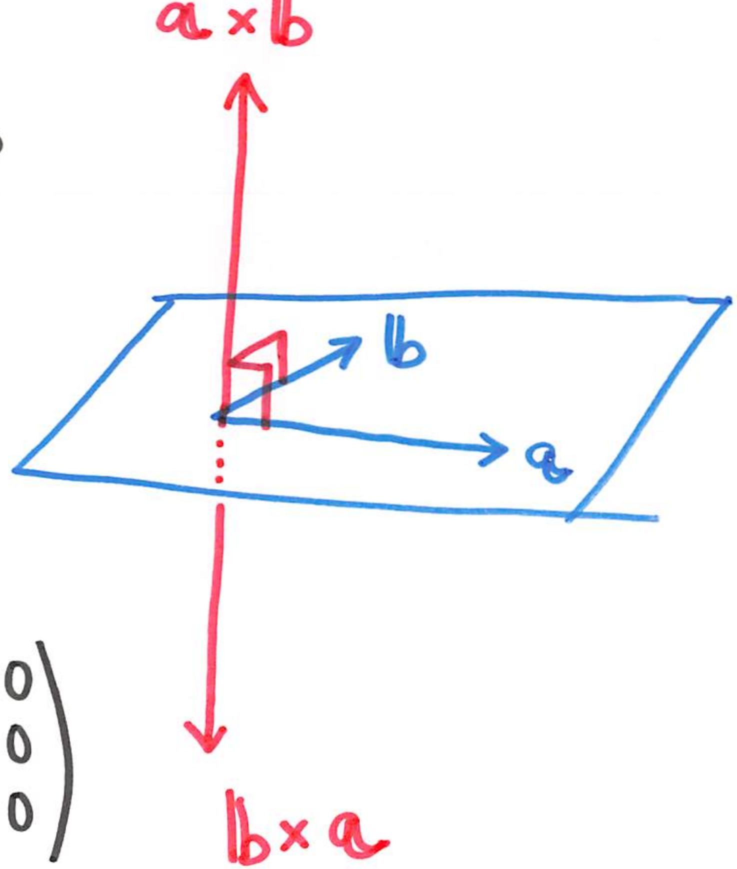
外積の性質

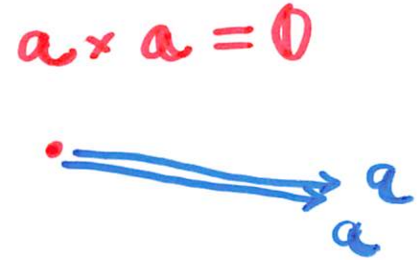
1) $\mathbb{b}\times\mathbb{a} = -\mathbb{a}\times\mathbb{b}$

2) $\mathbb{a}\cdot(\mathbb{a}\times\mathbb{b}) = 0$

3) $\mathbb{b}\cdot(\mathbb{a}\times\mathbb{b}) = 0$

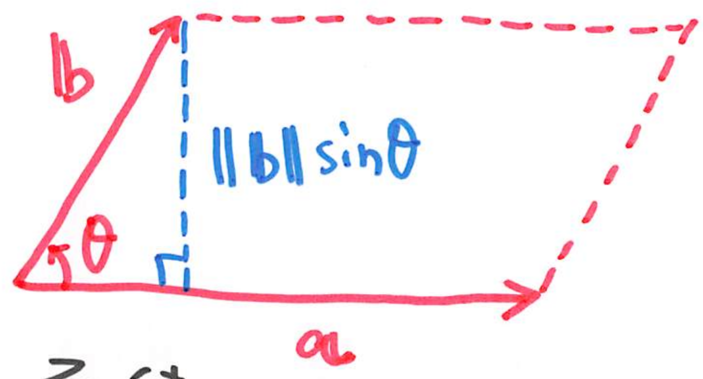
4) $\mathbb{a}\times\mathbb{a} = \mathbb{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$





外積の幾何学的意味

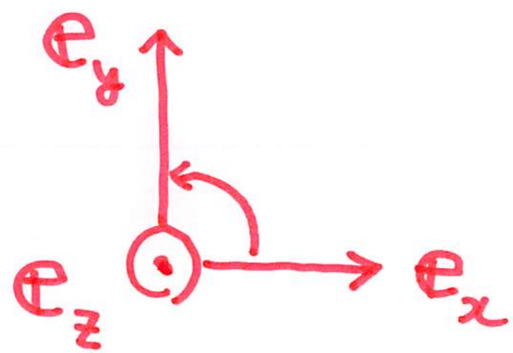
$$\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\sin\theta$$



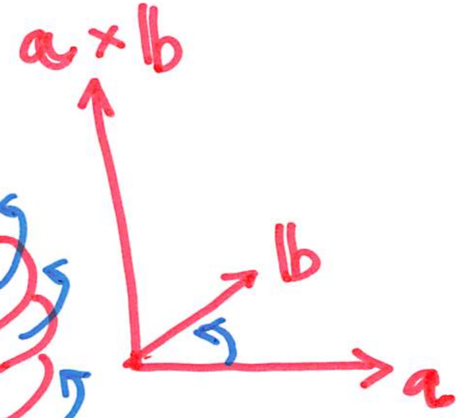
= ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ が張る平行四辺形の面積.

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0,\quad \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0$$

なので、$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ は $\mathbf{a}$ にも $\mathbf{b}$ にも直交.



$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \mathbf{e}_z$$



一般には、

$\mathbf{a}$ から $\mathbf{b}$ に向かって右ねじを回したとき、

右ねじが進む方向が $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ の向き.

右手の4本指を $\mathbf{a}$ から $\mathbf{b}$ に向かって曲げたとき、

親指の立つ向きが $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ の向き.

電場と磁場の定義.

電荷 q を持つ点電荷が、時刻 t に 位置 $\mathbf{r}$ を速度 $\mathbf{v}$ で通過するとき、

$$\text{力}\ \mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$$

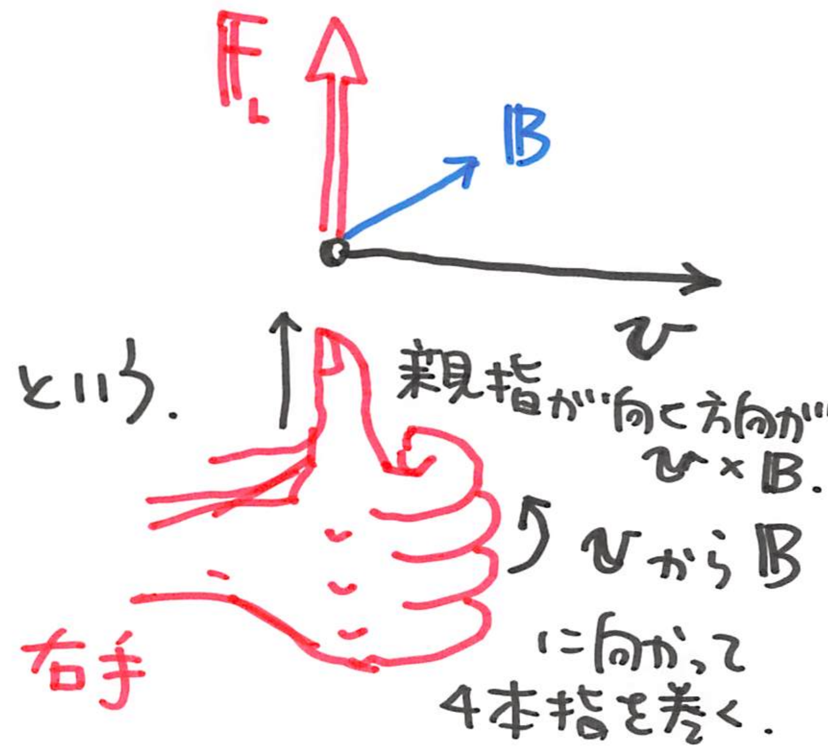
を受ける.

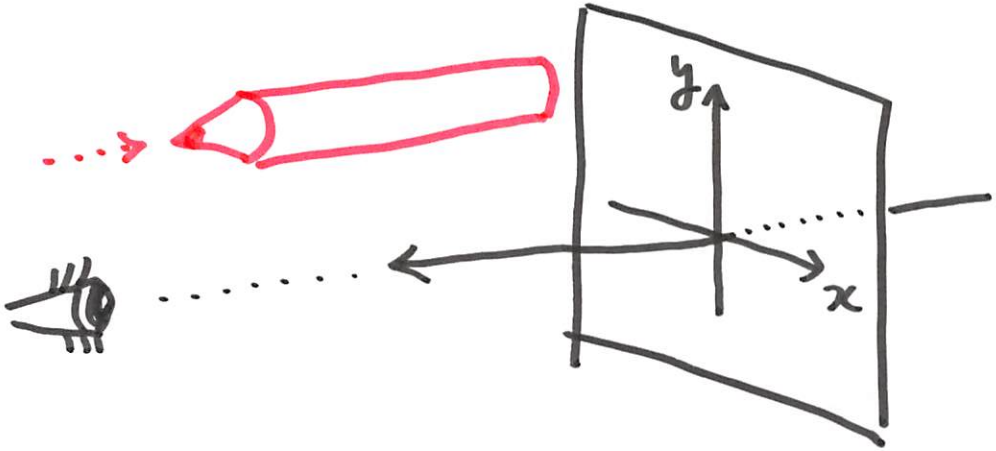
これが電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ と磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ の定義式である.

とくに 磁場から受ける力

$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$$

を ローレンツ力 (Lorentz force) という.

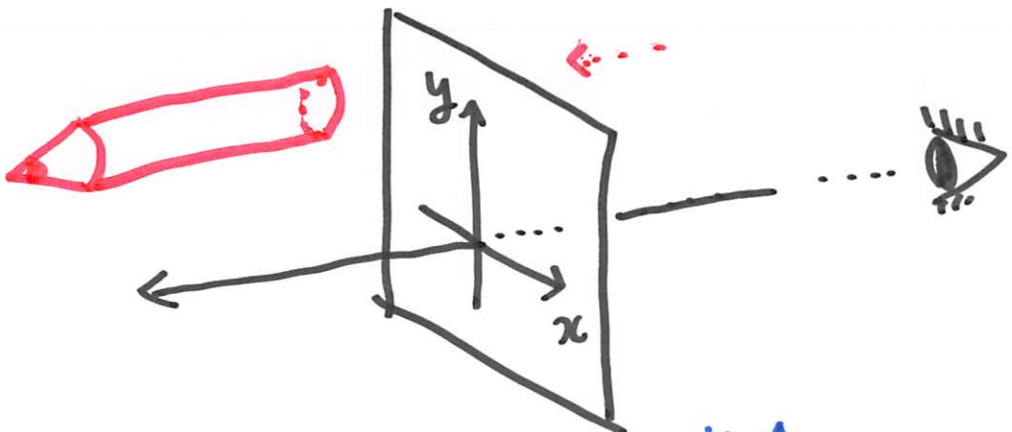




見ている人に向かって突き出る向きを

⊙

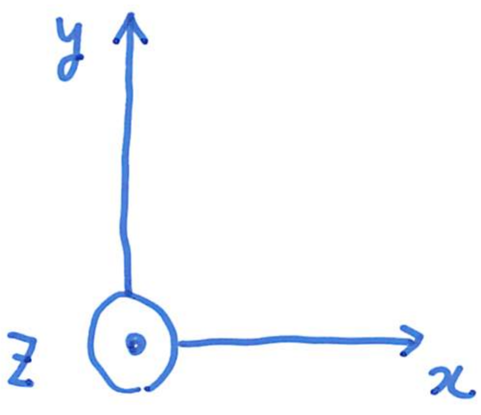
と書く.

