

形状最適化法の思い付きとその理解を巡って

畔上 秀幸

名古屋大学 情報学研究科 退職記念講義

2022年3月12日（土）

1. 形状最適化法の思い付き
2. その理解を巡って

1. 形状最適化法の思い付き

1. 形状最適化法の思い付き

1.1 計算力学との出会い

1.2 数学（関数解析）との出会い

1.3 博士課程

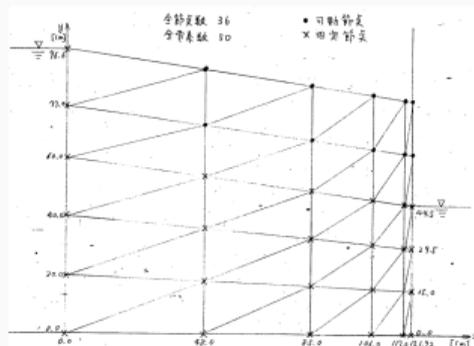
1.4 形状最適化との出会い（成長ひずみ法の提案）

1.5 在外研究（力法の着想）

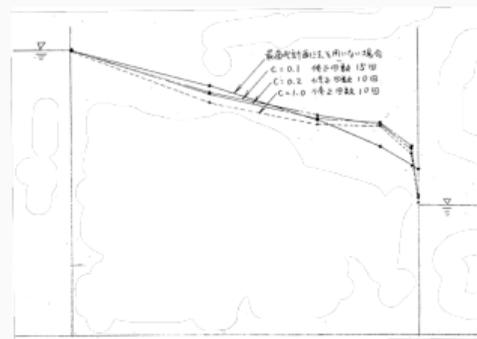
- 1956年 長野県 山ノ内町に生れる。
- 1977年 長野工業高等専門学校 機械工学科 卒業
- 1979年 山梨大学 工学部 機械工学科 卒業
- **1979年 山梨大学 教育学部 聴講生**
- 1985年 東京大学 工学系研究科 博士課程（機械工学専攻） 修了
- 1985年 東京大学 生産技術研究所 助手
- 1986年 豊橋技術科学大学 助手，講師，助教授
(**1991年11月から10か月間 ミシガン大学 文部省在外研究員**)
- 2003年 名古屋大学 教授 現在に至る。

1.1 計算力学との出会い

- 長野工業高等専門学校 風間悦夫研究室
卒業論文「自由水面をともなう浸透流の解析法」



(a) 有限要素モデル



(b) 最適化後

図 1: Darcy 流れ場と非 Darcy 流れ場 (Forchheimer 則 : 水で飽和した多孔質体中の流れ場) の自由水面決定問題

Japan J. Indust. Appl. Math. (2011) 28:327–350
DOI 10.1007/s13160-011-0044-y

ORIGINAL PAPER

Area 2

Weak formulation of Hadamard variation applied to the filtration problem

Takashi Suzuki · Takuya Tsuchiya

filtration problem. For the iterative scheme, we adopt the **traction method** proposed by Azegami (see [4, 12] and the references therein) for optimal shape design. We have found that the presented method shows a good performance for numerical computation of the free boundary problem.

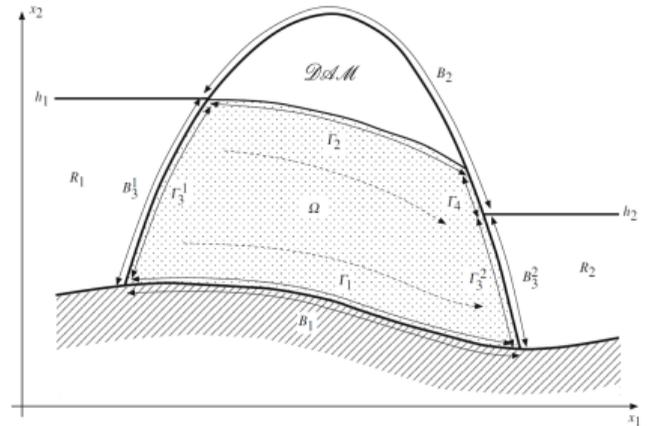


Fig. 1 The configuration of the dam

☒ 2: Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics [1]



図 3: ワンダーフォーゲル部



図 4: 美術部

1.2 数学（関数解析）との出会い

- 編入生の有志で高木貞治著「解析概論」を輪読
- 山梨大学 教育学部 聴講生
鈴木俊夫先生の授業「応用数学特論 (Hilbert 空間)」に参加
熱方程式が例題になってしまう。



これまで学んできた連続体の問題は関数空間上の点を求めることである。

1.3 博士課程

- 東京大学生産技術研究所 渡邊勝彦研究室
「変分法」 Israel Moiseevich Gelfand and Sergei Vasilyevich Fomin, 1970 [2]
「固体の力学/理論」 Yuan-Cheng Fung, 1970 [3]
学位論文
「延性き裂の安定成長を支配する力学量と安定性評価に関する研究」
- き裂エネルギー密度 (J 積分の物理的解釈) を用いてき裂の状態を評価



のちに、大塚厚二先生（広島国際学院大学）との出会いで、 J 積分は特異点の形状微分であることを知る。

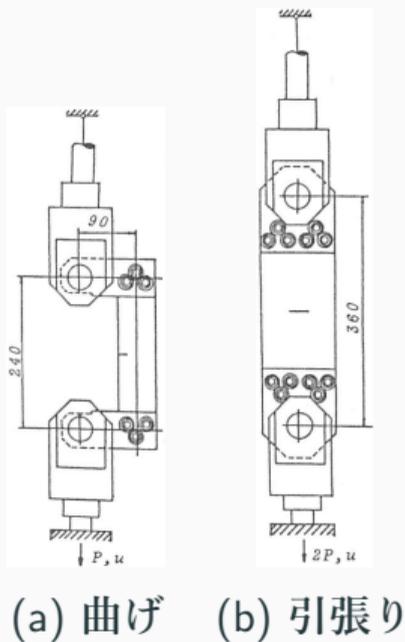


図 5: 実験装置 [4]

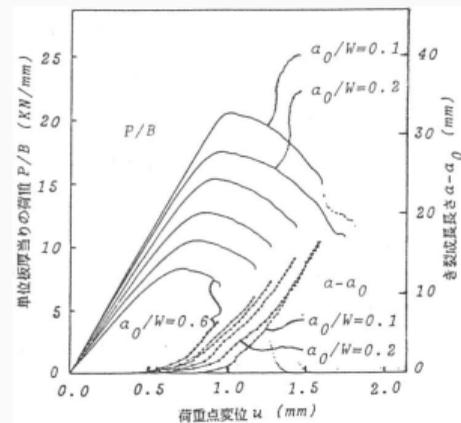
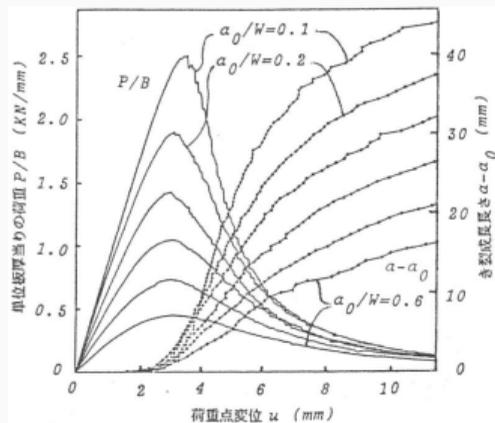
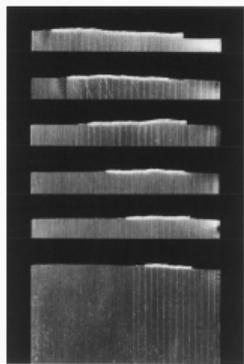
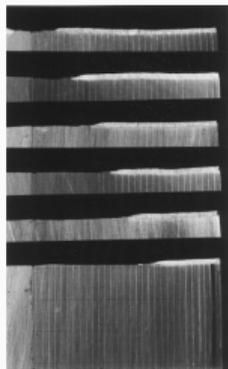


