物理学基礎 II

講義 11 の板書ノート

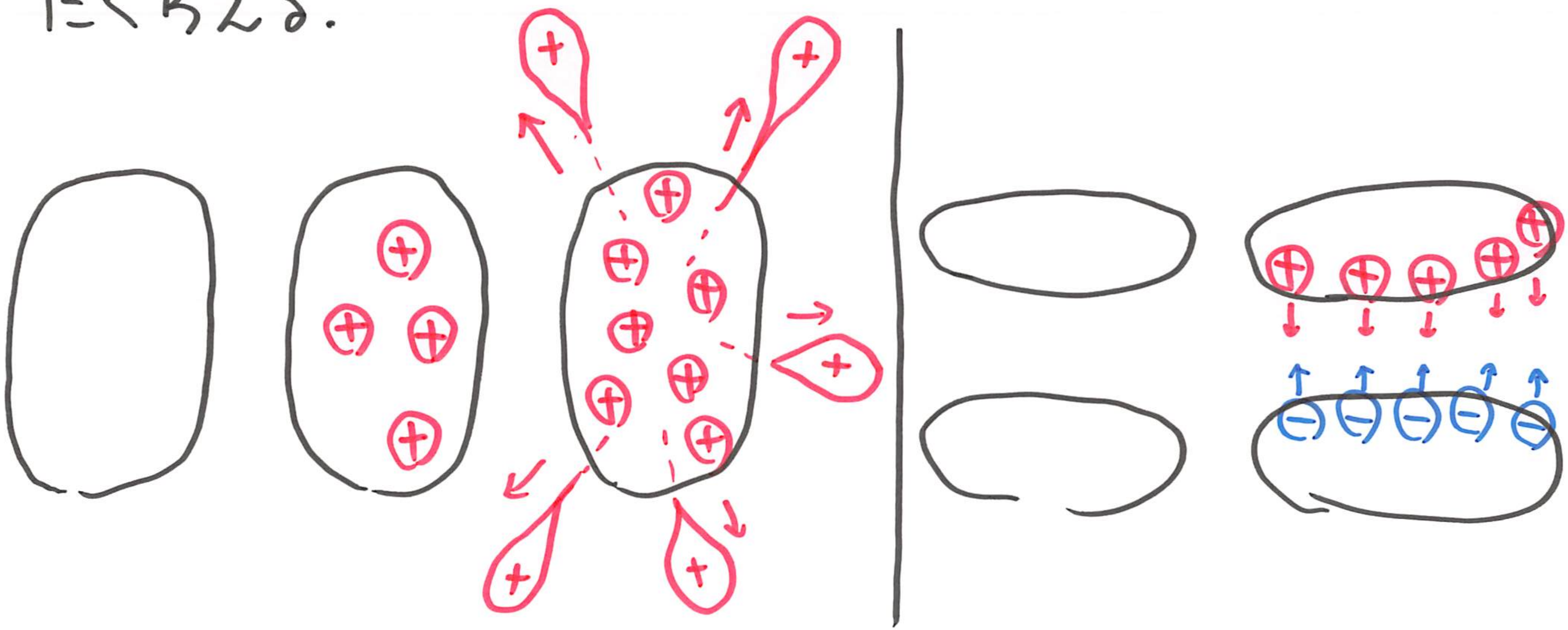
コンデンサに蓄えるエネルギー

谷村 省吾

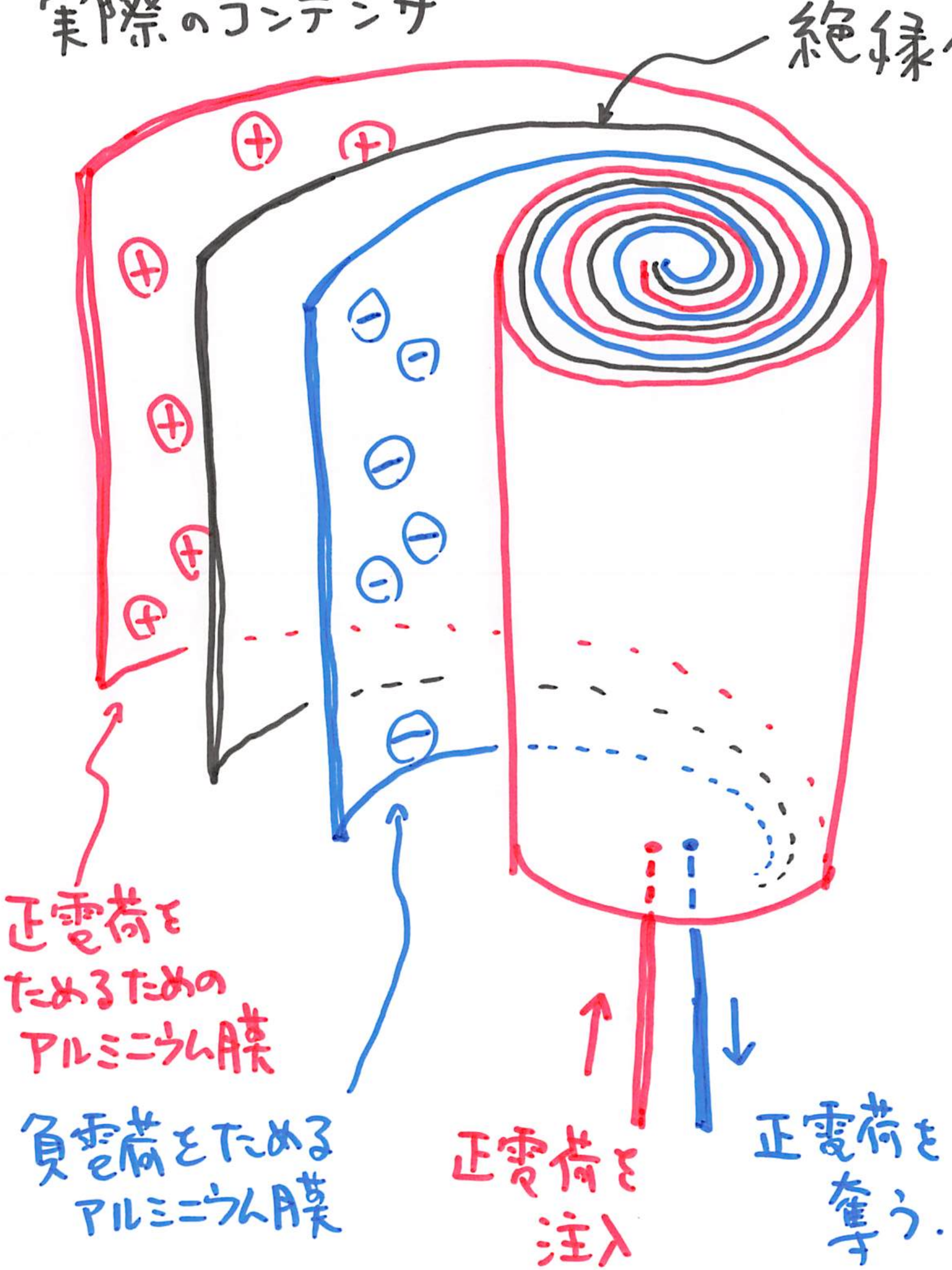
コンデンサ (condenser)

電荷をためる装置.

ただし、プラス電荷だけ、あるいはマイナス電荷だけをためると
同符号の電荷は反発しあって電荷が飛散してしまうので、
プラス・マイナスの電荷~~を~~が互いに引き寄せ合う形で
たくわえる.