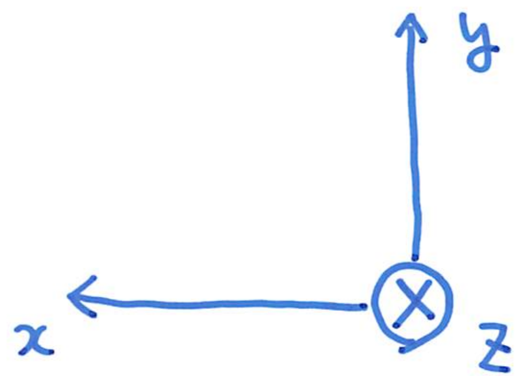


矢の尾の方を見ているときは

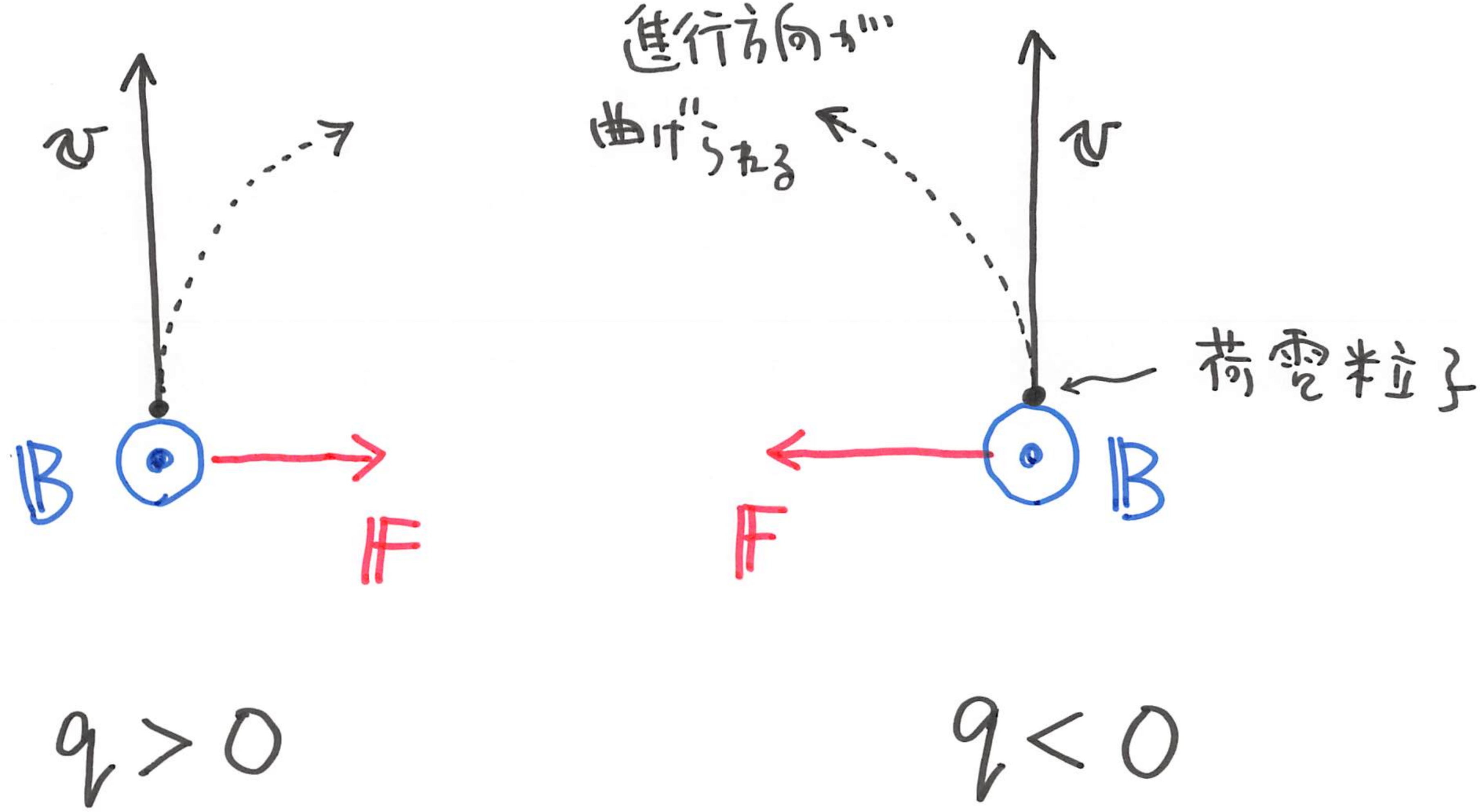
⊗

と書く.





ローレンツ力 $\mathbb{F} = q\boldsymbol{v} \times \mathbb{B}$ の向きは電荷 q の符号に依存する。



例題. 一様な磁場 $\mathbb{B} = B\mathbb{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$ (Bは定数)

の中を動く質量 m, 電荷 q の荷電粒子の運動方程式を解け.

使わない → [ただし, $t=0$ のときの初期位置 $\mathbb{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 初速度 $\mathbb{v}(0) = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする.]

答. 運動方程式 $m\dfrac{d\mathbb{v}}{dt} = q\mathbb{v} \times \mathbb{B}$ は $\mathbb{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

$\mathbb{v} = \dfrac{d\mathbb{r}}{dt} = \dot{\mathbb{r}}$ に対して $= \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$

$$m\begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = q\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$$

$$= q\begin{pmatrix} v_y B - v_z 0 \\ v_z 0 - v_x B \\ v_x 0 - v_y 0 \end{pmatrix} = q\begin{pmatrix} v_y B \\ -v_x B \\ 0 \end{pmatrix}$$

したがって運動方程式は、

$$\begin{cases} \dot{v}_x = \dfrac{qB}{m} v_y \\ \dot{v}_y = -\dfrac{qB}{m} v_x \\ \dot{v}_z = 0 \end{cases}$$

という連立微分方程式である。 $\dfrac{qB}{m} =: \omega$（オメガ）とおけば、

$$\begin{cases} \dot{v}_x = \omega v_y & \cdots (1) \\ \dot{v}_y = -\omega v_x & \cdots (2) \\ \dot{v}_z = 0 & \cdots (3) \end{cases}$$

$\omega \leftrightarrow w$（ダブリュー）と区別すべし

(1) $\dot{v}_x = \omega v_y$ の両辺をtで微分して、(2) $\dot{v}_y = -\omega v_x$ を代入すると

$$\ddot{v}_x = \omega \dot{v}_y = -\omega^2 v_x$$

この方程式の一般解は $v_x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ （a, b は任意定数）

と ~~~~ ~~初期値~~

(1) $v_y = \frac{1}{\omega}\dot{v}_x$ より $v_y(t) = -a\sin\omega t + b\cos\omega t$

これで(1), (2)は解けた。

さらに

$$\dot{x}(t) = v_x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

を積分すると、

$$x(t) = +\frac{a}{\omega}\sin\omega t - \frac{b}{\omega}\cos\omega t + c$$

同様に $\dot{y} = v_y$ から

$$y(t) = \frac{a}{\omega}\cos\omega t + \frac{b}{\omega}\sin\omega t + d$$ （c, d は任意定数）

$-\frac{b}{\omega} = R\cos\alpha$, $\frac{a}{\omega} = R\sin\alpha$ となるように R と α を定めると．

$$\sqrt{\left(\frac{a}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{b}{\omega}\right)^2} =: R$$

$$\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha, \quad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha$$

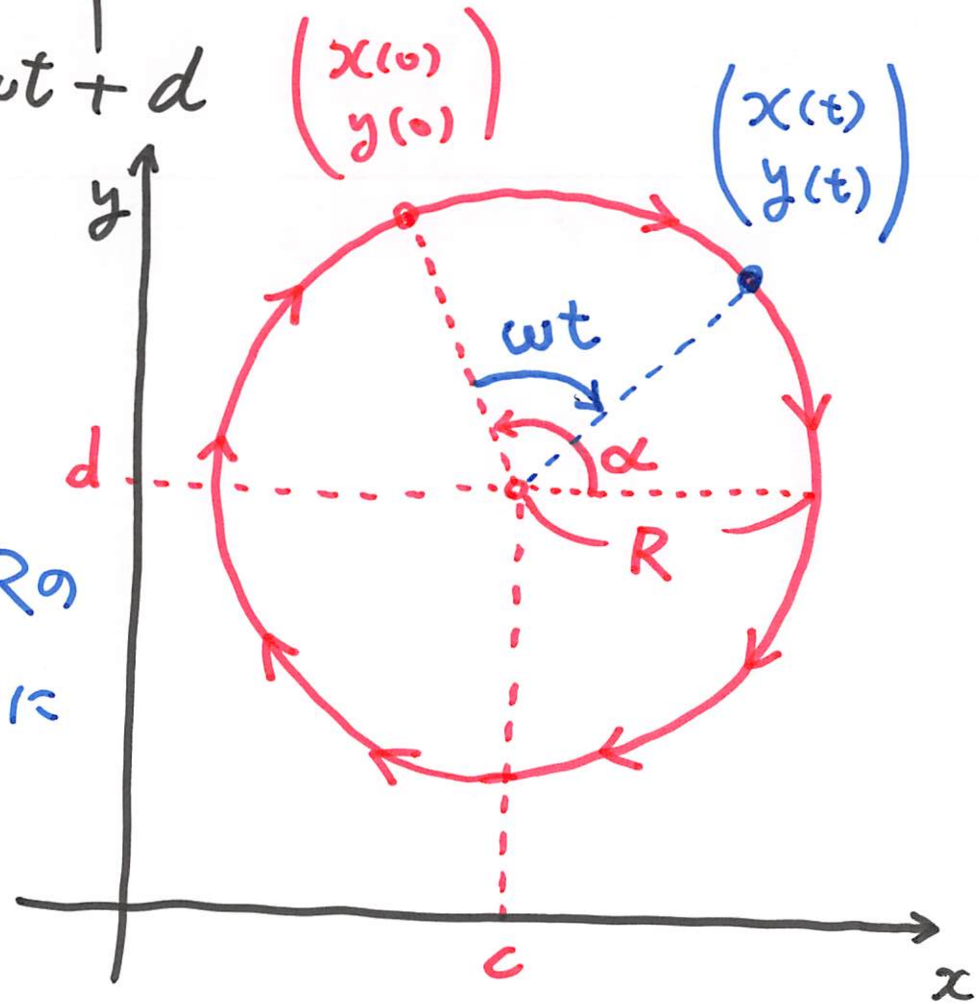
$$x(t) = R\cos\alpha\cos\omega t + R\sin\alpha\sin\omega t + c$$
$$= R\cos(\alpha - \omega t) + c.$$

$$y(t) = R\sin\alpha\cos\omega t - R\cos\alpha\sin\omega t + d$$
$$= R\sin(\alpha - \omega t) + d.$$