図 6: 荷重-き裂成長長さ-変位 [4]

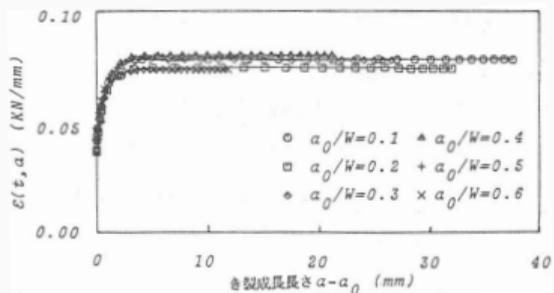


(a) 曲げ

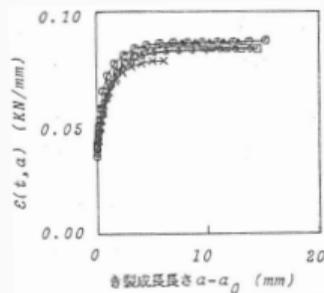


(b) 引張り

図 7: 破面 [4]



(a) 曲げ



(b) 引張り

図 8: き裂エネルギー密度 [4]

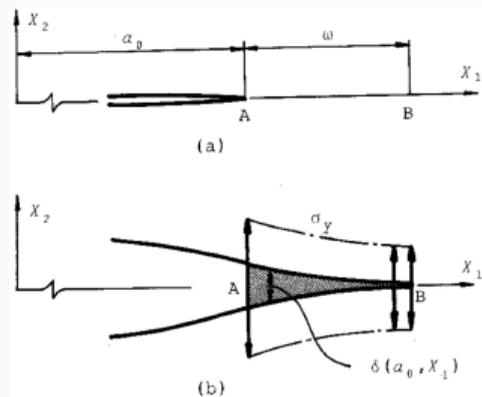


図 9: Dugdale モデル

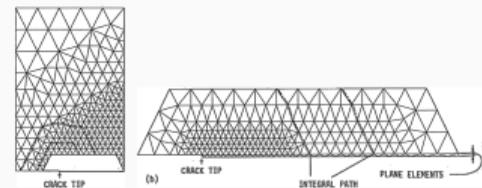


図 10: FEM モデル [5]

1.4 形状最適化との出会い

- 豊橋技術科学大学の助手仲間で勉強会を開催
Yuan-Cheng Fung, 瀬口 靖幸「生体システムにおける力学」
日本機械学会誌, 1988 [6]
- 成長ひずみ法の提案
畔上「成長の構成則を用いた形状最適化手法の提案（静的弾性体の場合）」日本機械学会論文集, 1988 [7]

290



生体システムにおける力学

Mechanics Applied to Living Systems

Yuan-Cheng Fung*, 瀬口靖幸**
Yasuyuki SEGUCHI

Key Words: Mechanics, Biomechanics, Constitutive Equation, Nonlinearity, Living System, Growth, Atrophy, Residual Stress

1. ま え が き

2. バイオエンジニアリングにおけるニ
ーズに対応するための力学の発展

現代のエンジニアリングの発展は力学の発展と

図 11: 日本機械学会誌, 1988 [6]

1. まえがき

現代のエンジニアリングの発展は力学の発展と切離して考えられない。... 力学はバイオエンジニアリングのしっかりした基礎がための手助けをするであろうし、他方ではバイオエンジニアリングは力学の新たな発展のきっかけとなるであろう。...

3. 力学は自然を理解する助けとなる

生理学者はこれまで常に、システム論的観点に重きをおいてきた。彼らは解析よりもむしろ総合を強調する。力学は通常解析的である傾向がある。... 生理学者はシステム解析の大きい力を利用すべきであるし、エンジニアは複雑なシステムを取扱うことのできる一般的方法論をもたらす努力をするべきである。... 連続体力学はバイオメカニカルシステムの解析の土台となる。

4. 生命体と非生命体の力学の違い

生命体の材料には他の工学分野のあらゆる材料に見られないある一つのきわだった特性がある。成長と吸収の能力がそれである。... この驚くべき性質は、生命にとっては根本的であるが、力学を混乱させるものでもある。... 器官の組織の残留応力をどうして見い出すかを示す新しい原理が見つからないかぎり、器官内の応力分布を決定することはできない。...



図 12: ウサギの胸部動脈の断面形状

Fung は器官の「最適作動」の理論 (Theory of Optimal Operation) を提案した. ...

応力制御によって正常化するというこの制御概念は生物学的にはまだ仮説ではあるが、将来の生物機械システムを設計する技術者にとっては、**実現可能なアイデア**であるように思う。我々は、積極的にこの方向で考えて下さるよう機械技術者にお願いしたい。



材料がどのように振舞えば一様な応力になるか？

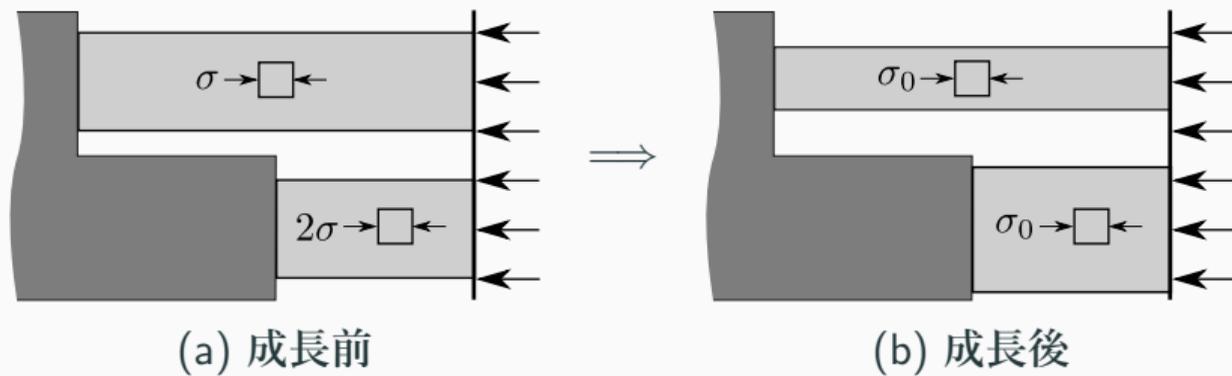


図 13: 長さの異なる 2 本の棒

表記法

変位 $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \in \{2, 3\}$)

線形ひずみ $\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left\{ \nabla \mathbf{u}^\top + (\nabla \mathbf{u}^\top)^\top \right\}$

応力 $\mathbf{S}(\mathbf{u}) = \mathbf{C}\mathbf{E}(\mathbf{u})$

線形弾性問題 (強形式) Find $\mathbf{u} \in U = \{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \mid \mathbf{u} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \Gamma_D \}$ such that $-\nabla^\top \mathbf{S}(\mathbf{u}) = \mathbf{b}^\top$ in Ω and $\mathbf{S}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} = \mathbf{p}_N$ on Γ_N .