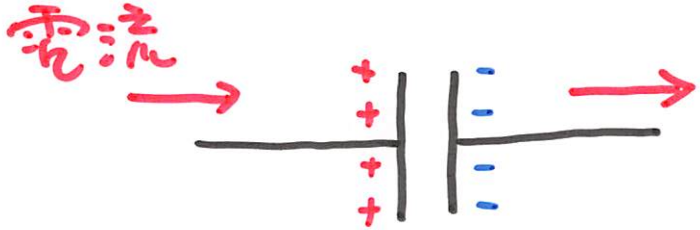


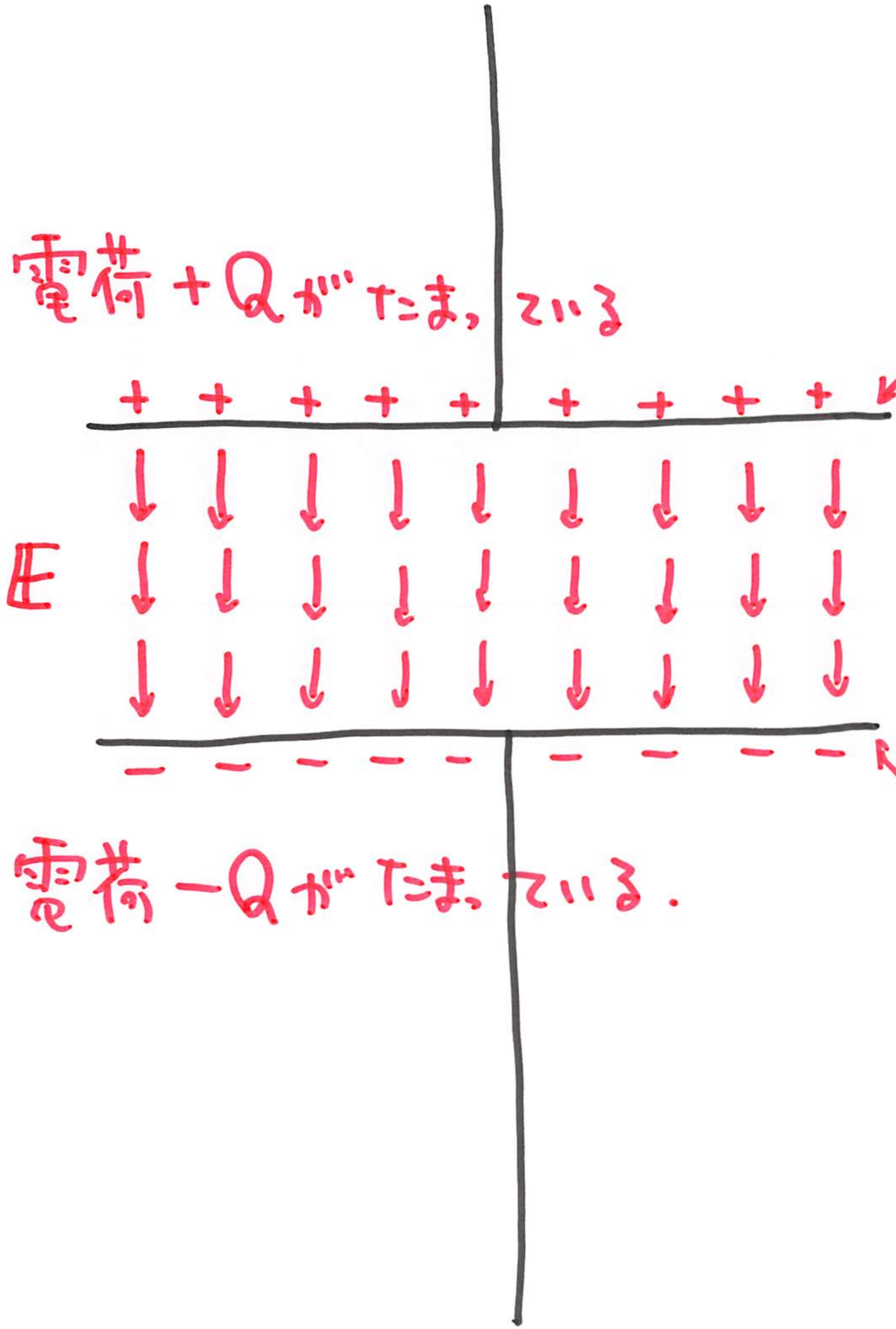
実際のコンデンサ



こんな形をしている.

電気回路図





正極の電位 ϕ_A

正極から負極に向かう電場ができる.

負極の電位 ϕ_B

$$\phi_A > \phi_B$$

電位差 $\Delta\phi = \phi_A - \phi_B$

電荷Q $\xrightarrow{\text{比例}}$ 電場E $\xrightarrow{\text{比例}}$ 電位差$\Delta\phi$

この比例関係を $Q = C \cdot \Delta\phi$ と書く.

C：電気容量・静電容量
electric capacity
という.

$$C = \frac{Q}{\Delta\phi}$$

電気容量の単位は $\mathrm{F} = \mathrm{C} \cdot \mathrm{V}^{-1}$

ファラド　　クーロン毎ボルト

電気容量を表すCは

イタリックフォント C　斜め

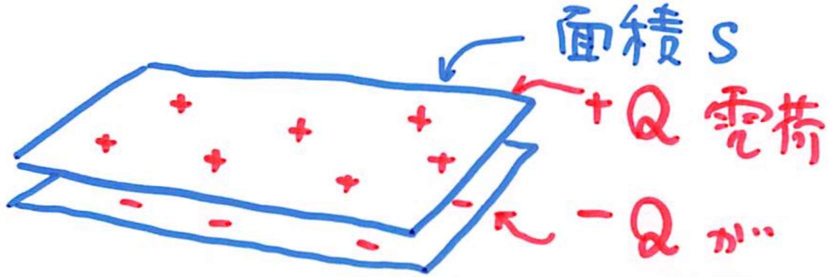
電荷の単位としてのクーロンのCは

ローマンフォント
立体フォント C　まっすぐ

導体板コンデンサ

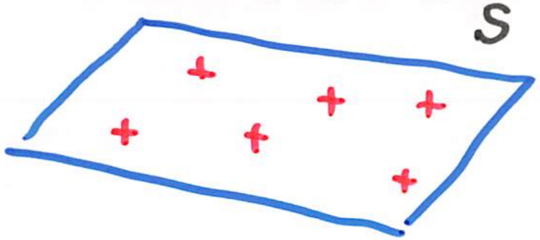
面積 S の2枚の金属板を わずかな 隙間(すきま) l をあけて平行に配置したもの。