となる．

$\left(\omega := \frac{qB}{m}\right.$ が正ならば$\left.\right)$

これは点 $(x, y) = (c, d)$ を中心とする半径 R の円周上を、一定の角速度 ω で時計回りに回る運動．

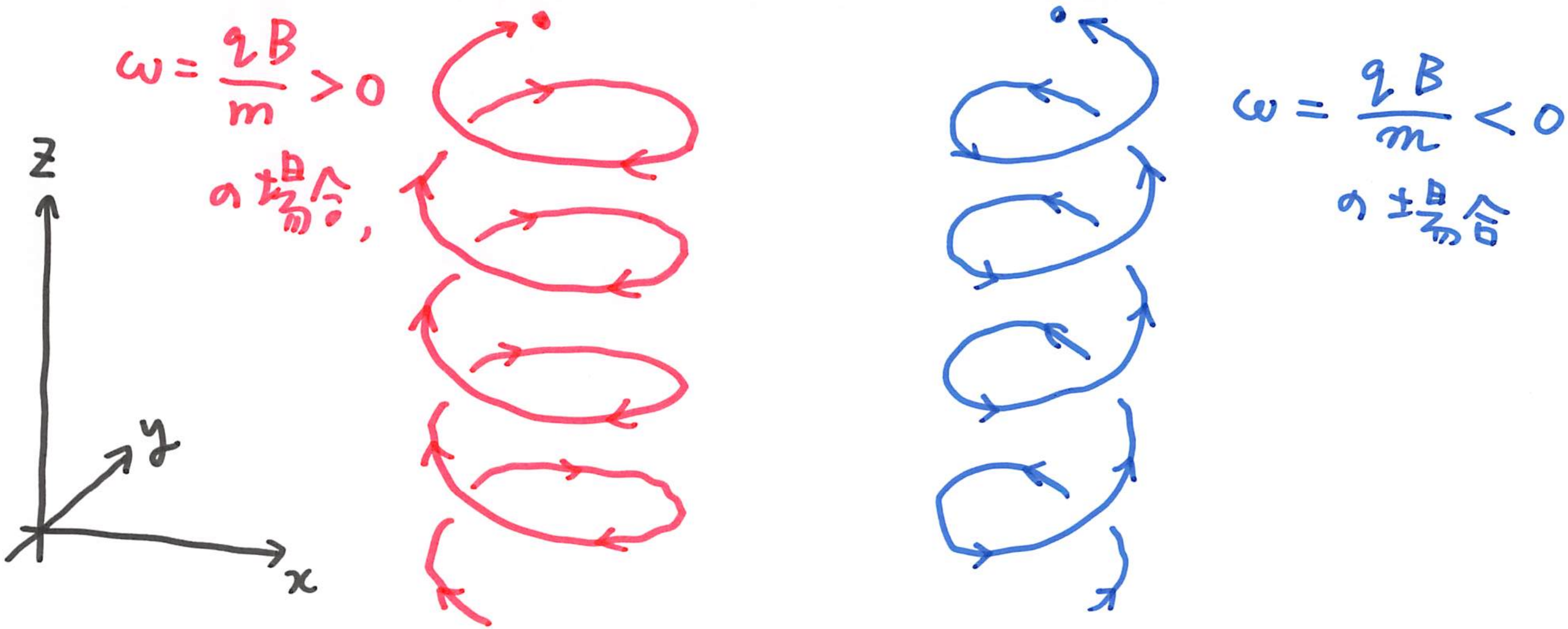


方程式(3) $\dot{v}_z = 0$ の解は？

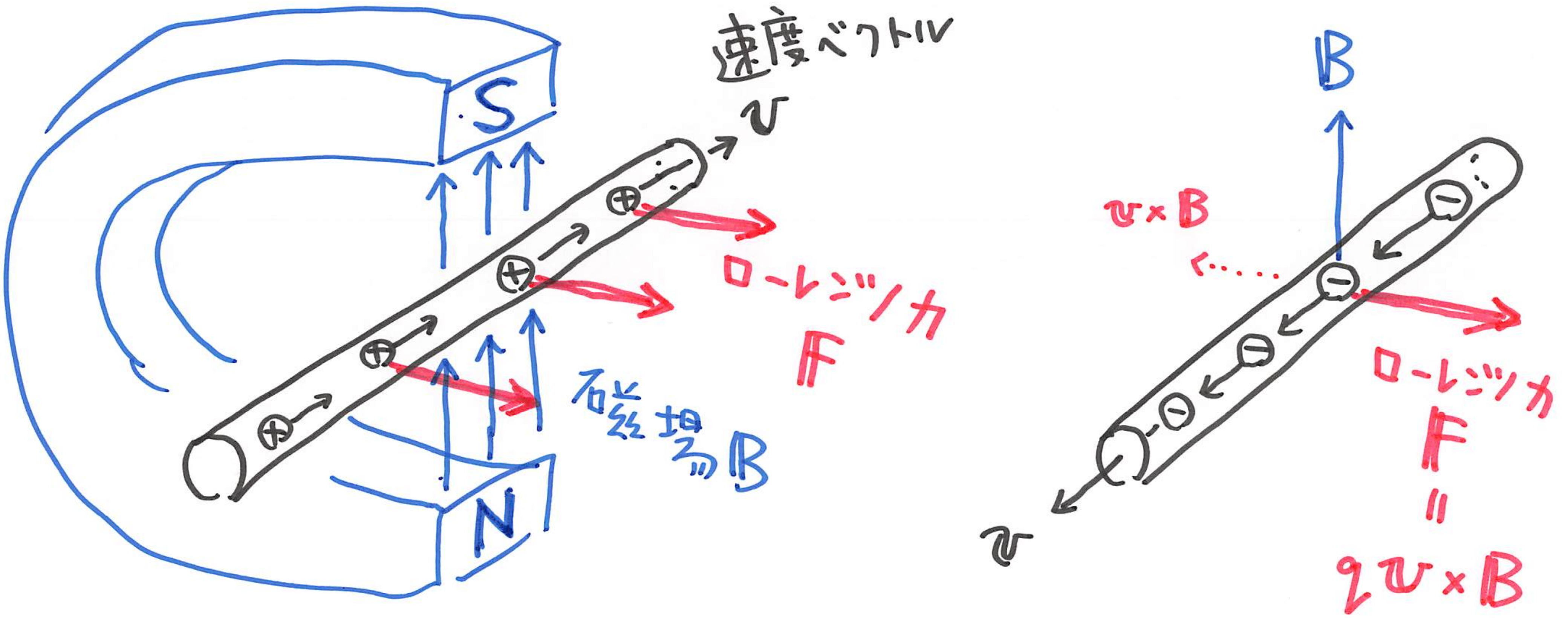
$$\dot{z} = v_z = \text{定数}$$

$$z = v_z t + z_0 \quad \therefore \text{ z軸方向には等速度運動}$$

一般解は、xy平面上の回転運動とz軸方向の等速度運動を重ねたらせん運動。

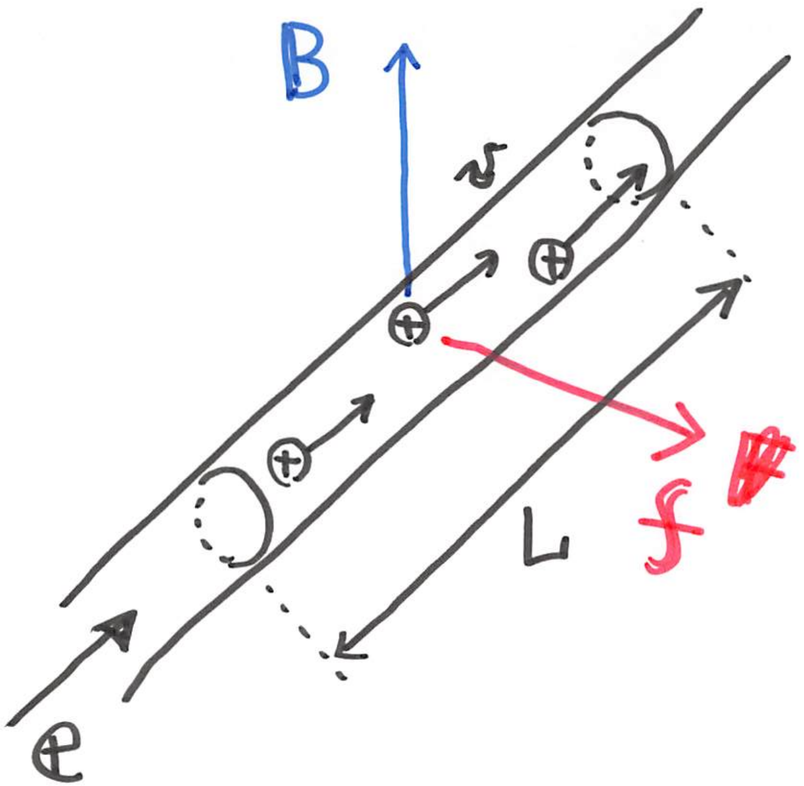


電流が流れている導線に磁場を印加すると、
電流の向きにも、磁場にも垂直な向きに導線が力を受ける。



導線の中を動いているものは、
負電荷を持つ電子だとしてもローレンツ力の
向きは同じ。

直線状の導線の中に、単位長さあたり n 個の荷電粒子があり、
これらが電荷 q を持っていて、平均速度 v で動いて、
単位ベクトル $\mathbb{e}$ の向きに電流 I が流れており、
この導線に磁場 $\mathbb{B}$ を印加したとき、
導線の長さ L の区間に働く力 $\mathbb{F}$ を求めよ.



1個の荷電粒子が受ける力 $\mathbb{f} = q\mathbb{v} \times \mathbb{B}$

速度ベクトル $\mathbb{v} = v\mathbb{e}$

区間 L の中にある荷電粒子の個数 $N = L \cdot n$

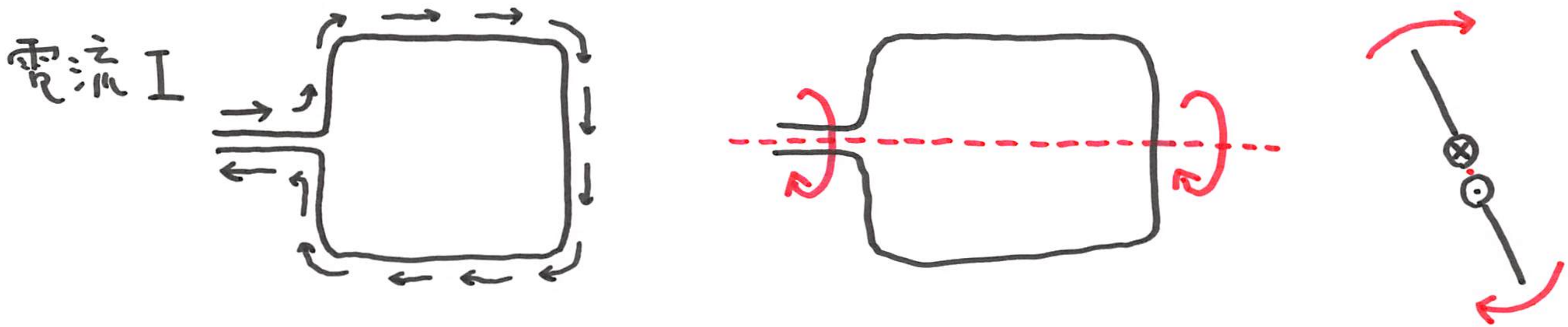
電流 $I = qvn$

∴区間 L の導線が受ける力

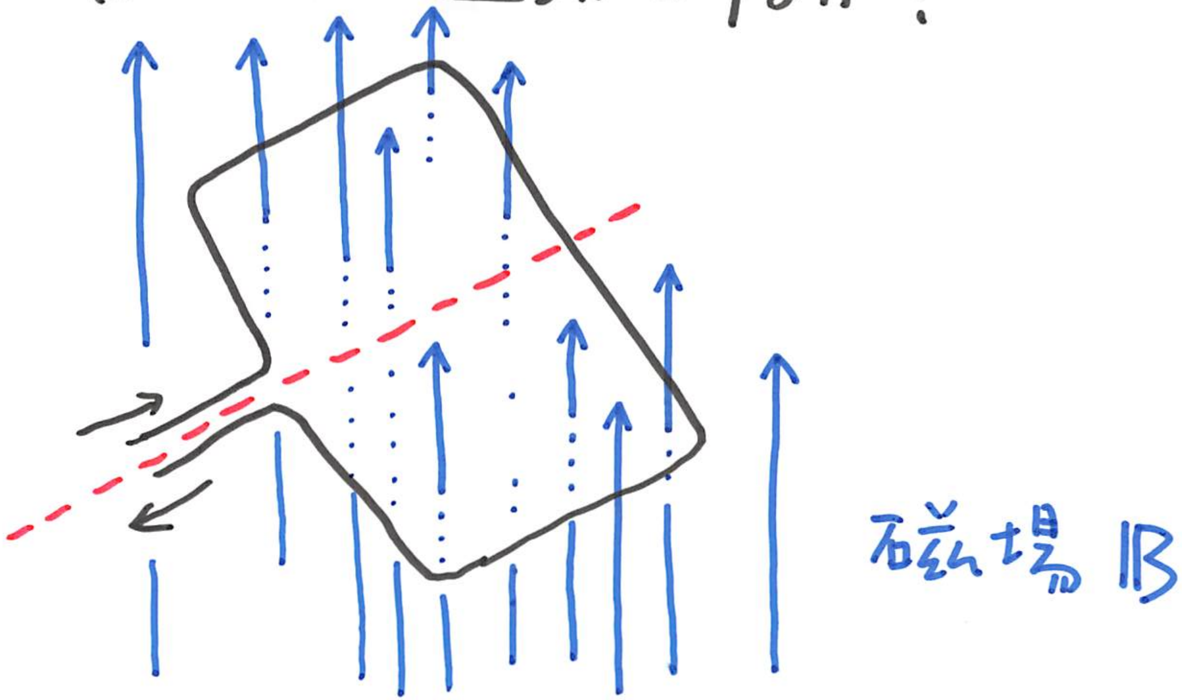
$\mathbb{F} = N\mathbb{f} = Nq\mathbb{v} \times \mathbb{B} = L \cdot nqv\mathbb{e} \times \mathbb{B}$