(弱形式) $\int_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{p}_N \cdot \mathbf{v} \, d\gamma \quad \forall \mathbf{v} \in U$

全微分 $df(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x}) [d\mathbf{x}] = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^\top} d\mathbf{x} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x}$

偏微分 $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [d\mathbf{x}]$

関数空間の表記法

$W^{k,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ k 階微分まで p 乗可積分な関数 $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ の集合 (**Sobolev 空間**)

$p = 2$ のとき, $W^{0,2}(\Omega; \mathbb{R}^d) = L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$,

$$W^{k,2}(\Omega; \mathbb{R}^d) = H^k(\Omega; \mathbb{R}^d)$$

$p = \infty$ のとき, $W^{0,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^d) = L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d)$

$H^k(\Omega; \mathbb{R}^d)$ 内積が定義される \implies **Hilbert 空間**の性質をもつ

$H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ の内積

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)} = \int_{\Omega} \{ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{u}^T) \cdot (\nabla \mathbf{v}^T) \} dx$$

$L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d)$ 有界かつ可積分な関数の集合

$W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ Lipschitz 連続な関数の集合 ($\approx C^{0,1}(\Omega; \mathbb{R})$)

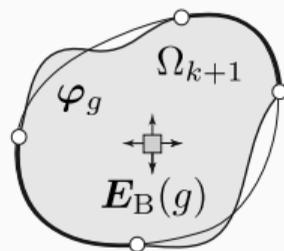
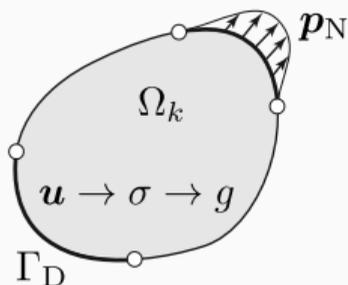
$C^{0,\sigma}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ $\sigma \in (0, 1]$ に対して, Hölder 連続な関数の集合

成長ひずみ法の提案

成長の構成則 (Duhamel-Newmann 則)

$$S(u) = C(E(u) - E_B(g)), \quad E_B(g) = g \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0}$$

成長ひずみ法
$$\int_{\Omega_k} (CE(\varphi_g)) \cdot E(y) dx = - \int_{\Omega_k} (CE_B(g)) \cdot E(y) dx \quad \forall y \in U$$



(a) 線形弾性問題 (b) 成長変形問題

図 14: 成長ひずみ法

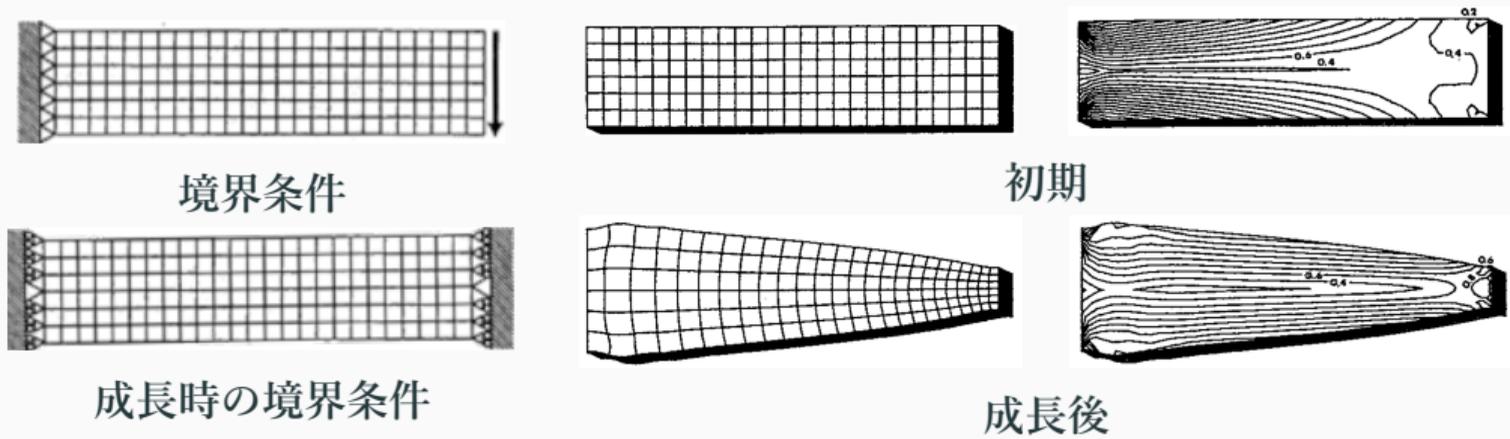
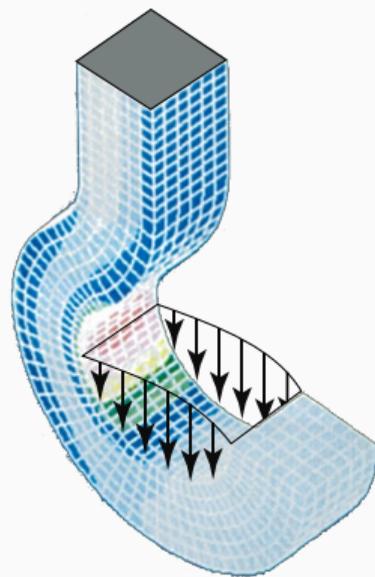
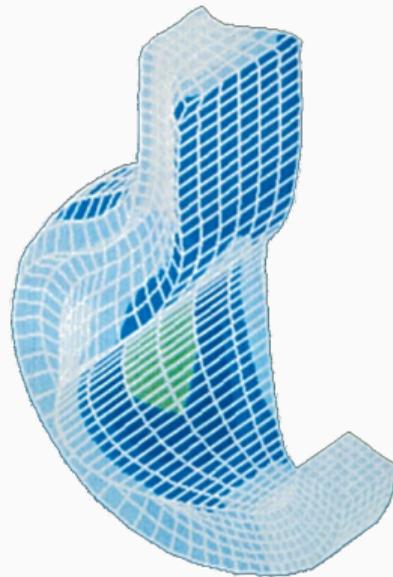


図 15: 日本機械学会論文集, 1988 [7]



(a) 初期, 境界条件



(b) 成長後

図 16: 成長ひずみ法によるフックの形状変化

- H. Azegami (Japan), 1988 [7]
- Myung W. Suh et al. (Michigan U. & Ford, USA), 1989 [8]
Chung M. Suh (GM, Isuzu)
- C. Matteck and S. Burkhardt (Germany), 1990 [9]
H.P. Mlejnek et al., 1990
J. Sauter, 1991

Application of Geometric Strain Method to Shape Optimization of Spring Retainer Redesign

Myung W. Suh*, William J. Anderson* and James P. McDonald**

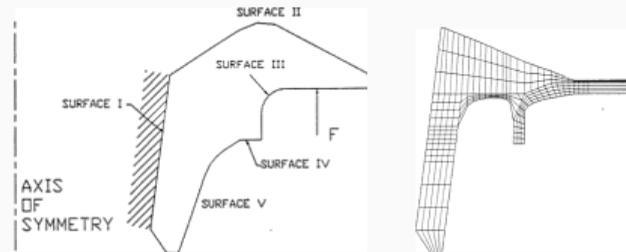
**Department of Aerospace Engineering, The University of Michigan, Ann Arbor, Michigan, USA*

***Ford Motor Company, Dearborn, Michigan, USA*

ABSTRACT

The shape of a spring retainer in the valve train of an engine is redesigned by the geometric strain method which has been developed by Suh and Anderson [1]. The failure criterion (constraint) is fatigue stress. The objective is minimum weight. Fast and stable convergence is shown and several possible designs are obtained.

$$\begin{aligned}\epsilon_{G1}^p(x) &= (\Delta L'_1 - \Delta L_1) / \Delta L_1 \\ &= \left[\frac{\sigma_2(x)}{\sigma_{02}} \quad \frac{\sigma_3(x)}{\sigma_{03}} \quad \frac{\sigma_{01}(x)}{\sigma_1} \right]^{0.5} - 1\end{aligned}$$



✉ **17:** Computer Aided Optimization Design of Structures: Recent advances, edited by C. A. Brebbia and S. Hernandez [8]