これの電気容量 C を求めよう。



無限に広い平面電荷。

電荷面密度 $\sigma = \dfrac{Q}{S}$

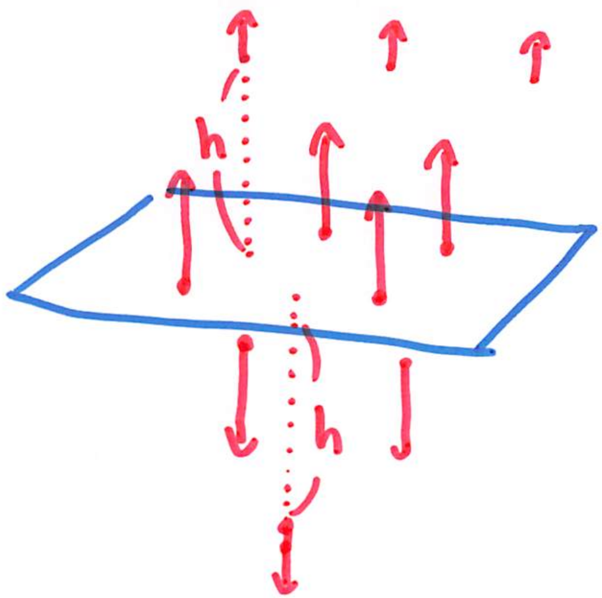


対称性から、

電場の向きは平面に垂直で

電場の大きさは平面からのきょり h

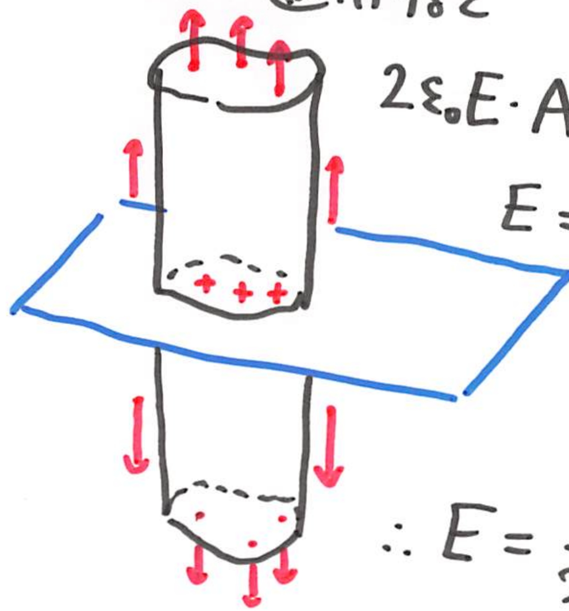
だけの関数



高さ h、深さ h、底面積 A

の柱状領域 V にガウスの

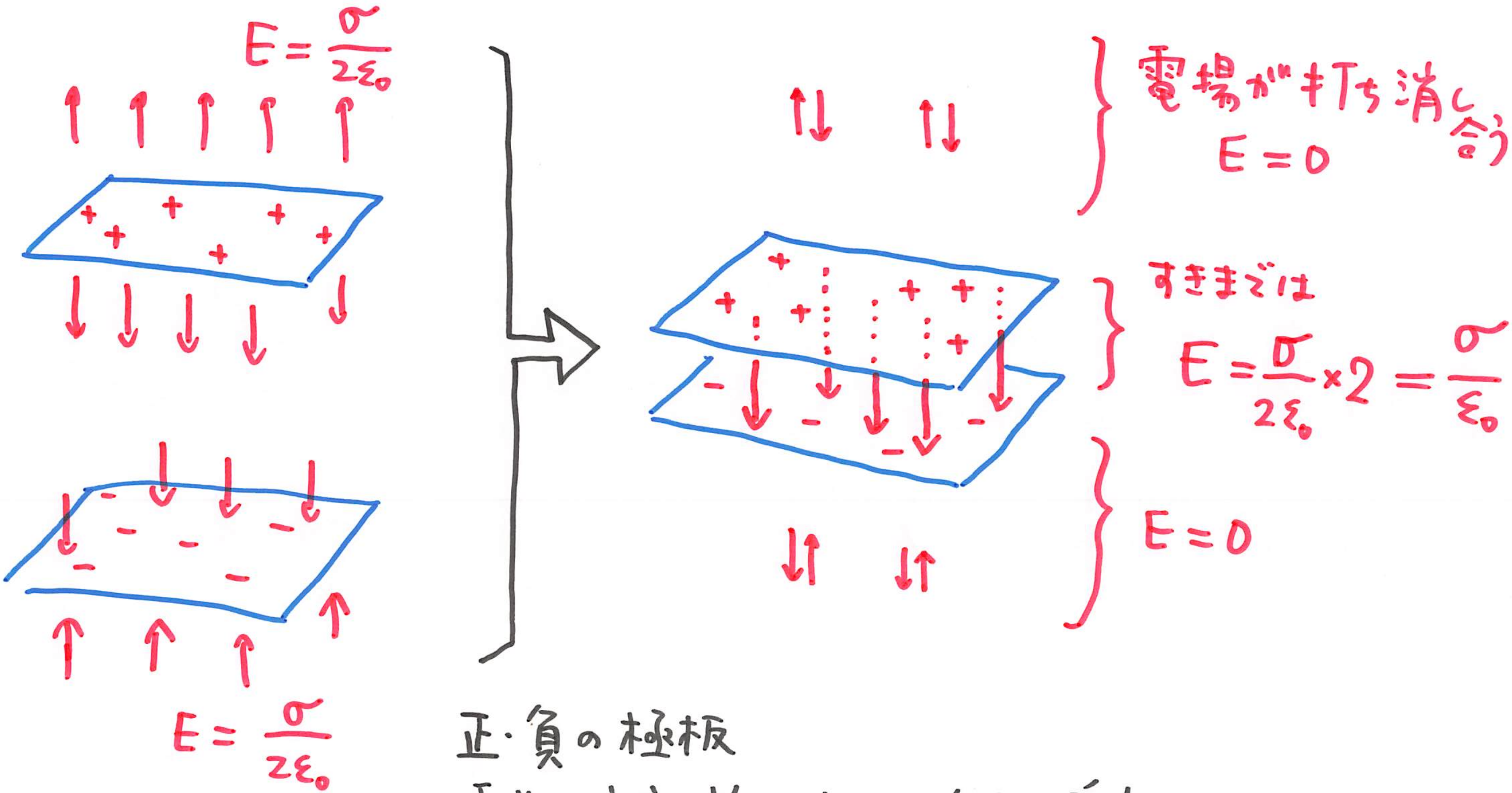
法則を適用すると



$$2\varepsilon_0 E \cdot A = \sigma \cdot A$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$



正・負の極板

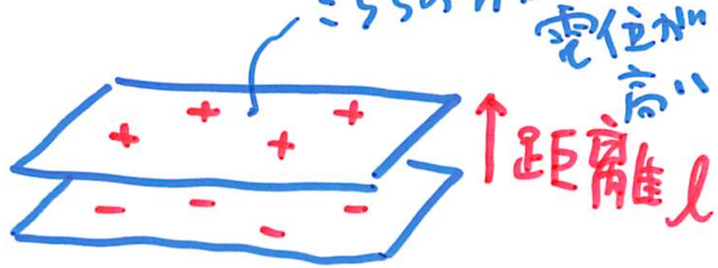
電荷面密度の等しい板を近づけて重ねると..

2枚の極板の間だけゼロでない電場ができる.

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

(電位差) = (電場) × (距離) なので

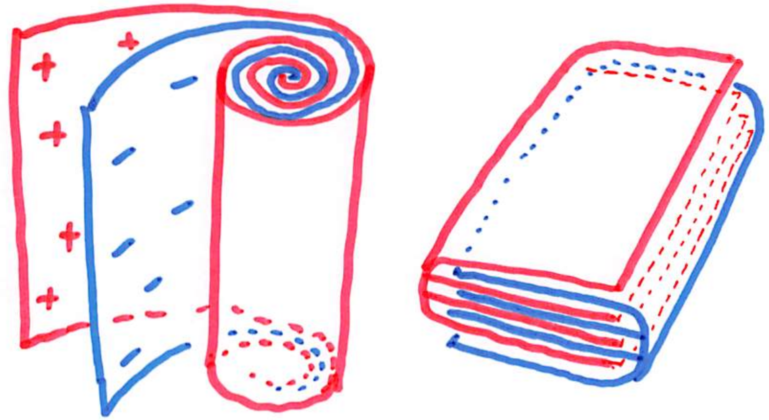
$$\Delta\phi = E \times \ell = \frac{Q\ell}{\varepsilon_0 S}$$



∴ $$Q = \frac{\varepsilon_0 S}{\ell} \cdot \Delta\phi$$

$Q = C\Delta\phi$ が電気容量 C の定義式なので

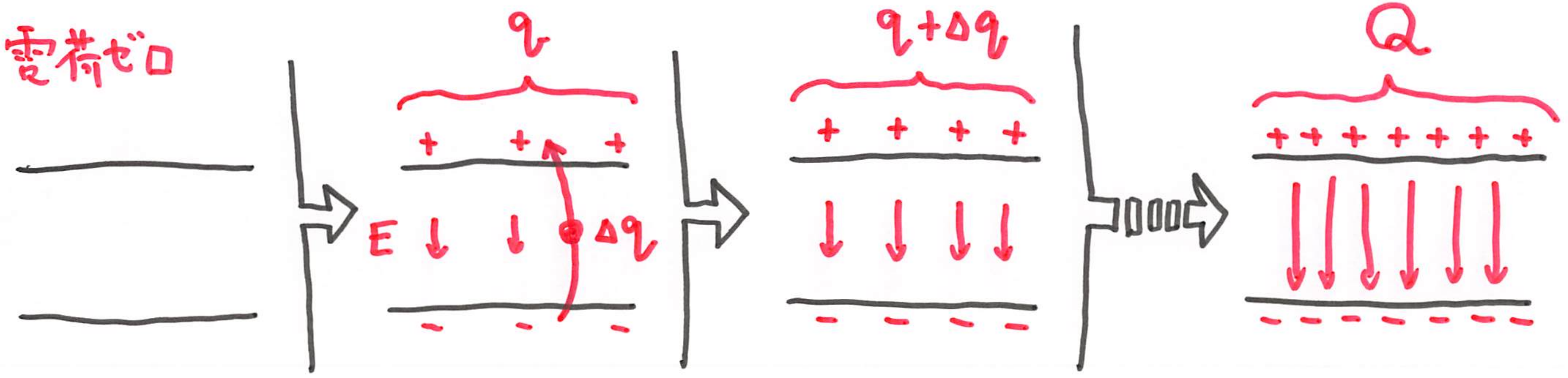
$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{\ell}}$$