フレミングの法則 $\boxed{\mathbb{F} = L \cdot I\mathbb{e} \times \mathbb{B}}$

長方形型に導線を曲げて電流を流す．軸の周りを回転できる．



この導線環に磁場を印加すると，環にはどんな力が及び，
環はどんな運動をするか？



ローレンツ力の式 $\mathbb{F} = q\mathbb{v} \times \mathbb{B}$ は、

磁場が、動いている荷電粒子に及ぼす力を決める。

動いている荷電粒子（電流）が、磁場に及ぼす影響

——が作る磁場

を決める法則は？

ビオ・サバールの法則

と

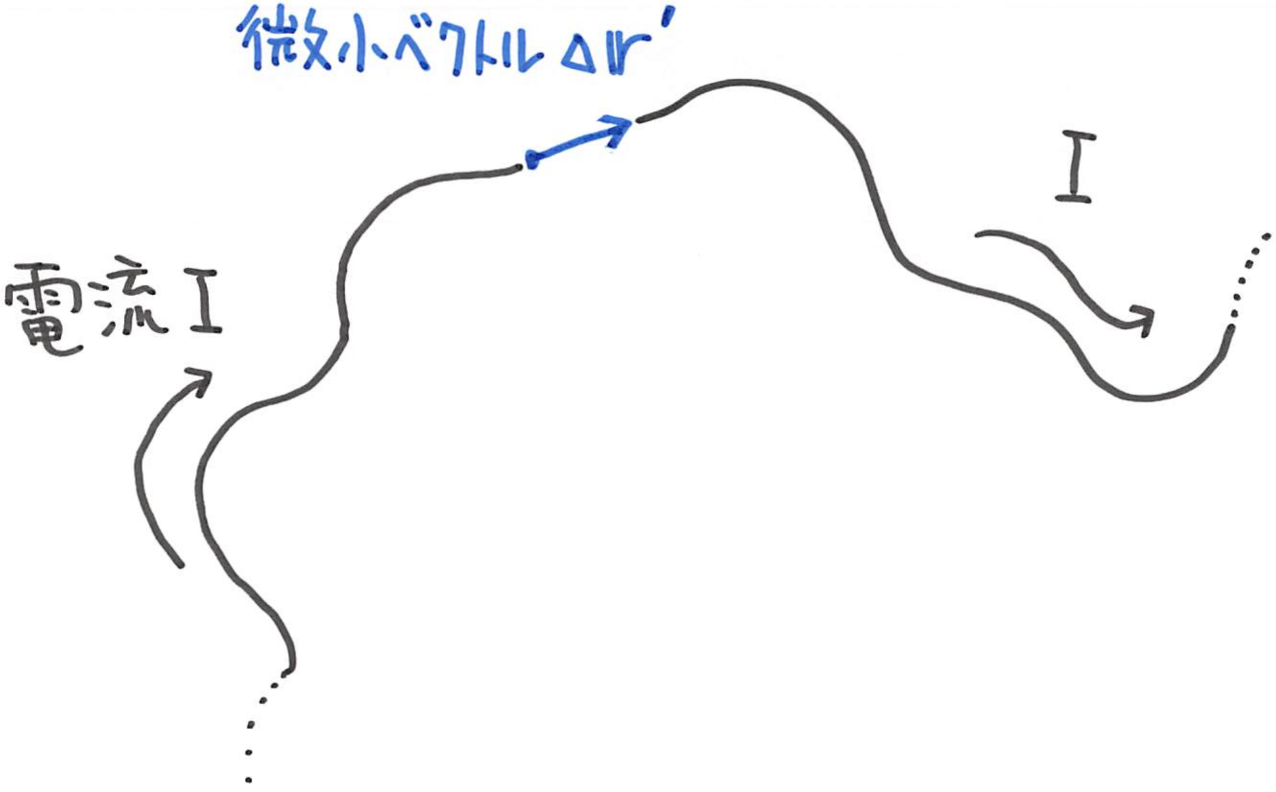
アンペールの法則

電流素片 (current element)

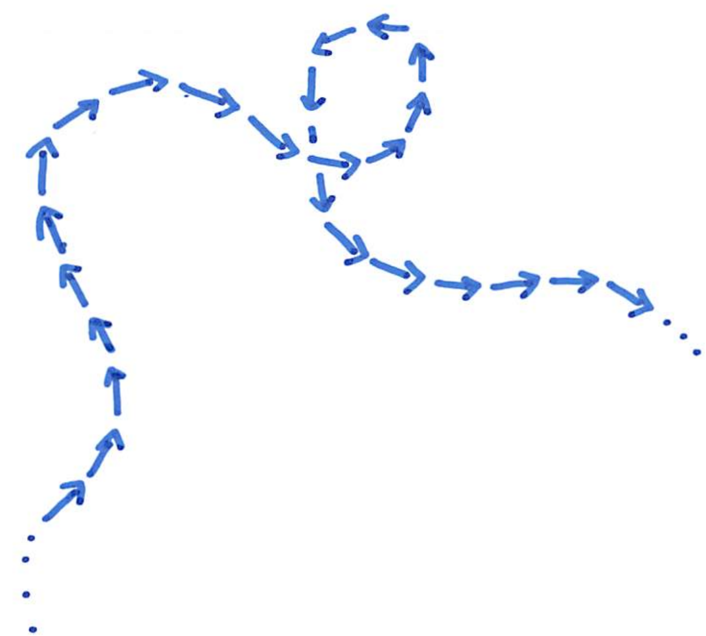
導線に沿って流れている電流の、ごく短い導線の一部に注目したもの。

導線に沿った微小な変位ベクトルを $\Delta\mathbf{r}'$ とすると、

電流 I の電流素片を $I\Delta\mathbf{r}'$ と書く。



電流は電流素片の集合とみなせる。



ビオ・サバールの法則 (ビオ Biot とサバール Savart)

電流素片 $I\Delta\mathbf{r}'$ は、そこから $\mathbf{r}$ だけ離れた場所に

$$\Delta\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta\mathbf{r}'}{r^2}\times\frac{\mathbf{r}}{r}$$

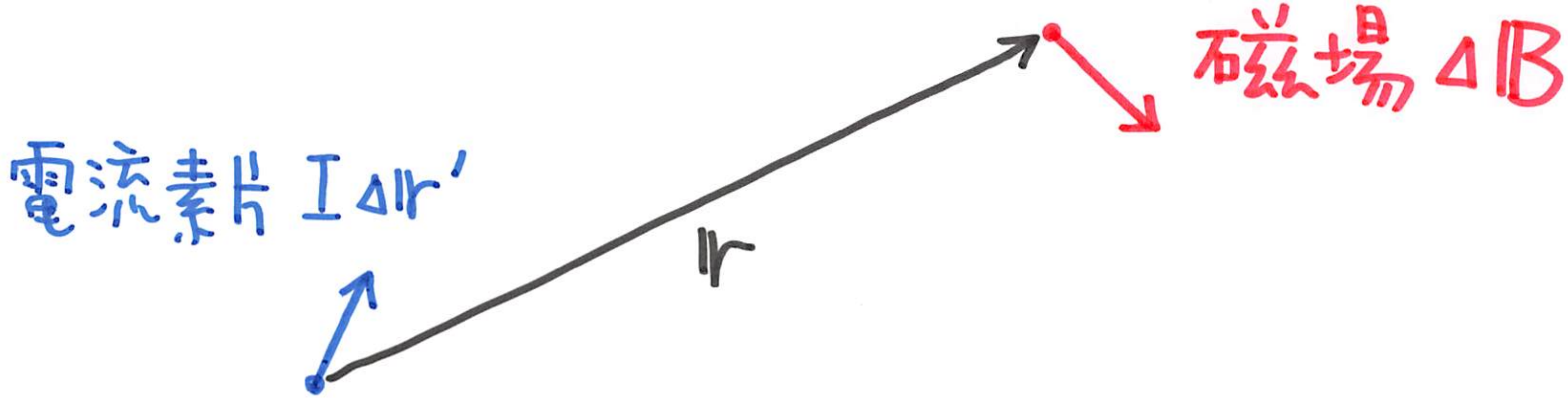
ベクトル $\Delta\mathbf{r}'$ と $\mathbf{r}$ の外積

の微小磁場を作る. ここで $r = \|\mathbf{r}\|$ であり,

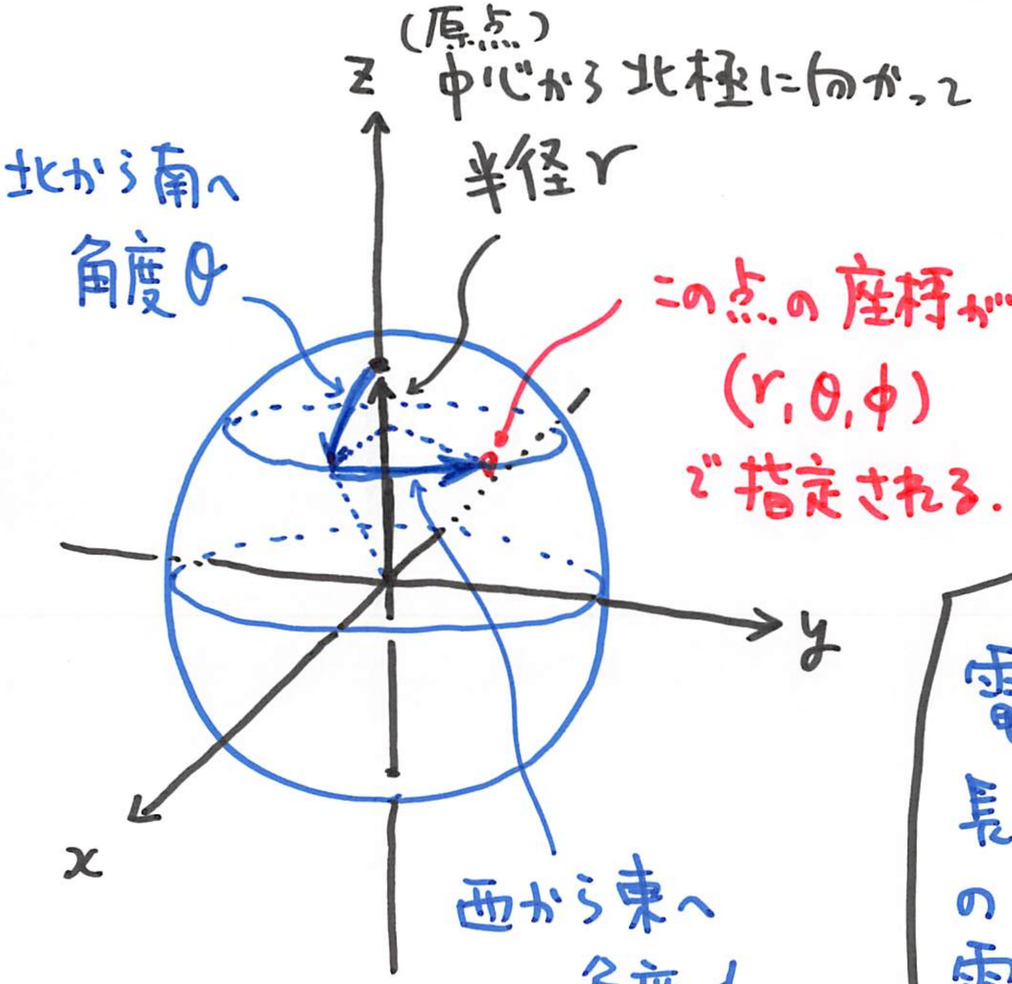
ミューゼロ

μ_0 は**真空の透磁率**と呼ばれる物理定数である.