C. Mattheck and S. Burkhardt (1990)

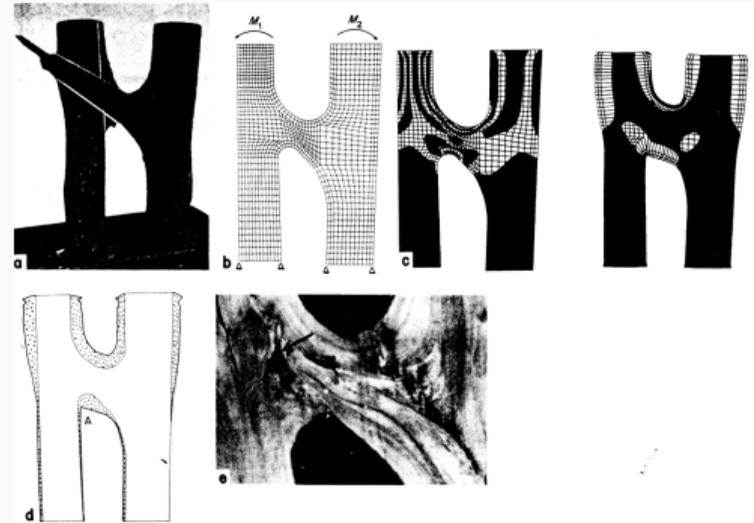
Int J Fatigue 12 No 3 (1990) pp 185–190

A new method of structural shape optimization based on biological growth

C. Mattheck and S. Burkhardt

A new method has been developed which allows the reduction of localized notch stresses in two-dimensional (2D) and three-dimensional (3D) elastic structures in a very effective way, with only a commercial finite-element code (the authors used ABAQUS) required. The method simulates on a computer the mechanism of tree growth copying the self-optimization of living trees which always try to grow into a shape of constant surface stress. The success and efficiency of the method is demonstrated by 2D and 3D examples.

Key words: elastic structures; notches; biological structures; self-optimized shapes; finite-element code



☒ 18: International Journal of Fatigue, 1990 [9]

うまくいかない例

楕円になるはずが...

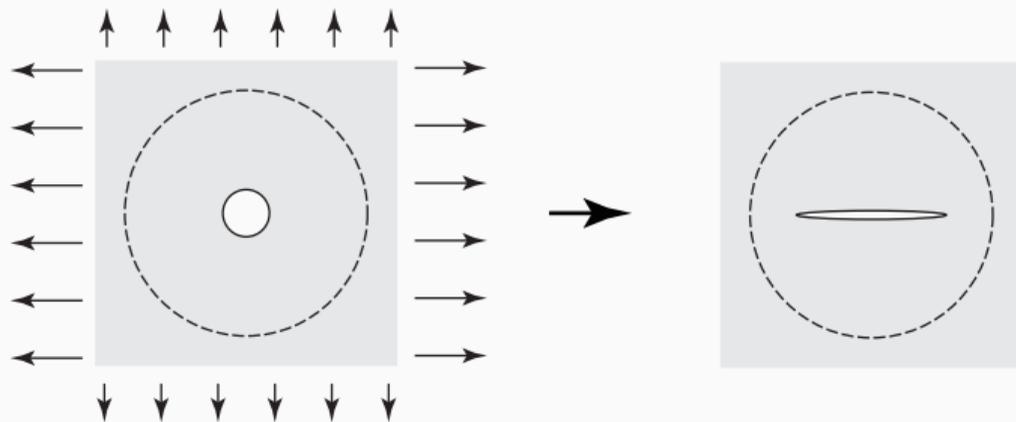


図 19: 孔の空いた無限平板の形状最適化

1.5 在外研究（方法の着想）

菊池 昇 先生からのアドバイス

- NATO Advanced Study Institute (Iowa City, 1980) の会議録を見よ。
Nick V. Banichuk [10], **Jean Cea** [11, 12], Jean-Paul Zolésio [13, 14] に没頭

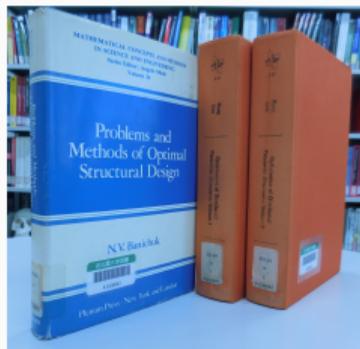


図 20: ミシガン大学で出会った書籍 [10] と会議録

Jean Cea (1981)

NUMERICAL METHODS OF SHAPE OPTIMAL DESIGN

Jean Cea

Département de Mathématiques, Université de Nice
06034 Nice Cedex, France

ABSTRACT

This paper presents numerical methods for shape optimal design and applications to problems of engineering and applied science. Methods presented include gradient methods, fixed point methods, Green function methods, and duality methods. It is shown that derivative formulas derived in companion papers can be used directly to obtain expressions needed to implement these optimization methods for solution of concrete problems of shape optimal design.

1. THE (CONTINUOUS) GRADIENT METHOD

1.1 The Hilbertian Case

Let V be a real Hilbert space and $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ the cost function. One seeks $u^* \in V$ such that

$$J(u^*) \leq J(v), \text{ for all } v \in V$$

Suppose first that there are no constraints. The idea is to approach u^* by a one parameter family $u(t)$, $t \geq 0$, where $u(t)$ is the solution of the ordinary differential equation

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}(t) &= v(u(t), t) \\ u(0) &= u_0 \text{ given} \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

...

In order to find the good choice for v , put

$$j(t) = J(u(t))$$

and take the derivative we get

$$\dot{j}(t) = \left\langle v_u J(u(t)), \frac{du(t)}{dt} \right\rangle = \langle G_t, v_t \rangle_V \quad (1.2)$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ is the scalar product in V , v_t is the velocity at the time t ($v_t(u) = v(y, t)$), and G_t is the gradient of J . Let $B(t)$ be a uniformly bounded and coercive operator defined on V . One can introduce it with a family of bilinear forms $b(t, \phi, \psi)$ that satisfy

$$b(t, \phi, \phi) \geq \alpha \|\phi\|^2, \text{ for all } \phi \in V, \alpha > 0$$

$$|b(t, \phi, \psi)| \leq M \|\phi\| \cdot \|\psi\|, \text{ for all } \phi \text{ and } \psi \in V, M > 0$$

The form b is related to the operator B by the condition

$$\langle B(t)\phi, \psi \rangle_V = b(t, \phi, \psi), \text{ for all } \phi \text{ and } \psi \in V$$

If one chooses $v_t \in V$ as the solution of

$$b(t, v_t, \psi) = - \langle G_t, \psi \rangle_V, \text{ for all } \psi \in V \quad (1.3)$$

(or v_t is the solution of $B(t)v_t = -G_t$), one gets from Eq. 1.3, with $\psi = v_t$ and Eq. 1.2,

$$\dot{j}(t) = \langle G_t, v_t \rangle_V = - b(t, v_t, v_t) \leq -\alpha \|v_t\|^2$$

Hence with this choice of v_t , j decreases. Furthermore,

☒ 21: Proceedings of the Advanced Study Institute Programme, Optimization of Distributed Parameter Structures, edited by Edward. J. Haug and Jean Cea [12]

- Structural Optimization

最適設計問題は制約つき最適化問題 \implies Lagrange 乗数法

平均コンプライアンス (外力仕事) の感度 (sensitivity; 形状最適化の場合
は形状勾配) はひずみエネルギー密度

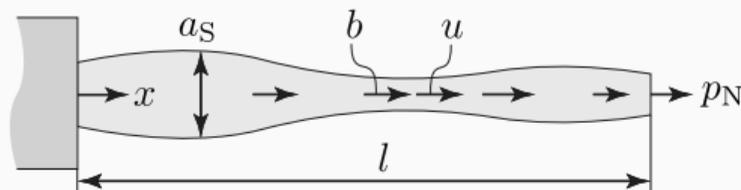


図 22: 1次元線形弾性体の断面積を設計変数とした関数最適化問題

成長ひずみ法の欠陥

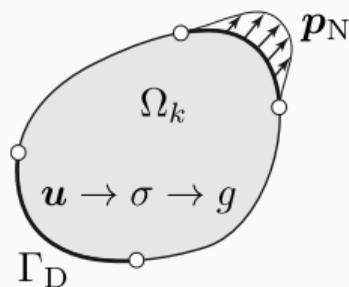
成長ひずみ法 (g をひずみエネルギー密度とおく)