電気容量 C は極板の面積 S に比例し、
極板の間隔 ℓ に反比例する。

容量の大きなコンデンサを作るためには、S を大きく、ℓ を小さくする。

コンデンサーを充電させる仕事＝電荷を移動させるのに要する仕事



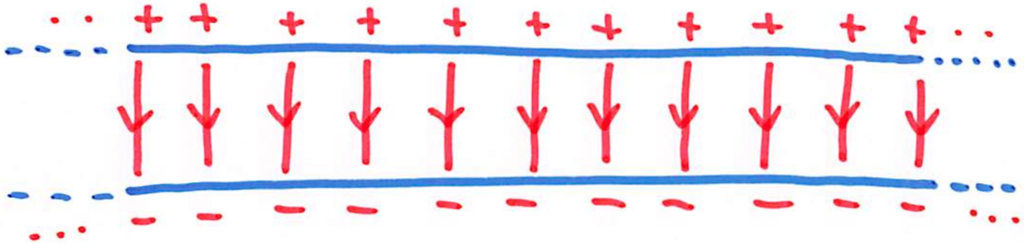
電位差 $\phi = \frac{q}{C}$

電場に逆らって微小電荷 Δq を運ぶのに要する仕事 $\Delta W = \phi \cdot \Delta q = \frac{1}{C} q \Delta q$

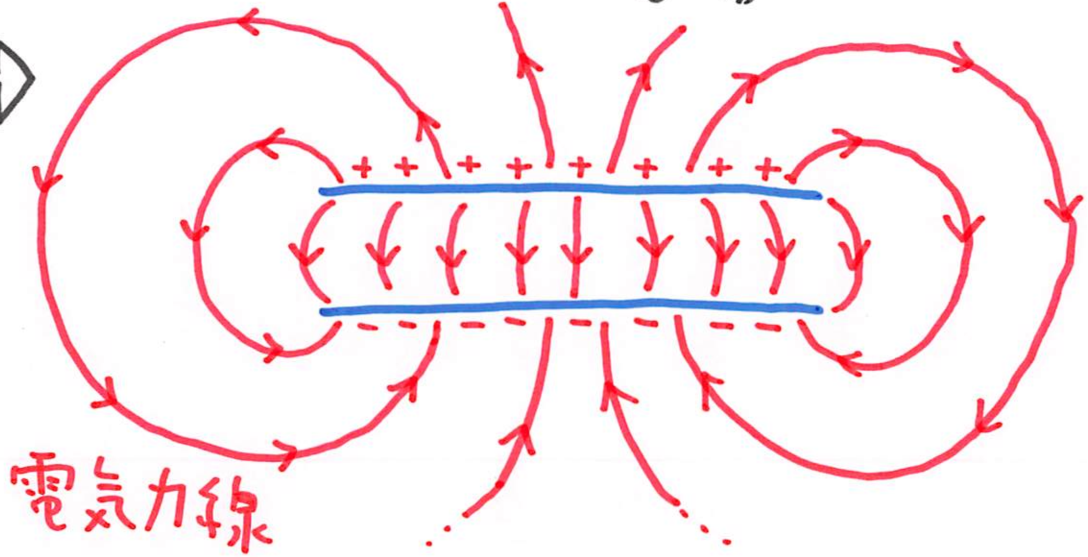
電荷が 0 から Q になるまでにする全仕事

$$W = \int_0^Q \frac{1}{C} q\,dq = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{2} Q^2 = \frac{1}{2C} Q^2 .$$

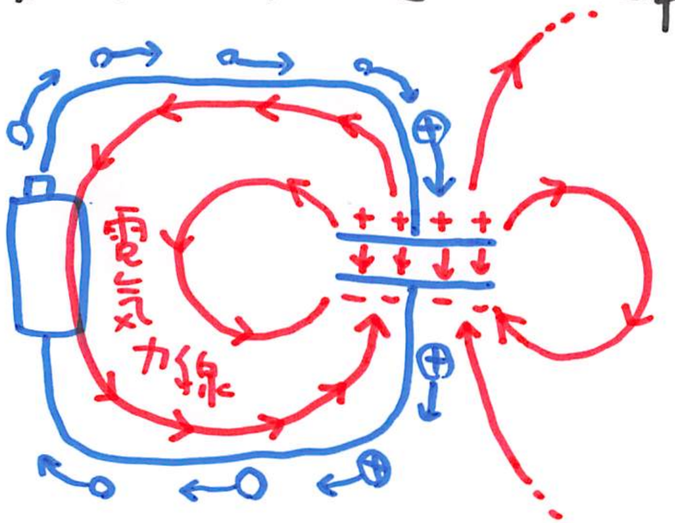
理想的な無限大サイズのコンデンサ
電場は導体板ではさまれた所だけノンゼロ



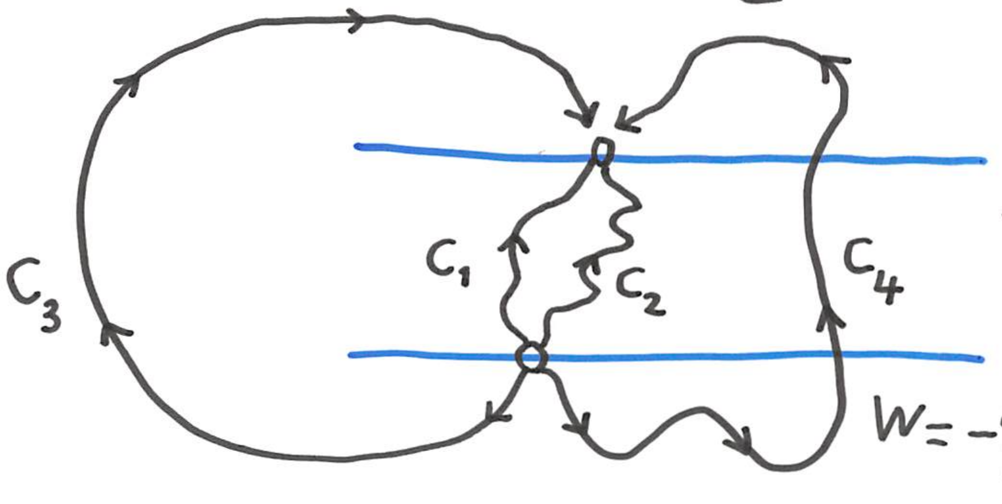
実際の有限サイズのコンデンサでは
導体板の外でも電場はノンゼロ.



コンデンサの外を回って電荷を運ぶ場合も
電場の力に逆らって運ぶので仕事が必要.



しかも静電場は保存力場なので
どういう経路で電荷を運んでも仕事は等しい.