$\mu_0 = 12.56637\cdots\times10^{-7}\,\mathrm{N\cdot A^{-2}}$.



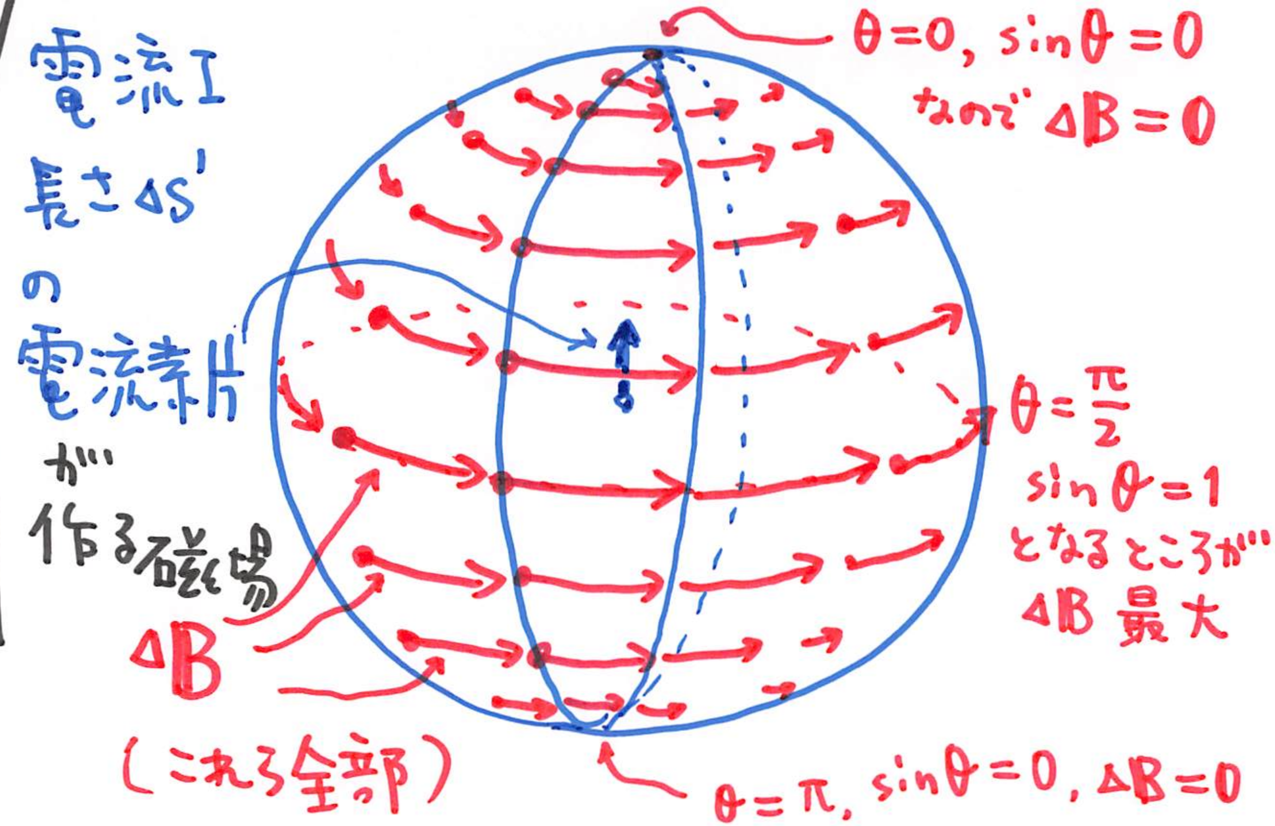
3次元空間の極座標を使って ビオ・サバールの法則を書き直す.



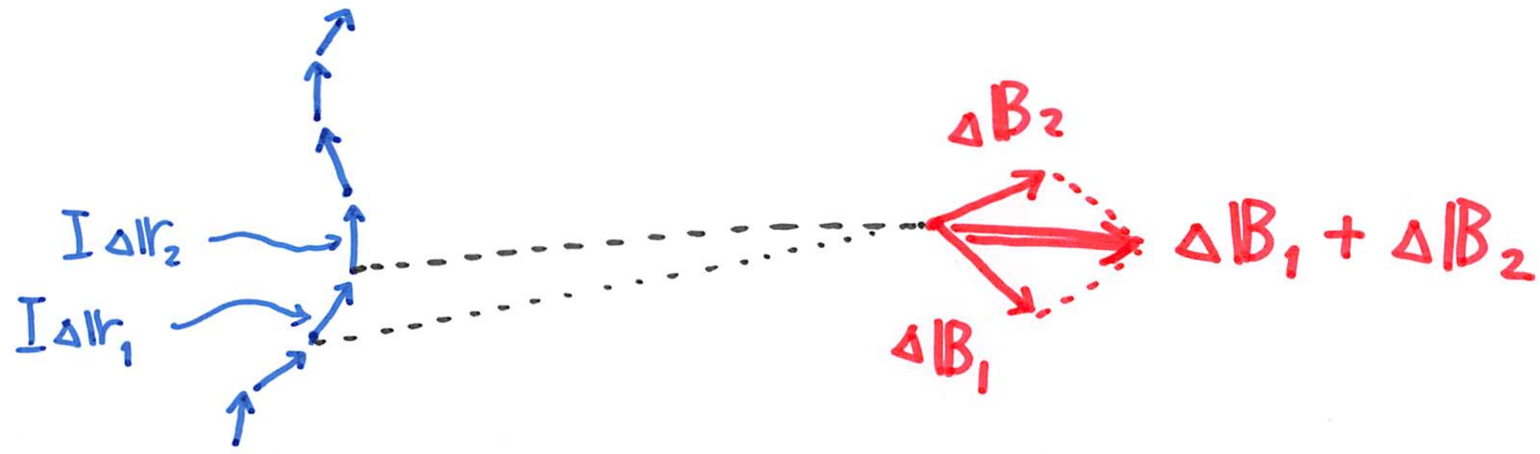
極座標(r, θ, φ)

原点の位置に電流素片があり,
電流の向きを z軸とすると,
(r, θ, φ)の位置にできる磁場は,

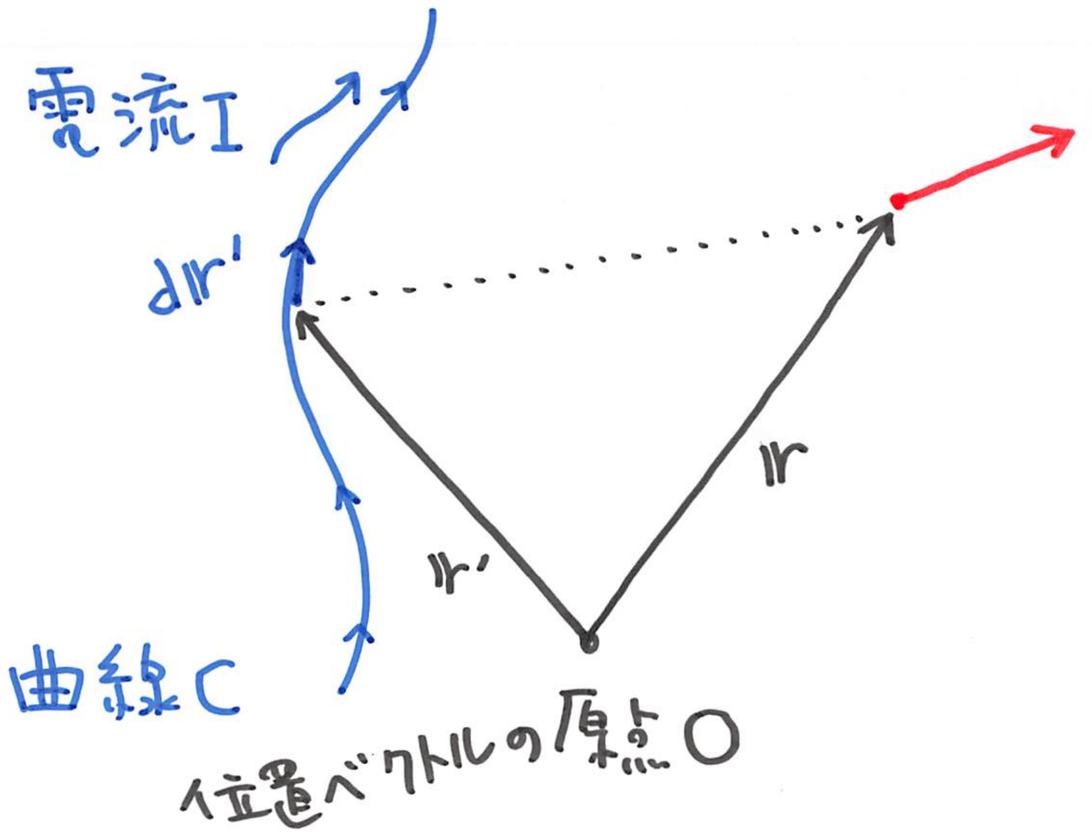
$$\Delta \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta s'}{r^2} \sin\theta \, \mathbf{e}_\phi$$