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_k} (\mathbf{C}\mathbf{E}(\varphi_g)) \cdot \mathbf{E}(\varphi) \, dx &= - \int_{\Omega_k} (\mathbf{C}\mathbf{E}_B(g)) \cdot \mathbf{E}(\varphi) \, dx \\ &\approx - \int_{\Omega_k} g \nabla \cdot \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in U\end{aligned}$$

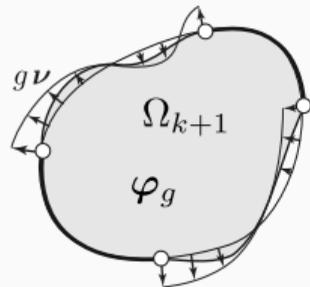
右辺は、正しくは、

$$- \int_{\Omega_k} \left(g \nabla \cdot \varphi + \boxed{\nabla g \cdot \varphi} \right) \, dx = - \int_{\Omega_k} \nabla \cdot (g\varphi) \, dx = - \underbrace{\int_{\partial\Omega_k} g\nu \cdot \varphi \, d\gamma}$$

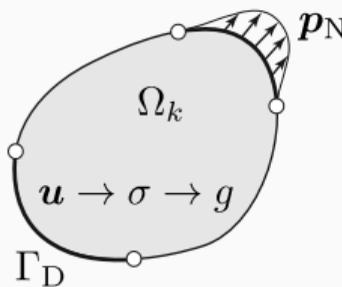
形状微分に比例した境界力で線形弾性体と仮定した領域を動かす。



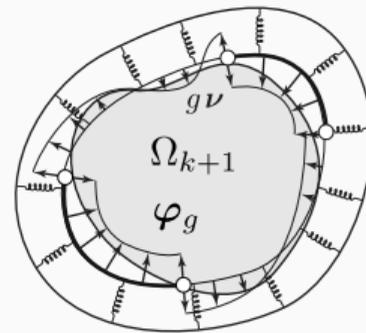
(a) 線形弾性問題



(b) 形状変形問題



(a) 線形弾性問題



(b) 形状変形問題

図 23: 力法 (Dirichlet 型), 日本機械学会論文集, 1994 [15]

図 24: Robin 型力法, International Journal of Computational Methods, 2006 [16]

ミシガン大学からメールでプログラムの変更を依頼した。

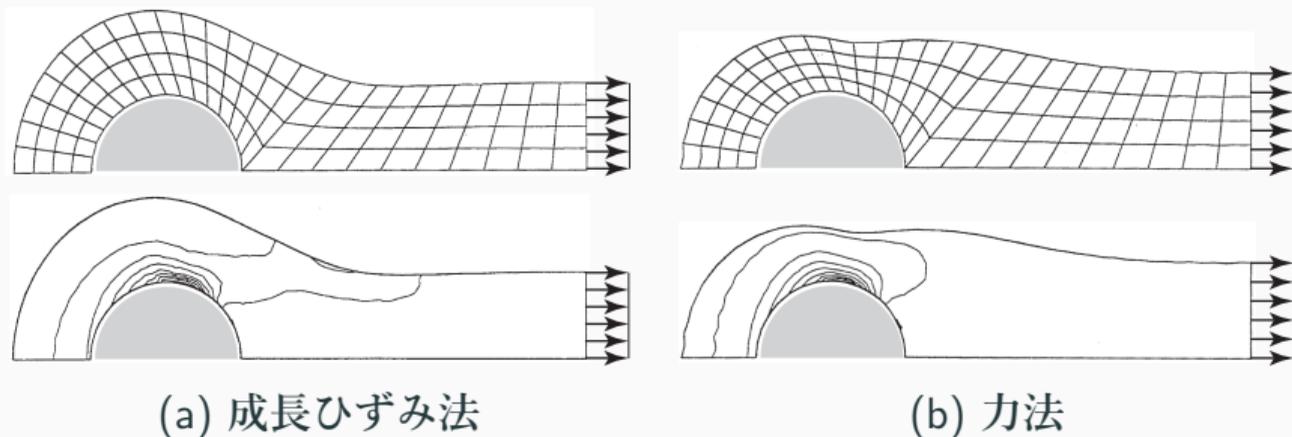


図 25: 連結棒の形状最適化

直観（在外研究中）

方法は Hilbert 空間の性質をもつ関数空間 X 上の勾配法である。

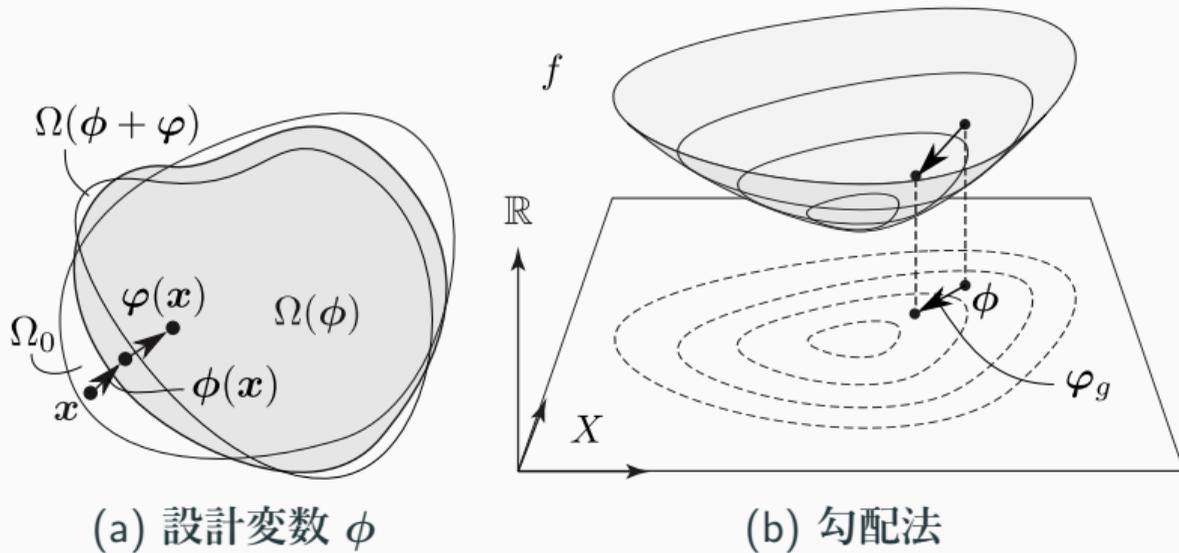


図 26: 方法のイメージ

2. その理解を巡って

2. その理解を巡って

- 2.1 方法の提案
- 2.2 海津聡先生との出会い
- 2.3 田端正久先生のアドバイス
- 2.4 方法のアイデアを位相最適化に応用
- 2.5 大塚厚二先生と木村正人先生との出会い
- 2.6 2階形状微分
- 2.7 最適解の存在
- 2.8 H^1 勾配法の正則性

2.1 方法の提案

帰国後、方法のようなアイデアが発表されていないか文献を調べた。

- Olivier Pironneau, **Optimal Shape Design for Elliptic Systems**, 1984 [17]
- Jan Sokolowski, Jean-Paul Zolésio, **Introduction to Shape Optimization: Shape Sensitivity Analysis**, 1991 [18]

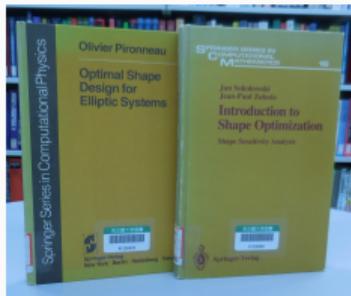


図 27: 帰国後に読み耽った書籍

もやもやしなながらも、**力法のアイデア**だけを提案する論文を書いた。

- **領域最適化問題の一解法**, 日本機械学会論文集, 1994 [15]

1. 境界値問題の制約に対しては**随伴変数法 (Lagrange 乗数法)**を用いて形状勾配を求める。
2. その形状勾配を用いて **Hilbert 空間上の勾配法** (Jean Cea 1981 [12]) を適用すれば、**力法**になる。