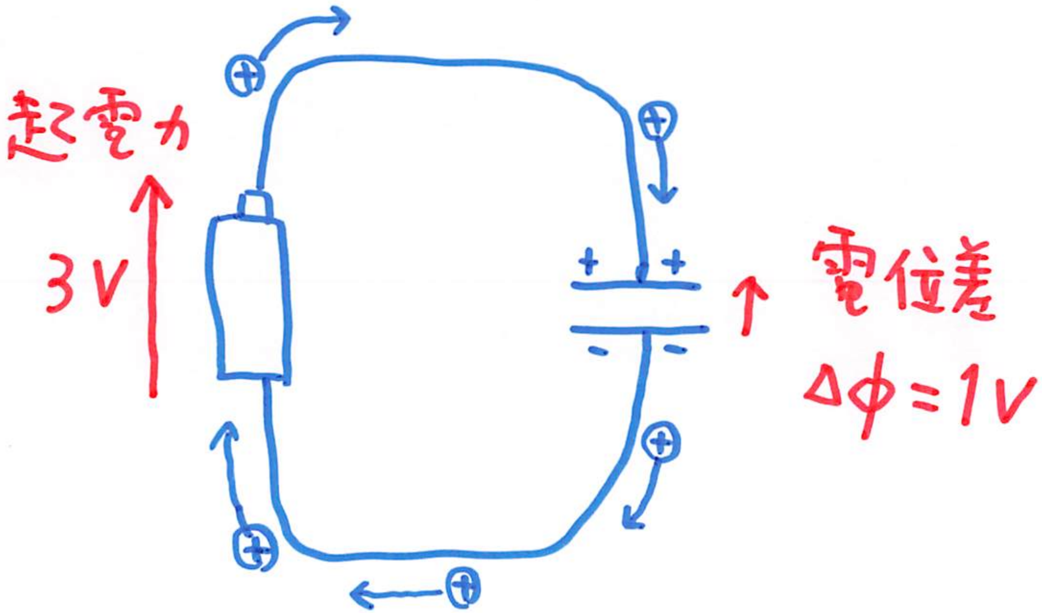


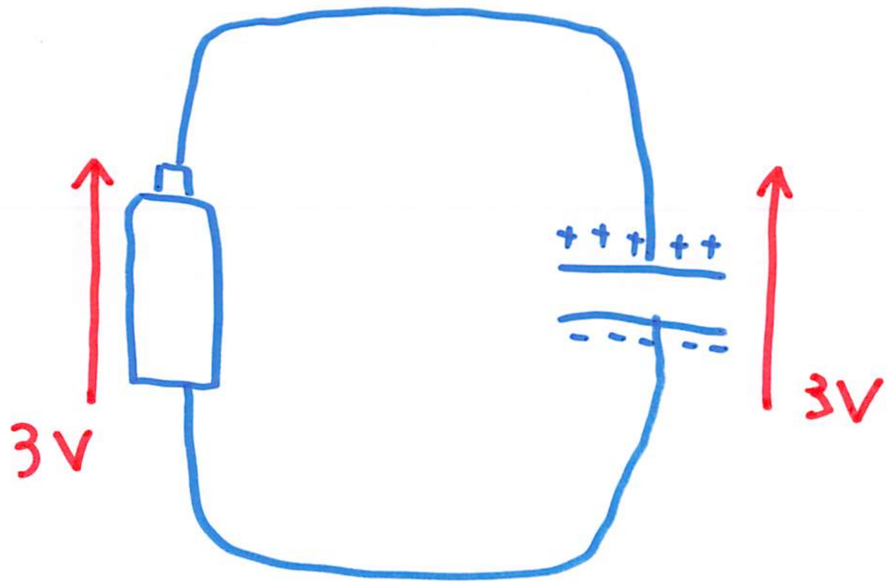
電荷qを運ぶ仕事

$$W=-q\int_{C_i}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}$$

外部電源の起電力(電位差)と
コンデンサの電位差がつりあうと
これ以上充電されなくなる.

充電中.



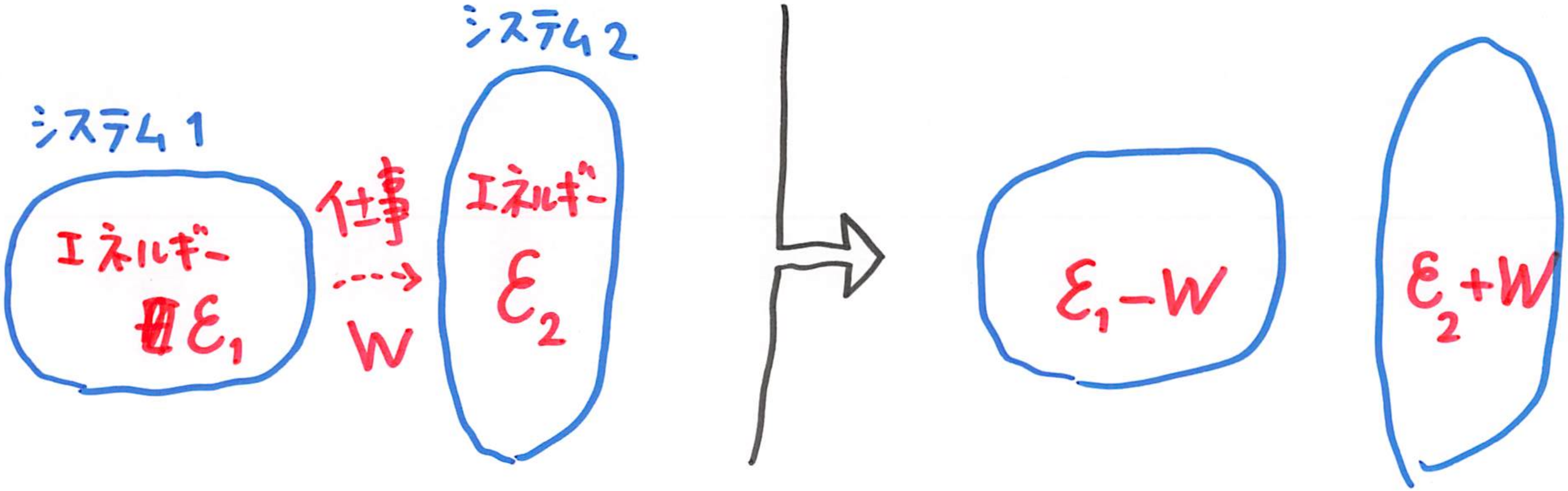


電流止まる.

仕事というのはエネルギーの受け渡しである.

仕事をする ＝ エネルギーを与える. 自分の手持ちのエネルギーは減る

仕事をされる＝エネルギーをもらう. 〃 は増える.



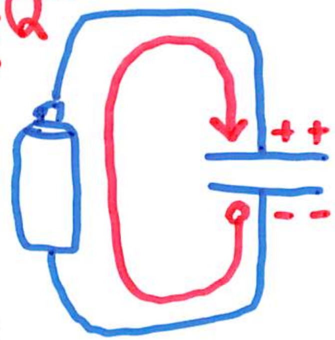
コンデンサーの充電の場合,

仕事をしたのは, 外からつなげた電池.

仕事をされたのは コンデンサ.

コンデンサのどこにエネルギーはたまっているのか?