一般には、電流素片が作る磁場を重ね合わせてトータルの磁場を求める。

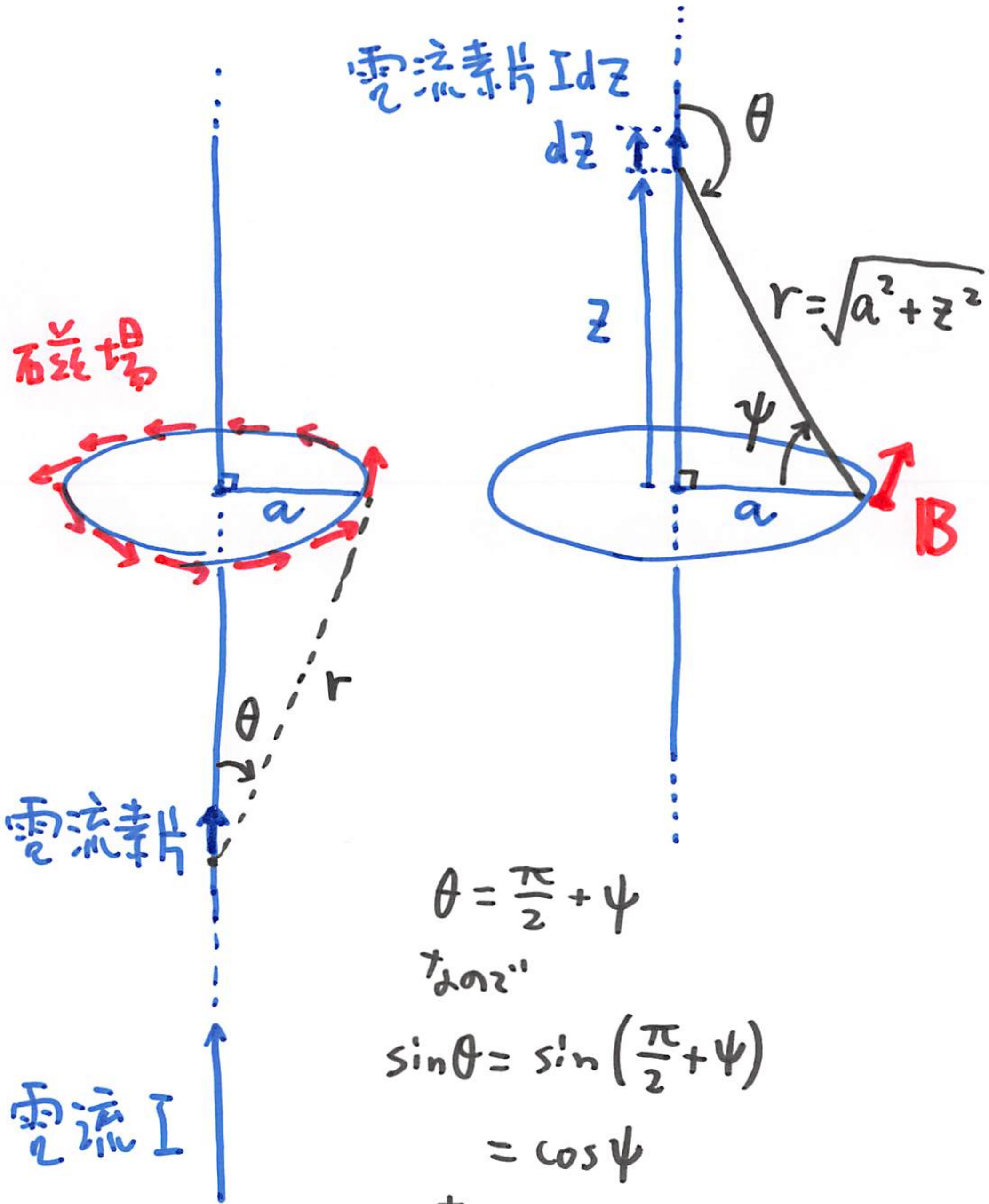


$$\mathbb{B} = \sum_i \Delta\mathbb{B}_i$$



$$\mathbb{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C \frac{d\mathbb{r}'}{\|\mathbb{r}-\mathbb{r}'\|^2} \times \frac{(\mathbb{r}-\mathbb{r}')}{\|\mathbb{r}-\mathbb{r}'\|}$$

例題. 無限に長い直線に沿って電流 I が流れている.
直線から距離 a 離れた点における磁場の向きと大きさを求めよ.



$\theta=\frac{\pi}{2}+\psi$

なので

$\sin\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\psi\right)$

$=\cos\psi$

と考えてもよい.

角度変数 $\overset{\text{プサイ}}{\psi}$　$\psi=-\frac{\pi}{2}$ から $\psi=+\frac{\pi}{2}$ まで変動.

$z=a\tan\psi$

$$\frac{dz}{d\psi}=\frac{a}{\cos^2\psi}$$

$$r^2=a^2+z^2=a^2(1+\tan^2\psi)=\frac{a^2}{\cos^2\psi}$$

$$\sin\theta=\frac{a}{r}=\frac{a}{a}\cos\psi=\cos\psi \qquad \because\ r=\frac{a}{\cos\psi}$$

ビオ・サバールの法則より

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{I\,dz}{r^2}\sin\theta$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{r^2}\frac{dz}{d\psi}d\psi\cdot\frac{a}{r}$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos^2\psi}{a^2}\frac{a}{\cos^2\psi}\cos\psi\,d\psi$$

以上より

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\psi \, d\psi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \Big[\sin\psi \Big]_{\psi=-\pi/2}^{\psi=\pi/2}$$

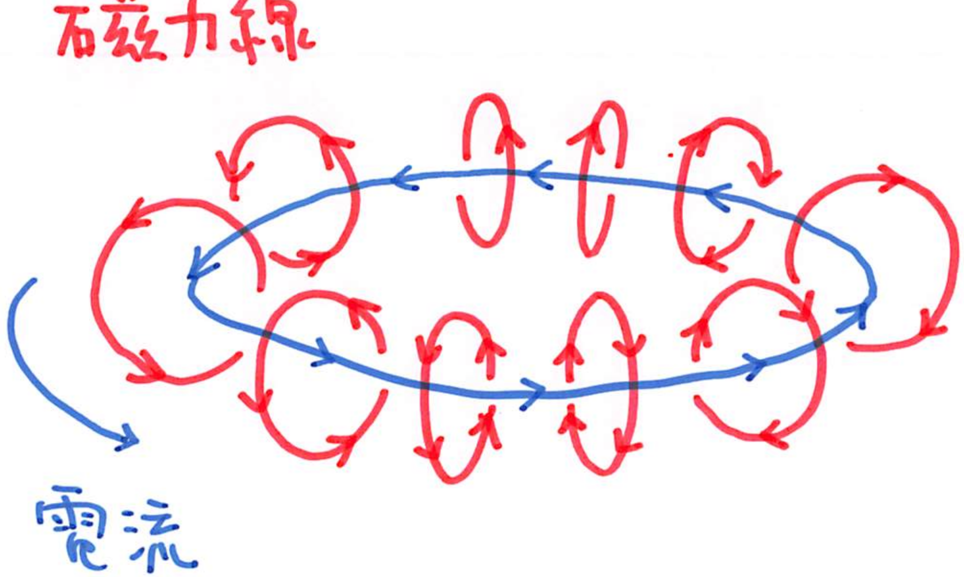
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right\}$$

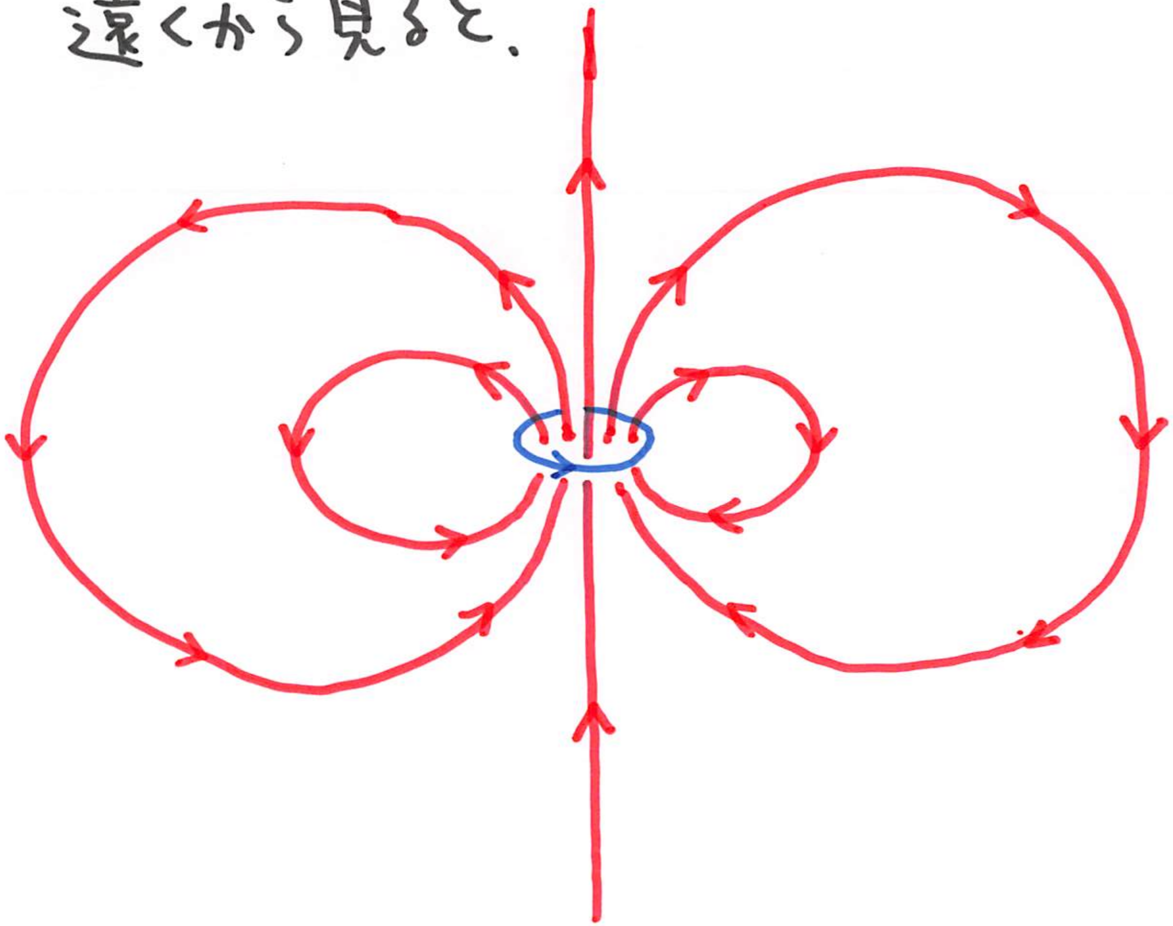
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left\{ 1 - (-1) \right\}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad \blacksquare$$

例題. xy 平面上の原点を中心とする半径 a の円周に沿って電流 I が流れている。
磁力線の概略図を描き、z 軸上の点 $(0, 0, z)$ における磁場の向きと大きさを求めよ。

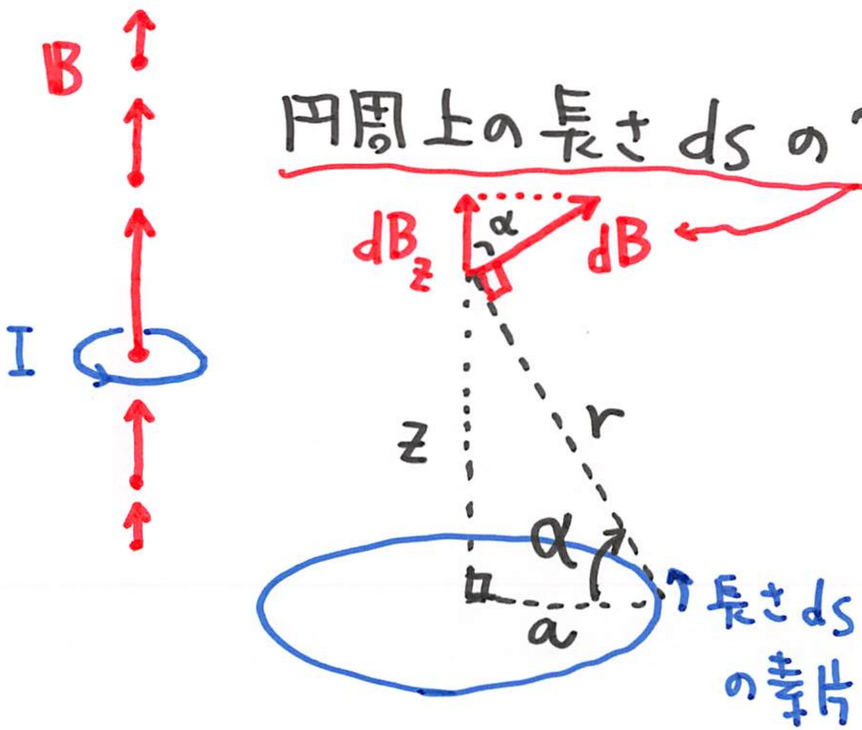
解. ビオ・サバールの法則より、電流素片の周りには、$\underbrace{\text{右ねじ巻きの}}_{}$ 磁場ができて、
(電流の向きに対して)
磁場の大きさは距離の2乗に反比例するので、
円電流の近くの磁場は、　　　遠くから見ると、





z軸周りの回転対称性から、z軸上では $B_x = 0,\ B_y = 0$.

z軸上では磁場はz軸に平行.