随伴変数法

体積制約つき平均コンプライアンス最小化問題

$$\min_{\phi \in X} \{ f_0(\phi, \mathbf{u}) \mid f_1(\phi) \leq 0, \mathbf{u} \in U \text{ は線形弾性問題の解} \}$$

$$f_0(\phi, \mathbf{u}) = \int_{\Omega(\phi)} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, dx + \int_{\Gamma_{p0}} \mathbf{p}_N \cdot \mathbf{u} \, d\gamma, \quad f_1(\phi) = \int_{\Omega(\phi)} dx - \int_{\Omega_0} dx$$

f_0 の Lagrange 関数

$$\mathcal{L}_0(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) = f_0(\phi, \mathbf{u}) + \boxed{\mathcal{L}_S(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)}$$

$$\mathcal{L}_S(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) = \int_{\Omega(\phi)} (-\mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}_0) + \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_0) \, dx + \int_{\Gamma_{p0}} \mathbf{p}_N \cdot \mathbf{v}_0 \, d\gamma$$

$\mathbf{v}_0 \in U$ は随伴変数 (Lagrange 乗数)

f_0 に対する極小点 1 次の必要条件を用いれば,

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}'_0(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) [\varphi, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}_0] \\
 &= \boxed{\mathcal{L}_{0\phi'}(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) [\varphi]} \quad \text{随伴問題} \downarrow \\
 &+ \mathcal{L}_{0\mathbf{u}}(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) [\hat{\mathbf{u}}] \quad (= 0 \Leftarrow \boxed{\mathcal{L}_0(\phi, \mathbf{v}_0, \hat{\mathbf{u}}) = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in U}) \\
 &+ \mathcal{L}_{0\mathbf{v}_0}(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) [\hat{\mathbf{v}}_0] \quad (= 0 \Leftarrow \boxed{\mathcal{L}_0(\phi, \mathbf{u}, \hat{\mathbf{v}}_0) = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_0 \in U}) \\
 &= \langle \bar{\mathbf{g}}_0, \varphi \rangle = \tilde{f}_0(\phi) [\varphi] \quad (\Leftarrow \boxed{\text{Sokolowski and Zolésio 1991 [18]}}) \\
 &= \int_{\partial\Omega(\phi)} \frac{(-\mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}) + 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} \cdot \varphi}{d\gamma} \quad \forall (\varphi, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}_0) \in X \times U \times U.
 \end{aligned}$$

一方,

$$f'_1(\phi) [\varphi] = \langle \bar{\mathbf{g}}_1, \varphi \rangle = \int_{\partial\Omega(\phi)} \boldsymbol{\nu} \cdot \varphi \, d\gamma.$$

$\bar{\mathbf{g}}_0$ と $\bar{\mathbf{g}}_1$ を f_0 と f_1 に対する形状勾配とよぶ. $\left(\begin{array}{l} \text{これ以降, } \tilde{f}_0(\phi) = f_0(\phi, \mathbf{u}) \\ \text{を } f_0(\phi) \text{ ともかく.} \end{array} \right)$

勾配法の原理

$X = \mathbb{R}^d$ のとき, $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ の Taylor 展開

$$f_i(\phi_k + \varphi) = f_i(\phi_k) + \mathbf{g}_i \cdot \varphi + o(\|\varphi\|_X)$$

勾配法

$$\boxed{\varphi_{gi} \cdot (A\varphi) = -\mathbf{g}_i \cdot \varphi \quad \forall \varphi \in X} \iff \varphi_{gi} = -A^{-1}\mathbf{g}_i$$

ただし, A は有界な正定値対称行列とする. すなわち, $A = A^\top$,

$$\exists \alpha, \beta > 0 : \varphi \cdot (A\varphi) \geq \alpha \|\varphi\|_{\mathbb{R}^d}^2, \quad |\varphi \cdot (A\psi)| \leq \beta \|\varphi\|_X \|\psi\|_X \quad \forall \varphi, \psi \in X$$

φ_{gi} は f_i を減少させる.

$$f_i(\phi_k + \epsilon \varphi_{gi}) - f_i(\phi_k) = -\epsilon \varphi_{gi} \cdot (A\varphi_{gi}) + o(\epsilon) \leq -\epsilon \alpha \|\varphi_{gi}\|_X^2 + o(\epsilon).$$

関数空間上の勾配法

$X = H^1(D; \mathbb{R}^d)$ のとき, $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ の Taylor 展開

$$f_i(\phi_k + \varphi) = f_i(\phi_k) + \langle g_i, \varphi \rangle + o(\|\varphi\|_X)$$

勾配法

$$\boxed{a_X(\varphi_{gi}, \psi) = -\langle g_i, \psi \rangle \quad \forall \psi \in X} \iff \text{Jean Cea 1981 [12]}$$

ただし, $a_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ は強圧的**双線形作用素**とする。すなわち,

$$\exists \alpha, \beta > 0 : a_X(\varphi, \varphi) \geq \alpha \|\varphi\|_X^2, \quad |a_X(\varphi, \psi)| \leq \beta \|\varphi\|_X \|\psi\|_X \quad \forall \varphi, \psi \in X$$

φ_{gi} は f_i を減少させる。

$$f_i(\phi_k + \epsilon \varphi_{gi}) - f_i(\phi_k) = -\epsilon a_X(\varphi_{gi}, \varphi_{gi}) + o(\epsilon) \leq -\epsilon \alpha \|\varphi_{gi}\|_X^2 + o(\epsilon).$$

$a_X(\cdot, \cdot)$ を線形弾性問題弱形式の左辺とおいたとき**力法**になる。

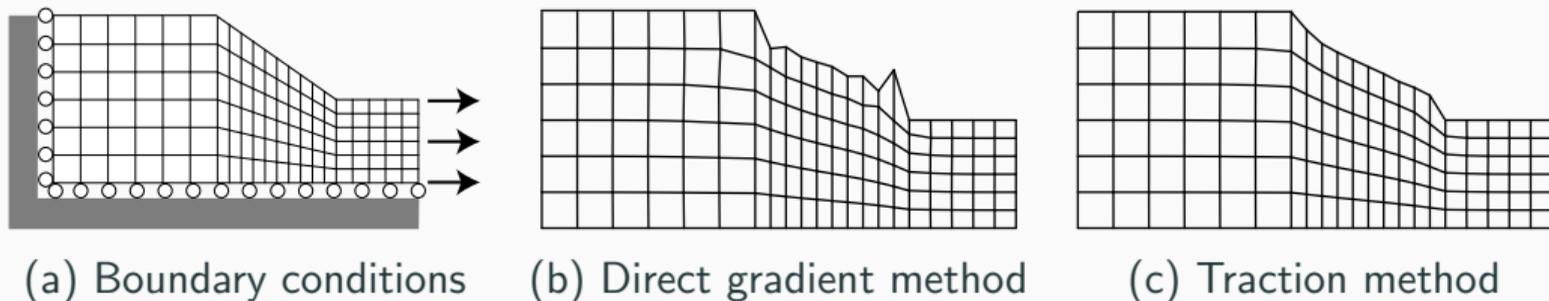
2.2 海津聡先生との出会い

菊地文雄先生と萩原一郎先生から海津聡先生（当時 電気通信大学）を紹介していただいた (1995).

1. **Sobolev の埋蔵定理**
2. 楕円型境界値問題の解に関する一意存在と正則性
3. 形状勾配に関する正則性の不足（不連続）

方法は形状勾配を平滑化する機能をもつ関数空間上の勾配法である。

- **Irregularity of shape optimization problems and an improvement technique**, Computer Aided Optimization Design of Structures V, edited by S. Hernandez and C. A. Brebbia, 1997 [19]



☒ 28: Results for external work minimization problem of plane stress plate.

海津先生に力法に関する数学としての正当性を示していただいた。

- 最適形状問題と力法について, 日本応用数学会論文誌, 2006 [20]

1. 許容領域の集合を有界な連続関数の集合で定義する.