電池がした仕事 $W = \frac{1}{2C}Q^2$



電子は運動量($p=mv$)と運動エネルギー($K=\frac{1}{2}mv^2$)を持つが、
位置エネルギーというものを持つことができない。

電子そのものには「エネルギーをためておくポケット」
のようなものはない。

「運ばれた電荷が、運ばれるときにもらった仕事を蓄えている」
というイメージは間違っている。

ではエネルギーは誰が(何が)持っているのか？

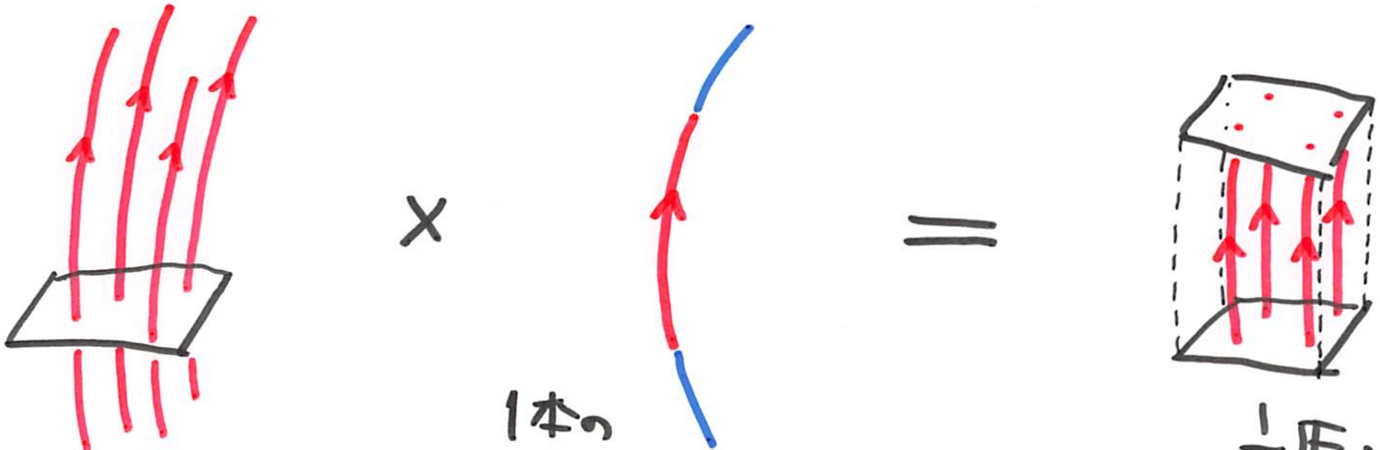
答え．エネルギーは電場が蓄えている．

電場$\mathbb{E}$（電束密度$\mathbb{D}=\varepsilon_0\mathbb{E}$）がある場所には，

単位体積あたり

$$u=\frac{1}{2}\varepsilon_0\mathbb{E}\cdot\mathbb{E}=\frac{1}{2}\mathbb{E}\cdot\mathbb{D}$$

のエネルギーが蓄えられている．



電束密度$\mathbb{D}$は単位面積あたりの電気力線の本数を表す．

1本の電気力線は単位長さあたり$\frac{1}{2}\mathbb{E}$のエネルギーを持つ．

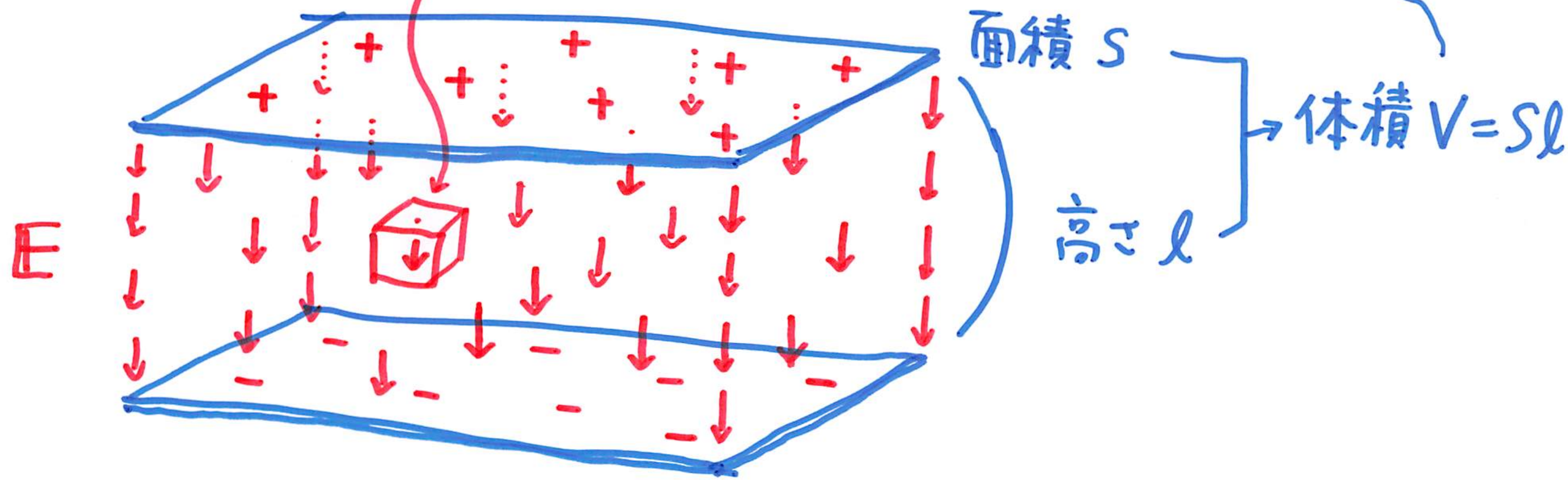
$\frac{1}{2}\mathbb{E}\cdot\mathbb{D}$は単位体積あたりのエネルギー．

導体板コンデンサの場合,

・充電に要した仕事 $W=\frac{1}{2C}Q^2=\frac{1}{2}\frac{l}{\varepsilon_0 S}Q^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0 S l\cdot\left(\frac{Q}{\varepsilon_0 S}\right)^2$

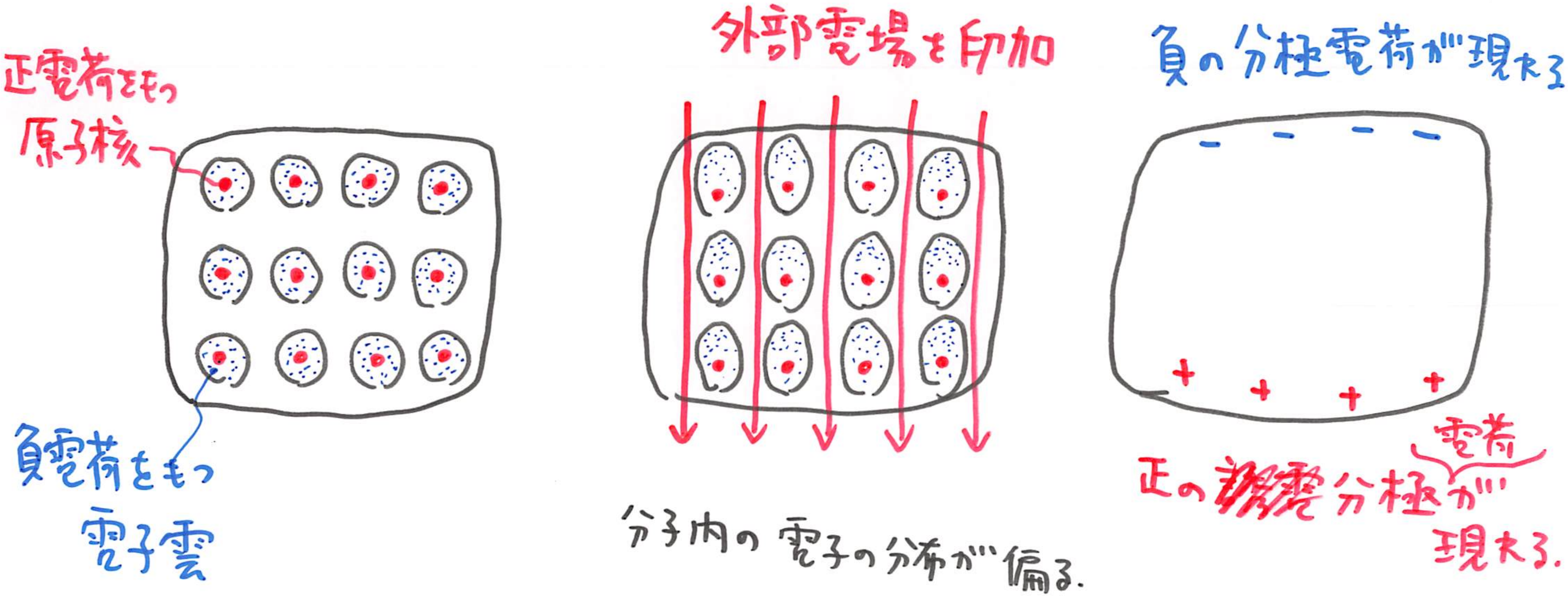
・電場にたまっているエネルギー $U=\underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}_{\text{単位体積あたりのエネルギ}}\times\underbrace{Sl}_{\text{コンデンサの電場がある領域の体積}}=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{Q}{\varepsilon_0 S}\right)^2\times Sl$

一致!!