円周上の長さdsの電流素片が作る磁場の大きさは

ビオ・サバールの法則より、

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,ds}{r^2}$$

それのうちz成分は、

$$dB_z = dB\cdot\cos\alpha = dB\cdot\frac{a}{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a}{r^3}ds$$

磁場の重ね合わせの原理より、

円周電流全体が作る磁場は

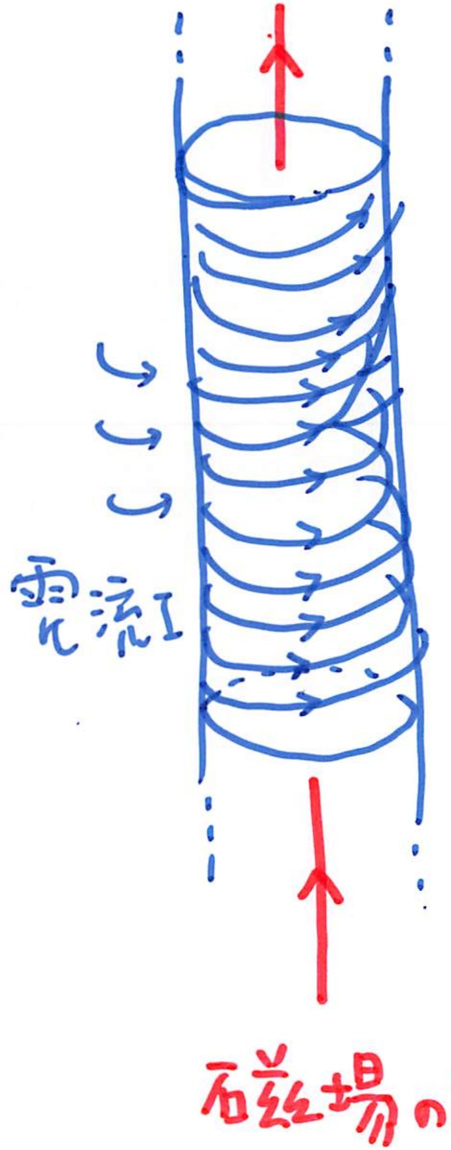
円周の長さの積分

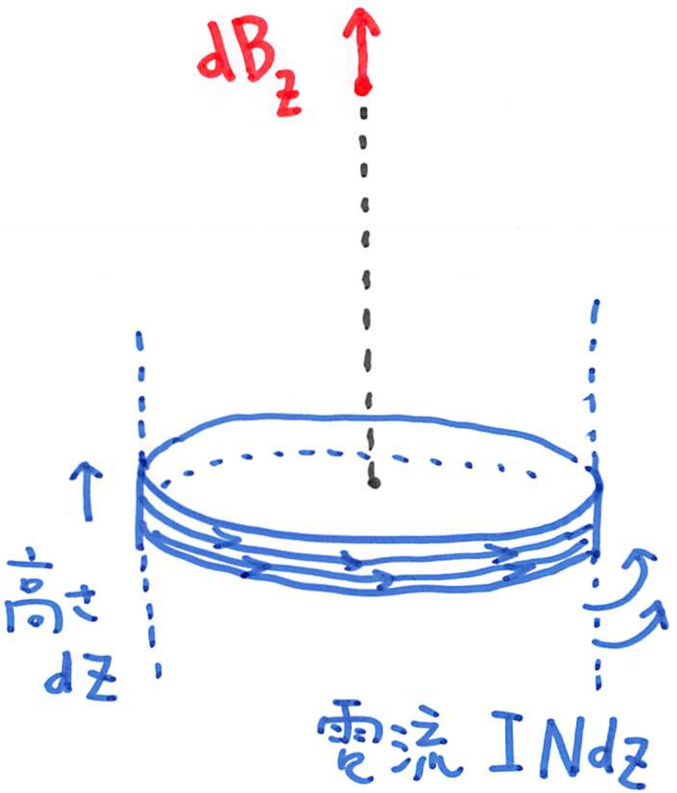
$\int ds = 2\pi a$ →

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{a}{r^3}ds = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a}{r^3}\cdot 2\pi a$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 I\frac{a^2}{r^3} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}$$ ∎

例題．半径aで無限に長い円筒形に単位長さあたり導線がN回巻いてあるソレノイドコイルに電流Iが流れている。ソレノイドコイルの中心軸における磁場の大きさを求めよ。





解．ソレノイドのうち高さzと$z+dz$ではさまれた区間の電流が作る磁場は

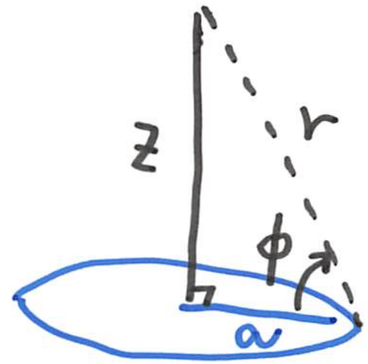
さっき求めた式のIを$INdz$でおきかえた。

$$dB_z = \frac{\mu_0 \cdot \underline{INdz} \cdot a^2}{2\,(a^2+z^2)^{3/2}}$$

これを ソレノイド全体にわたって積分すればよい:

$$B_z = \frac{\mu_0 I N a^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(a^2+z^2)^{3/2}}$$

積分変数を変換（zからφに）



$$z = a\tan\phi$$

$$\frac{dz}{d\phi} = \frac{a}{\cos^2\phi}$$

$$a^2+z^2 = a^2+a^2\tan^2\phi = a^2(1+\tan^2\phi) = a^2\left(1+\frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi}\right) = \frac{a^2}{\cos^2\phi}$$

そうすると、

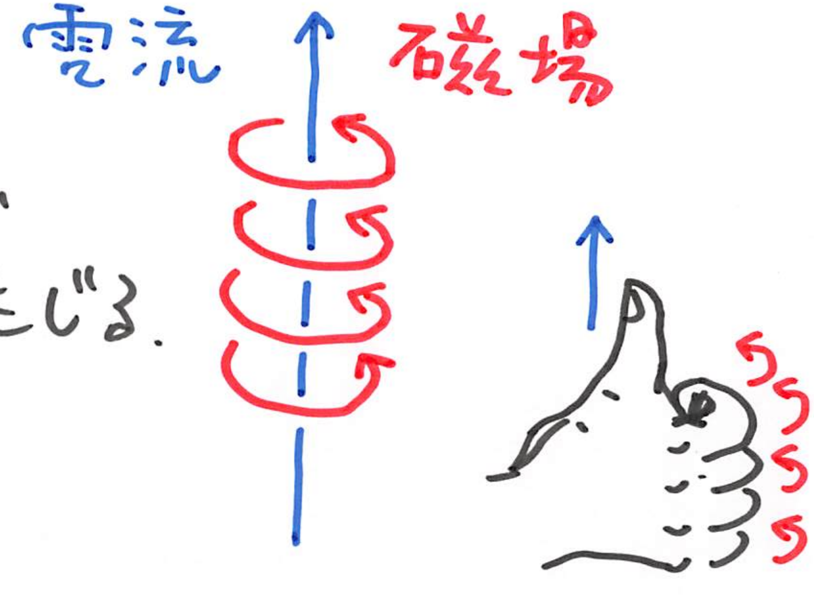
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{(a^2+z^2)^{3/2}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos^3\phi}{a^3}\cdot\frac{dz}{d\phi}d\phi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos^3\phi}{a^3}\cdot\frac{a}{\cos^2\phi}d\phi$$

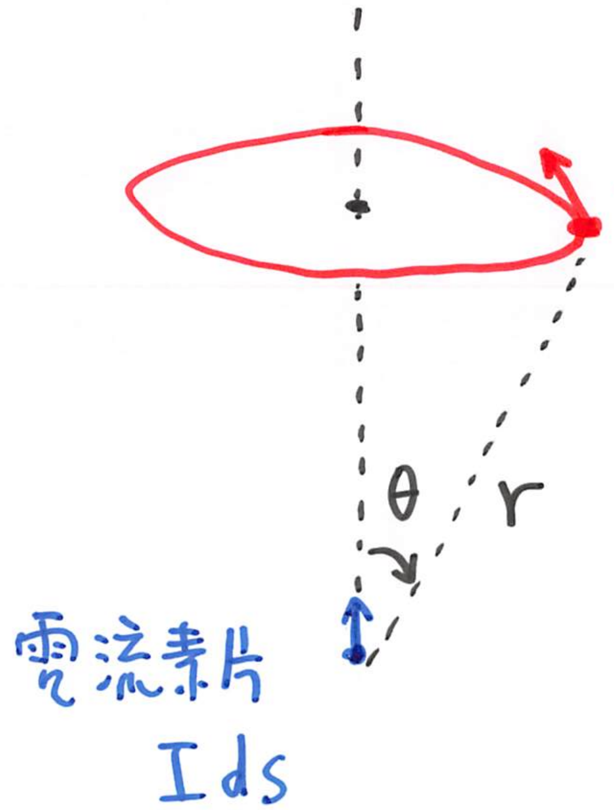
$$= \frac{1}{a^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\phi\, d\phi = \frac{1}{a^2}\Big[\sin\phi\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \underbrace{\frac{1}{a^2}\times 2}$$

よって $B_z = \frac{1}{2}\mu_0 I N a^2\cdot\underbrace{\frac{1}{a^2}\cdot 2} = \mu_0 I N$

ビオ・サバールの法則

電流の向きを右手の親指とすると、右手の4本指の向きに磁場が生じる。





磁場の大きさ $dB = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\,ds}{r^2}\sin\theta$

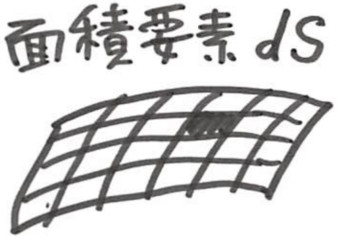
アンペールの法則 (Ampère's law)

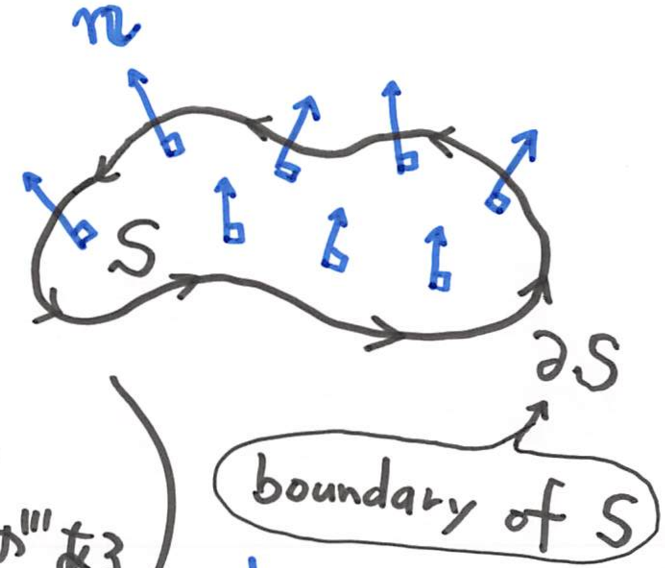
$\mathbb{B}$：磁場

$\mathbf{j}$：電流密度

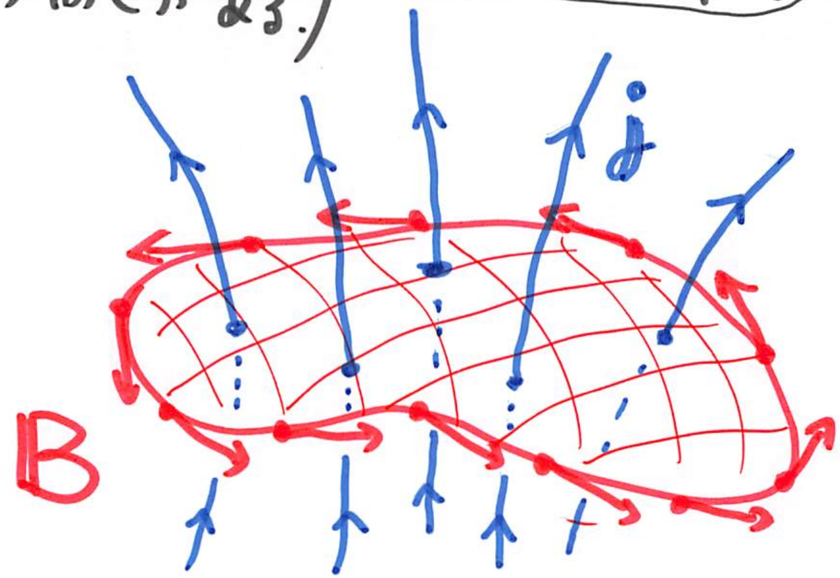
S：任意の向き付けられた曲面

（裏から表に向かう単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ と
縁~~に沿う~~の曲線 ∂S に沿う向きがある。）





$$\int_{\partial S} \mathbb{B}\cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\, dS$$