⇒ コンパクト (Ascoli-Arzelà の定理)

2. 形状微分を Gâteaux 微分 として定義する

$$j(\epsilon\rho) = j(0) + \epsilon \int_{\Omega^0} u' g_u(u) dx + \epsilon \left[\int_{\partial\Omega^0} g(u) \rho \cdot \nu dS \right] + o(\epsilon)$$

3. 力法の解は一意に存在する (Lax-Milgram の定理).

4. その解は評価関数を減少させる (勾配法の原理).

5. その解がつくる領域は 十分なめらかな条件 の下で許容領域の集合に入る.

2.3 田端正久先生のアドバイス

田端先生には事あるごとにアドバイスをいただいた。

- セミナーでの話題提供 (1996, 2008)
- RIMS Workshop-数値解析における理論・手法・応用 (2008)
- NIMS Conference and the Third China-Japan-Korea Joint Conference on Numerical Mathematics (2010)

形状微分は **Fréchet 微分** として定義した方がよい。

$\iff \bar{g}_i$ を双対空間 X' (X 上の有界線形汎関数全体の集合) の要素とみなす。

$$f'_i(\phi)[\varphi] = \langle \bar{g}_i, \varphi \rangle_{X' \times X}, \quad \boxed{\bar{g}_i \in X'} \iff \langle \bar{g}_i, \cdot \rangle: X \text{ 上の有界線形汎関数}$$

勾配法の原理 (Fréchet 微分)

$a_X(\cdot, \cdot)$ は Hilbert 空間 $X = H^1(D; \mathbb{R}^d)$ 上の内積 $(\cdot, \cdot)_{X \times X}$ のようなもの

Find $\varphi_{g_i} \in X$ such that $(\varphi_{g_i}, \psi)_{X \times X} = -\langle g_i, \psi \rangle_{X' \times X} \quad \forall \psi \in X$

Riesz の表現定理

$g_i \in X'$ に対して, ある $\varphi_{g_i} \in X$ が一意に存在する.

⇒ 手法は, X' から X へ写像を求める方法になっている.



$H^1(D; \mathbb{R}^d)$ は 不連続な関数の集合なので, φ_{g_i} が X の要素であるだけでは新しい領域をつくれない.

⇒ 連続にするためには何が必要か? (この講演の最後に考える)

勾配法の幾何学的解釈

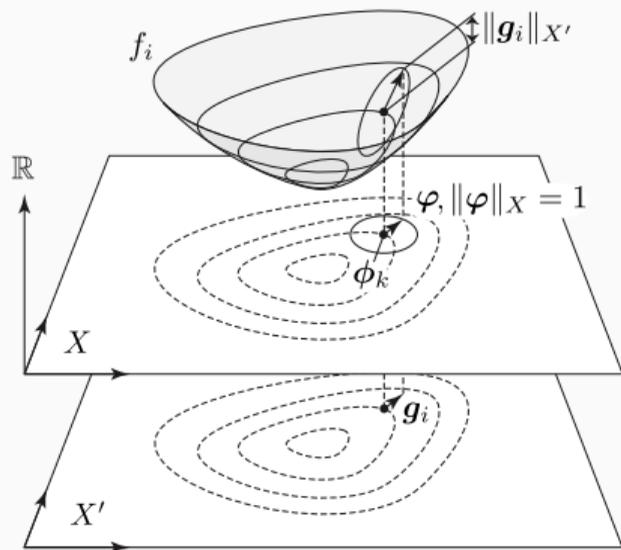


図 29: 勾配 g_i の定義

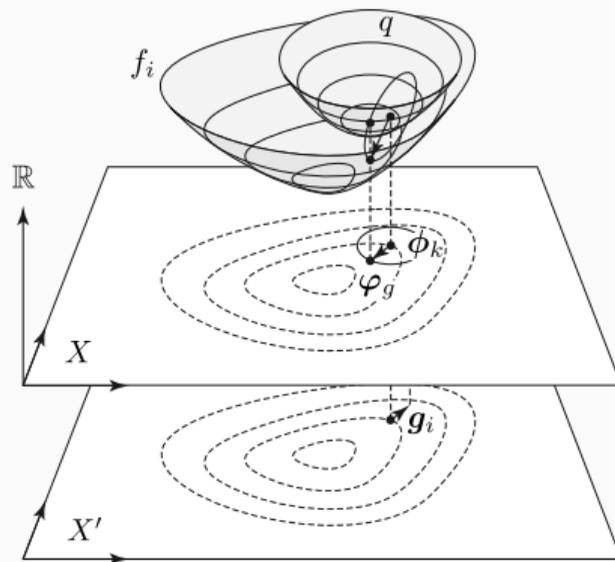


図 30: 勾配法

$$q(\varphi_{g_i}) = \min_{\varphi \in X} \left\{ q(\varphi) = \frac{1}{2} a_X(\varphi, \varphi) + \langle g_i, \varphi \rangle + f_i(\phi_k) \right\} \Leftarrow \text{2次曲面の最小値}$$

体積制約つき平均コンプライアンス最小化のイメージ

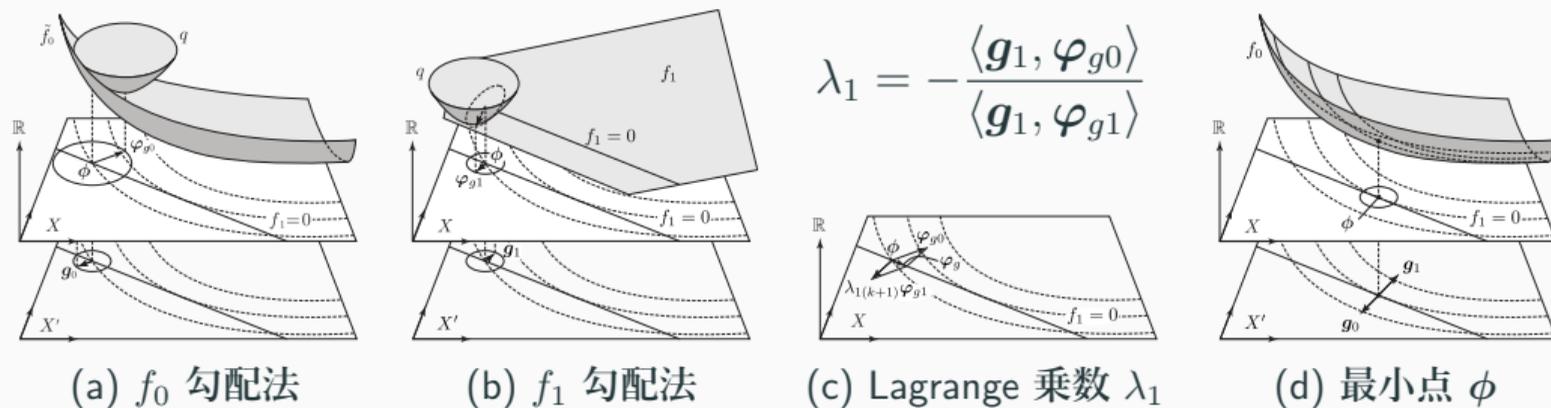


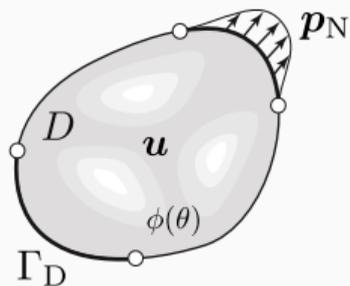
図 31: 体積制約つき平均コンプライアンス最小化のイメージ

2.4 方法のアイデアを位相最適化に応用

$X = H^1(\Omega; \mathbb{R})$ とおけば密度型位相最適化問題にも応用できる (H. Azegami, S. Kaizu and K. Takeuchi 2011 [21]).