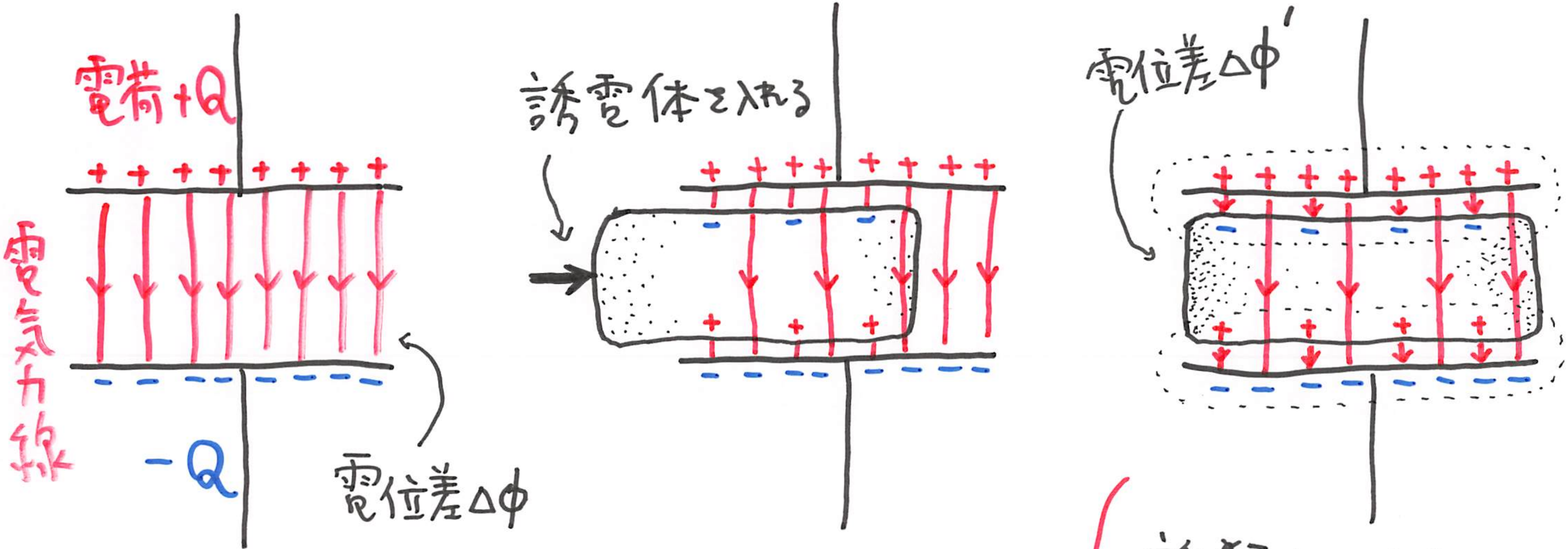


誘電体

電場を印加されると分子内の電子分布が偏り、
物質の一端がプラス、他端がマイナスの電荷を帯びる物質。
それ自体は絶縁体（電流を通しにくい）であることが多い。
プラスチック・セラミックス・油・液晶など。



誘電体をコンデンサに挿入すると何が起こるか？



$$Q = C \cdot \Delta\phi$$

で電気容量は定義される.

誘電体が
誘電分極を起こす.

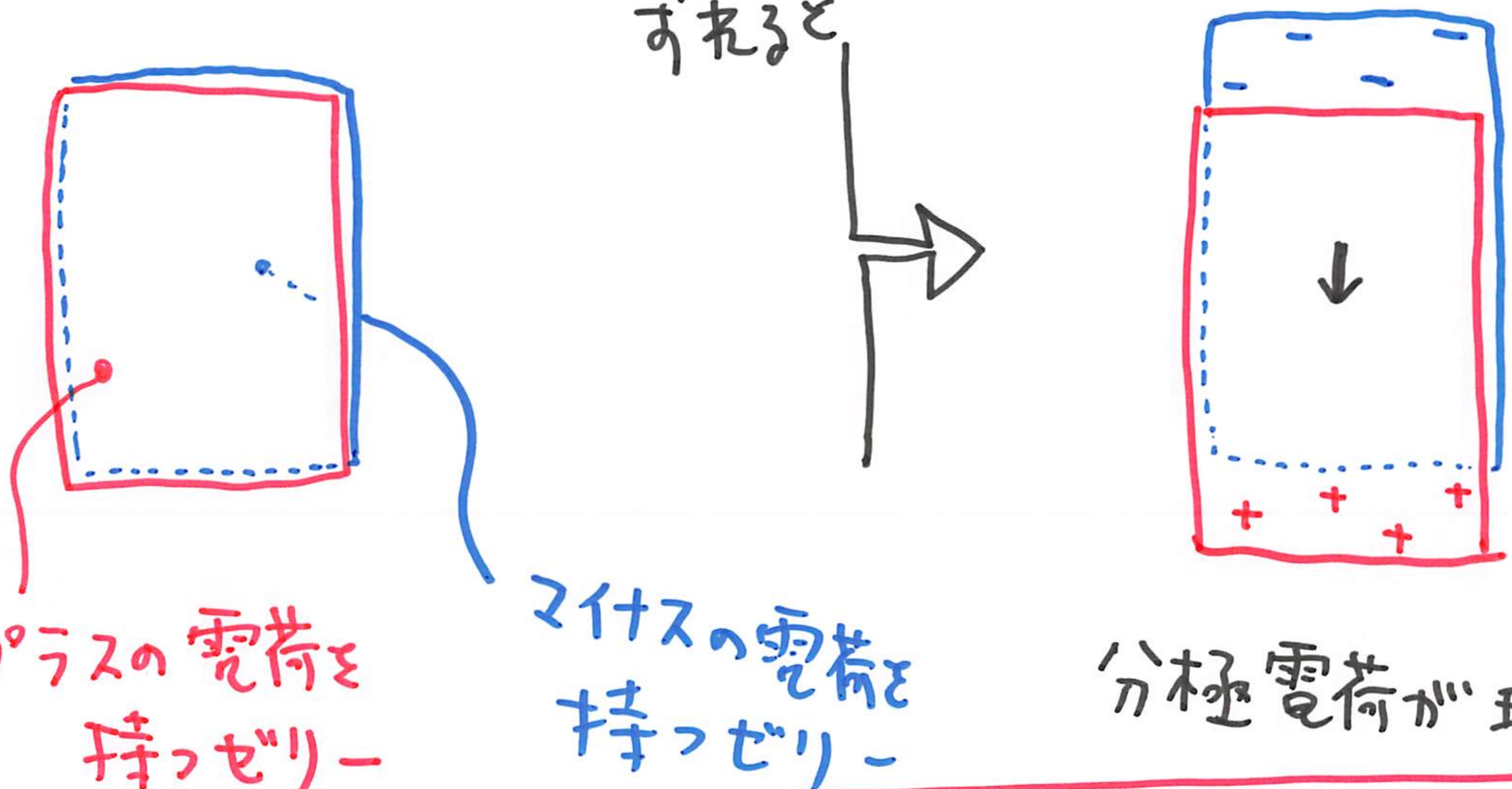
誘電体の内部で
電場が弱くなるため、
電位差が小さくなる.

$$\Delta\phi > \Delta\phi'$$

$$Q = C \cdot \Delta\phi = C' \Delta\phi'$$

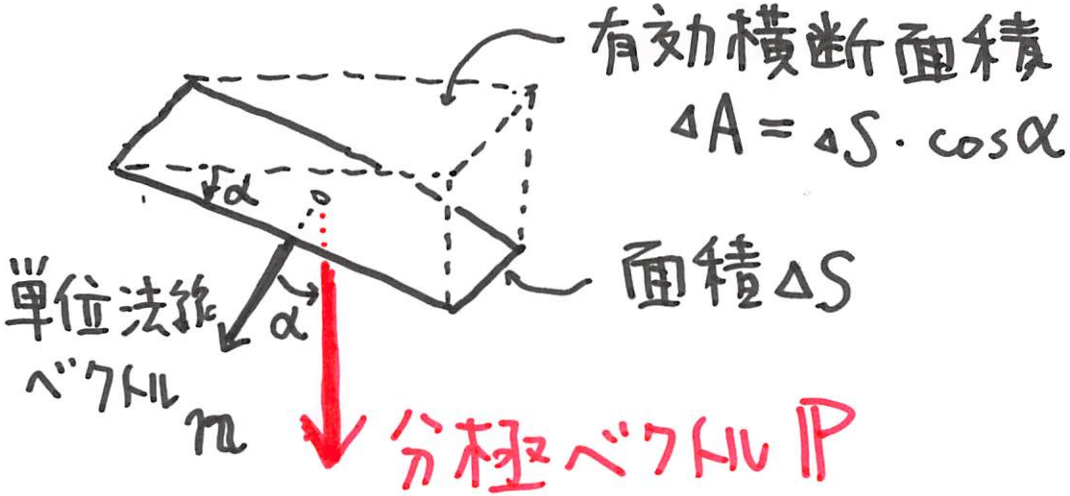
小さな電位差で
同量の電荷をためれる
ということは、容量が大きくなったということ. $C < C'$

分極場 (polarization vector field) $\mathbb{P}(\mathbb{r})$



ずれぐあいを表すベクトル $\mathbb{P}$ が分極場.