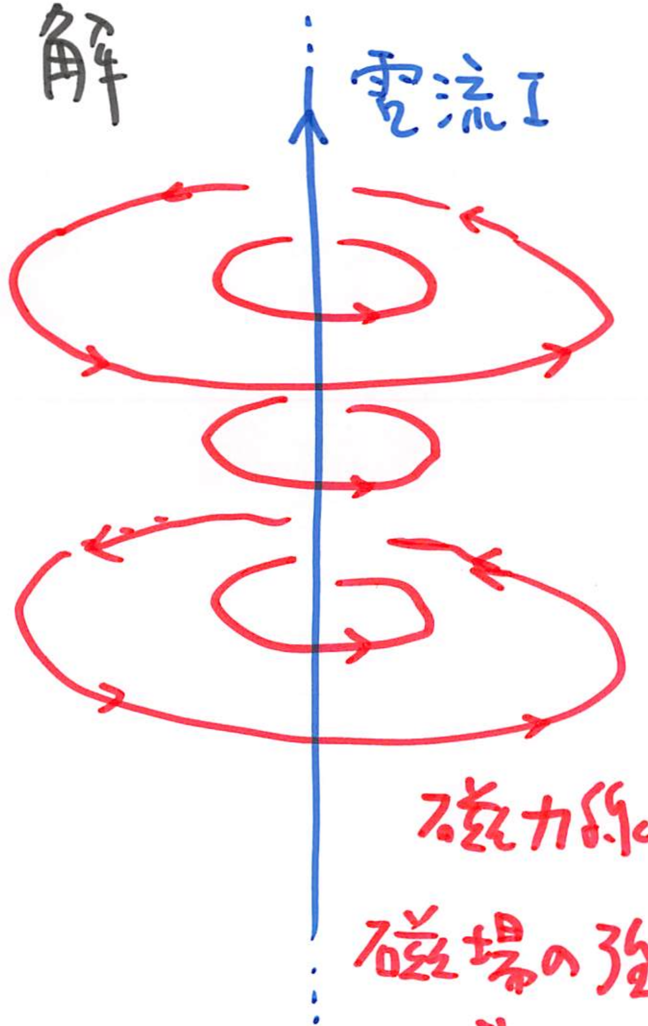


[Sの縁に沿っての磁場の線積分]

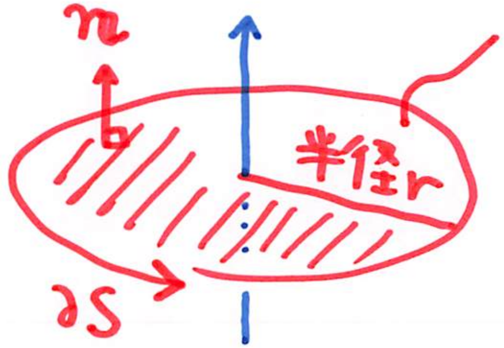
$= \mu_0 \times$ [Sを貫く正味の電流量].

例題．無限に長い直線に沿って電流 I が流れている．
磁力線の概略図を描き，直線から距離 r 離れた点における磁場の大きさを求めよ．（ビオ・サバールの法則を用いて求めたが，もう一度，アンペールの法則を用いて求める．）

解



磁場の強さは r だけの関数 $B(r)$



半径 r の円板を S とする．

$$\int_{\partial S} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{r} = B\cdot 2\pi r$$

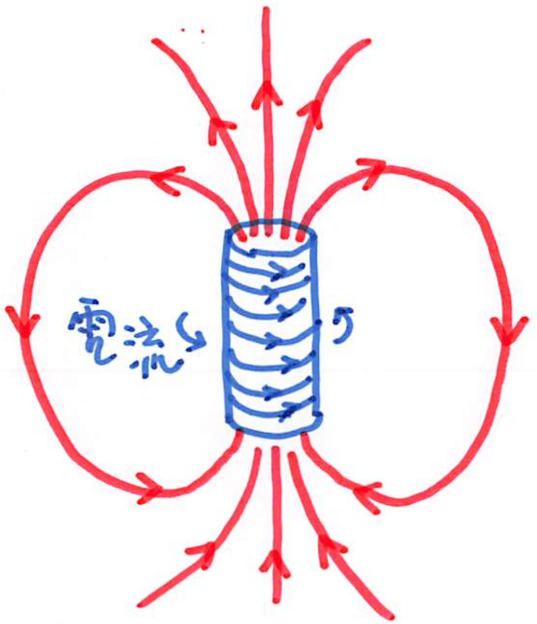
$$\mu_0 \int_S \mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\, dS = \mu_0 I$$

アンペールの法則より $B\cdot 2\pi r = \mu_0 I$

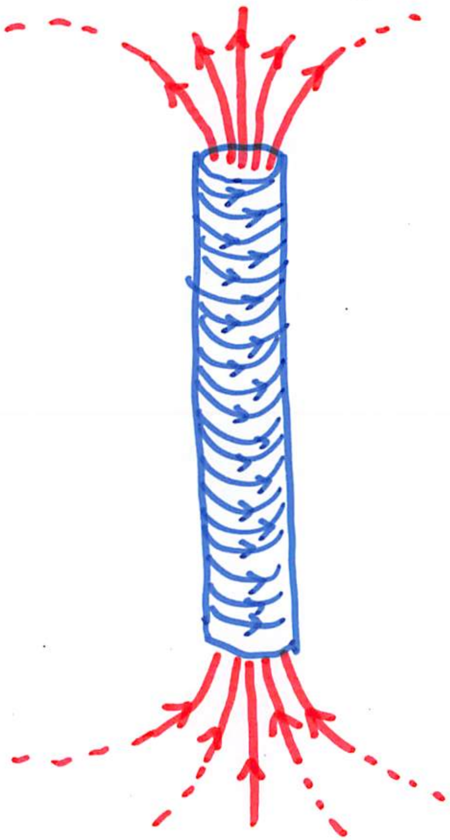
$$\therefore\ B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \blacksquare$$

例題．半径 a で無限に長い円筒形に単位長さあたり導線が N 回巻いてある。ソレノイドコイルに電流 I が流れている．磁力線の概略図を描き，任意の場所における磁場の大きさを求めよ．

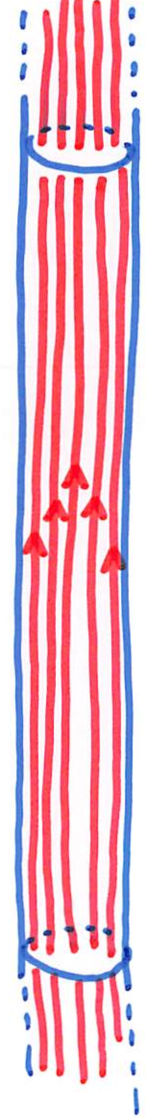
（ビオ・サバールの法則でやったが，アンペールの法則で考える．）



有限長さのソレノイドコイル

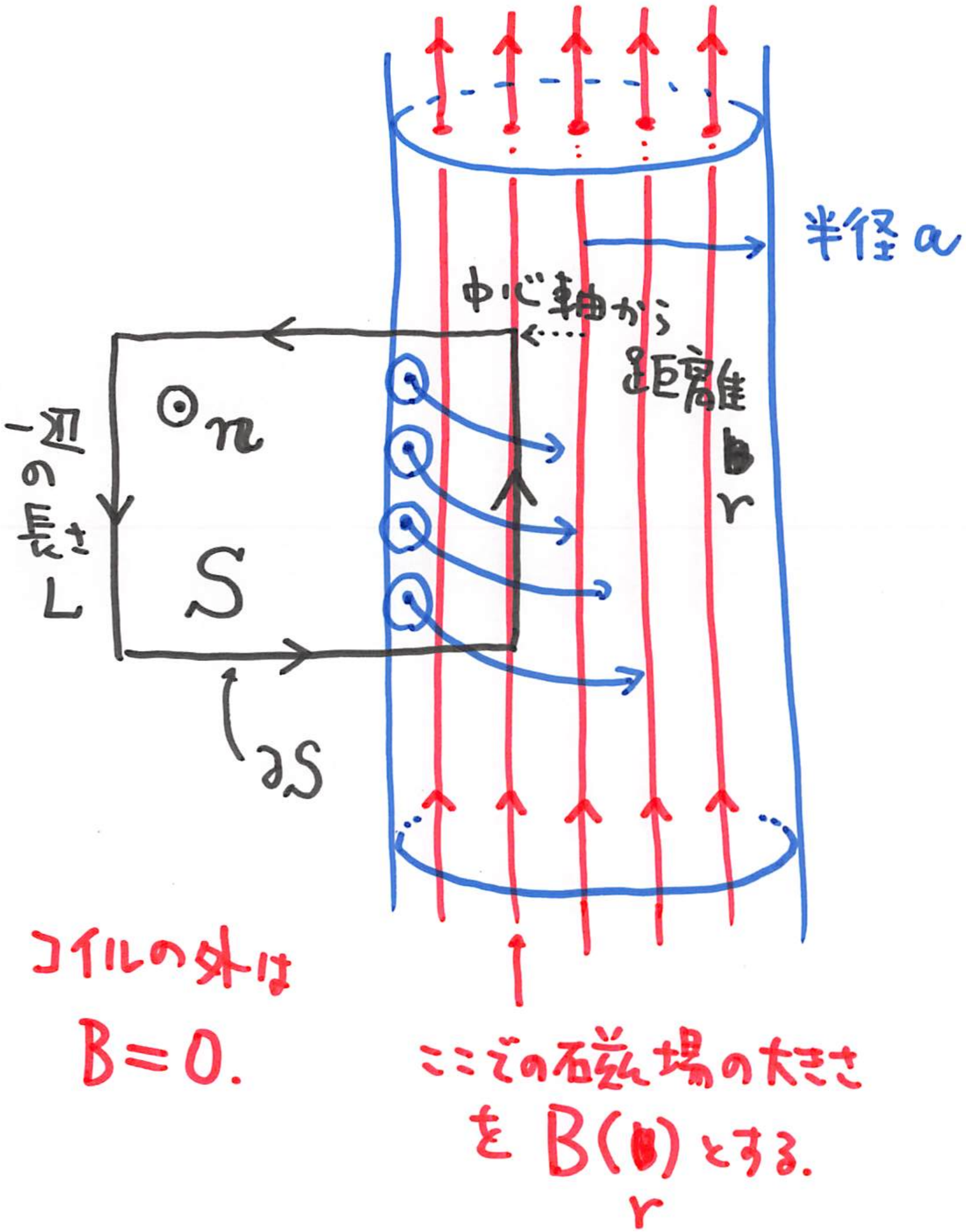


長くしていく



長さ無限大の極限では，コイルの外側の磁場はゼロになる．

アンペールの法則を適用する曲面Sとして、図のような長方形を選ぶ。



$$\int_{\partial S} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{r} = B(r)\cdot L$$

$$\mu_0 \int_S \mathbf{j}\cdot \mathbf{n}\, dS = \mu_0 INL$$

したがってアンペールの法則は

$$B\cdot L = \mu_0 INL$$

を与える。

よって

$$B = \mu_0 IN \quad \blacksquare$$

結果的には磁場B(r)はrによらない。

課題　問11-12

2本の導線が平行で、距離 r だけ離れている。
一方には電流 I_1、他方には電流 I_2 が流れている。

2本の導線にはどちら向きの力が働くか？

電流が同じ向きの場合は？　逆向きの場合は？

導線の ~~単~~ 長さ L の区間に働く力の大きさ F は？