分極電荷が現れる.



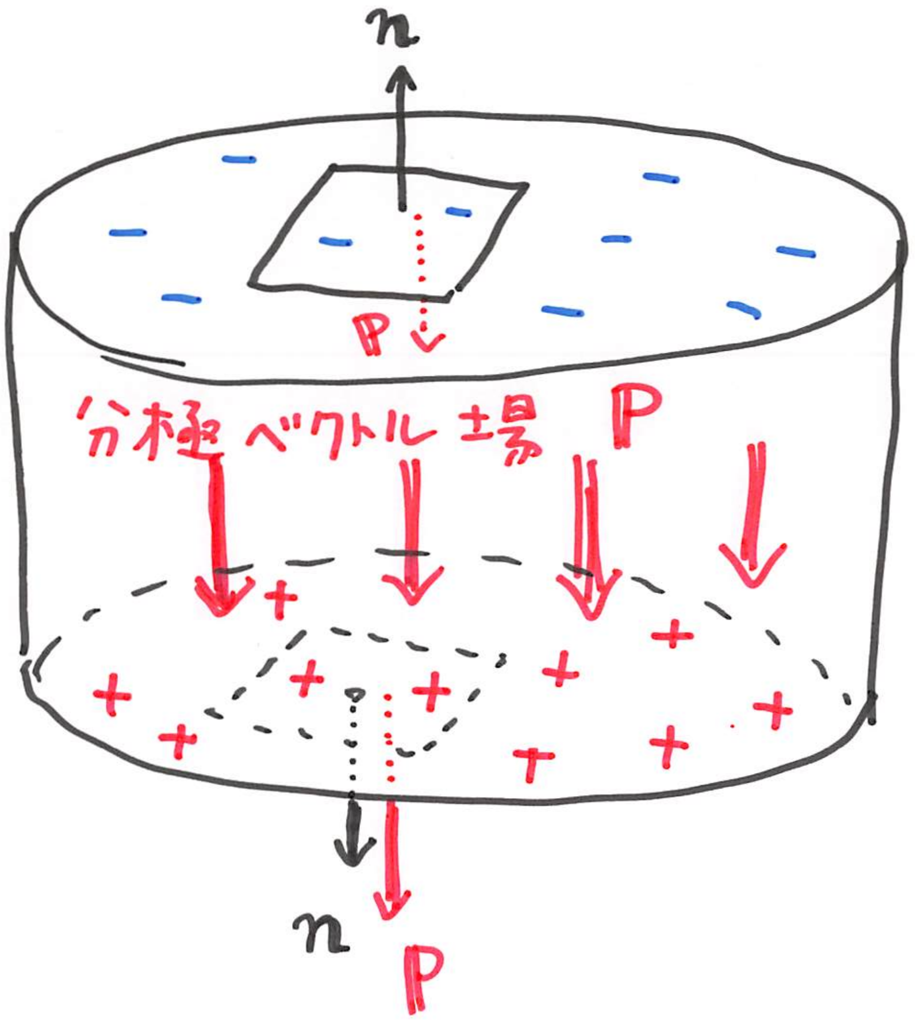
ΔSを通り抜けた正電荷の量

$$\Delta Q = P \cdot \Delta A$$
$$= P\cos\alpha \cdot \Delta S$$
$$= \mathbb{P} \cdot \mathbb{n}\, \Delta S$$

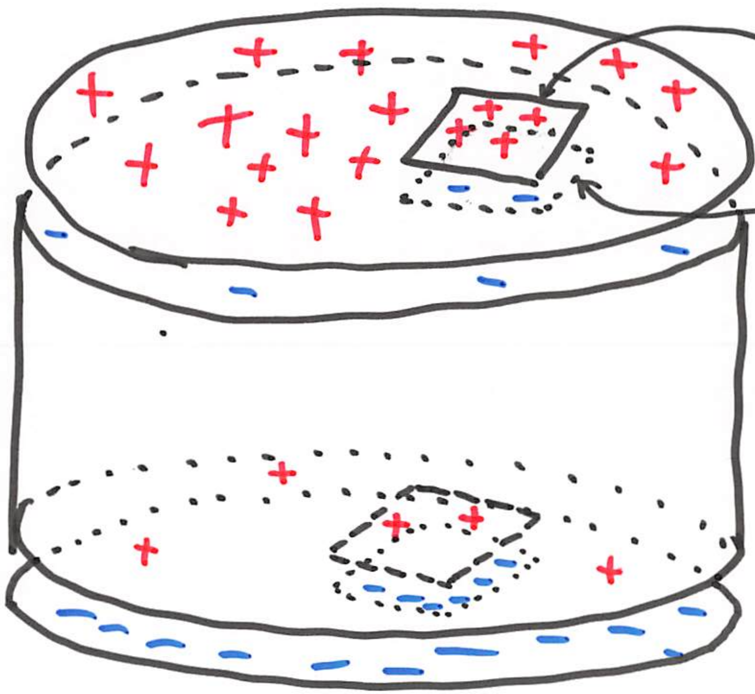
$\mathbb{P}$の単位は $C \cdot m^{-2}$

分極場$\mathbb{P}$があると、法線ベクトル$\boldsymbol{n}$の物質表面に

面電荷密度 $\sigma_p = \mathbb{P}\cdot\boldsymbol{n}$ の分極電荷が現れる。



コンデンサの極板にもともとあった面電荷 $\sigma = \frac{Q}{S}$ が、
誘電体の分極電荷 $\sigma_p = P$ の分だけ打ち消される.



もともと極板に σ がある

誘電体の表面に σ_p がある.

正味の電荷面密度は $\sigma' = \sigma - \sigma_p$

ガウスの法則により、
誘電体内部の電場の強さは

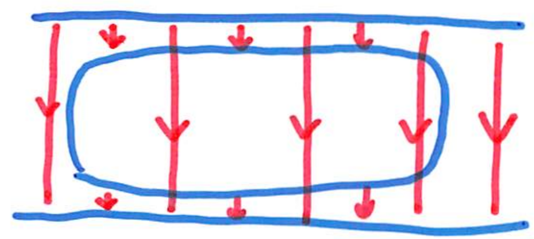
$$E = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma - \sigma_p}{\varepsilon_0} = \frac{D - P}{\varepsilon_0}$$

ベクトルで書くと、

$$\boxed{\varepsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{D} - \mathbf{P}}$$

$$\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \mathbf{D}$$

分極場 $\mathbf{P}$ のせいで、
電束 $\mathbf{D}$ の一部が吸収されて
$\mathbf{E}$ が弱くなる. ことを表している.



線形応答物質

近似的経験則 $\mathbb{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbb{E}$

χ_e：物質の電気感受率（無次元）

電束密度の新たな定義式 $\mathbb{D} := \varepsilon_0 \mathbb{E} + \mathbb{P}$

$$= \varepsilon_0 \mathbb{E} + \chi_e \varepsilon_0 \mathbb{E}$$

$$= (1 + \chi_e) \varepsilon_0 \mathbb{E}$$

$$= \varepsilon \mathbb{E}$$

$\varepsilon = (1 + \chi_e) \varepsilon_0$：物質の誘電率.