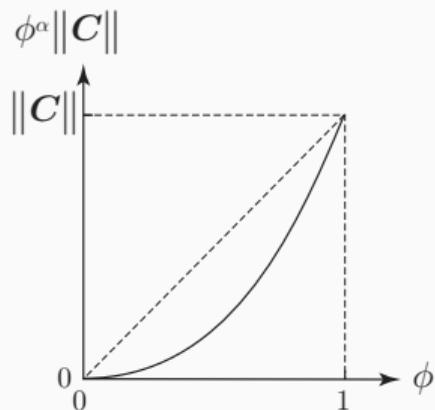
H^1 関数空間上の勾配法を H^1 勾配法 とよぶことにした.



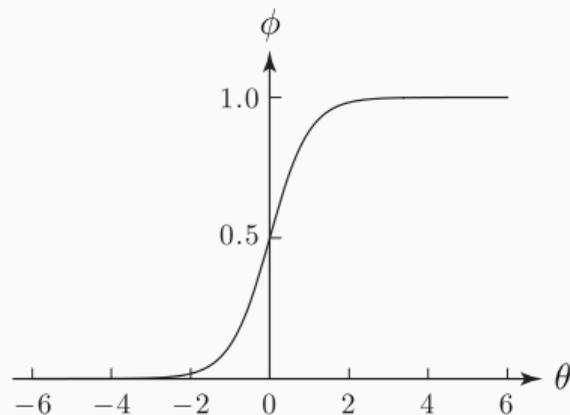
1. 形状最適化問題
 \implies 領域変動型 H^1 勾配法 = 方法
2. 密度型位相最適化問題
 \implies 密度変動型 H^1 勾配法

図 32: 密度型位相最適化問題

SIMP 型線形弾性問題



(a) 密度 ϕ と剛性 $\phi^\alpha \|C\|$ (SIMP モデル)



(b) 密度 $\phi(\theta) = \frac{1}{2} \tanh \theta + \frac{1}{2}$

図 33: SIMP (solid isotropic material with penalization) モデルと設計変数 θ

$\theta \in X = H^1(D; \mathbb{R})$ Find $\mathbf{u} \in U$ such that $-\nabla^\top \left(\underline{\phi^\alpha(\theta)} \mathbf{S}(\mathbf{u}) \right) = \mathbf{b}^\top(\theta)$ in D
 $\phi^\alpha(\theta) \mathbf{S}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} = \mathbf{p}_N$ on Γ_N .

体積制約つき平均コンプライアンス最小化問題

$$\tilde{f}'_0(\theta)[\vartheta] = \int_D \frac{\{2\mathbf{b}' \cdot \mathbf{u} - \alpha \phi^{\alpha-1} \phi' \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u})\} \vartheta}{\phi} dx = \langle \mathbf{g}_0, \vartheta \rangle \quad \forall \vartheta \in X,$$

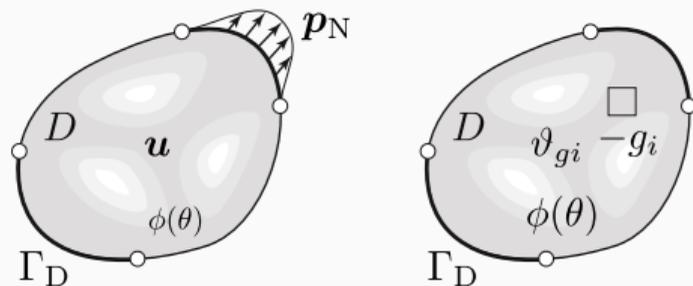
$$f'_1(\theta)[\vartheta] = \int_D \frac{\phi'}{\phi} \vartheta dx = \langle \mathbf{g}_1, \vartheta \rangle \quad \forall \vartheta \in X$$

密度変動型 H^1 勾配法

$a_X(\cdot, \cdot)$ を $X = H^1(D; \mathbb{R})$ 上の強圧的
双線形作用素とする。

Find $\vartheta_{g_i} \in X$ such that

$$a_X(\vartheta_{g_i}, \psi) = -\langle g_i, \psi \rangle \quad \forall \psi \in X.$$



(a) 線形弾性問題 (b) 密度変動問題

図 34: 密度変動型 H^1 勾配法

2.5 大塚厚二先生と木村正人先生との出会い

ワークショップ (2007) に招待されて以来、領域変動に対する汎関数の微分に関する数学を教えていただいた。

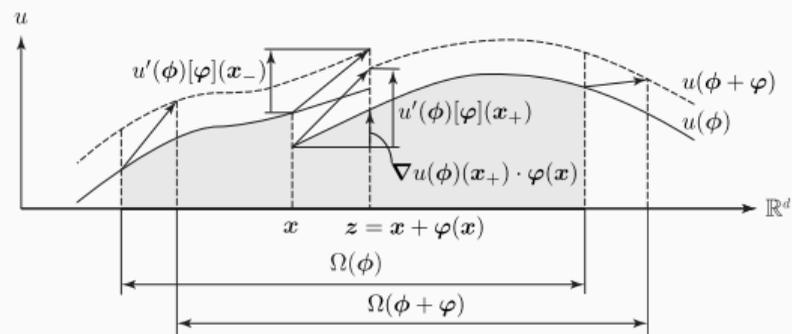
- 一般化 J 積分の提案とエネルギー解放率との関係 (Ohtsuka 1981 [22])
- 一般化 J 積分は特異点の形状微分 (Ohtsuka 1985 [23])
- Lipschitz 連続な領域写像への拡張とエネルギー解放率を Fréchet 微分 として捉える (Kimura 2008 [24])

領域積分型の汎関数形状微分公式を知る。平均コンプライアンスの形状微分は

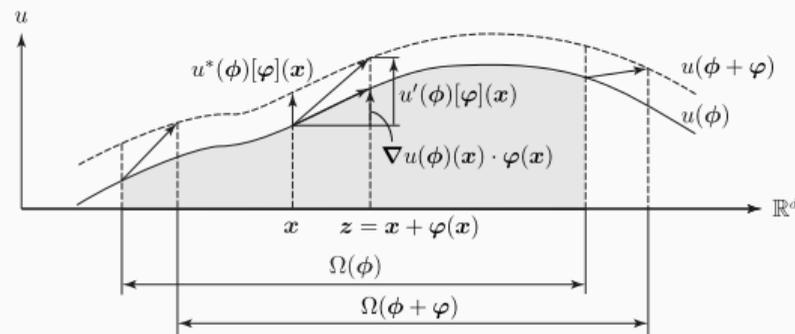
$$f'_0(\phi)[\varphi] = \langle \mathbf{g}_0, \varphi \rangle = \int_{\Omega(\phi)} (\mathbf{G}_{\Omega_0} \cdot \nabla \varphi^\top + g_{\Omega_0} \nabla \cdot \varphi) dx,$$

$$\mathbf{G}_{\Omega_0} = 2\mathbf{S}(\mathbf{u}) (\nabla \mathbf{u}^\top)^\top, \quad g_{\Omega_0} = -\mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}) + 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}.$$

形状微分と形状偏微分



(a) 関数 $u(\phi)$ の形状微分 $u'(\phi)[\varphi]$



(b) 関数 $u(\phi)$ の形状偏微分 $u^*(\phi)[\varphi]$

図 35: 領域変動とともに変動する関数 $u(\phi)$

一般化 J 積分では関数の形状微分 $u'(\phi)[\varphi]$ が使われていた。

2.6 2階形状微分

領域積分型の公式を用いれば、2階形状微分も求まりそうだ。



微分の連鎖則を駆使して公式を得た。FreeFEM による計算でそれらしい結果が得られた。

⇒ 和文テキスト（畔上 2016 [25]）に掲載した。



英文テキストの査読者から “**Jacques Simon 1989 [26]** を読んだか?” との指摘を受けた。

Second variations for domain optimization problems

Jacques Simon

Departement de Mathématiques Appliquées
Université Blaise Pascal

...
Thus, since $J'(\Omega + tu; \cdot)$ is linear and $w \circ (I + tu)^{-1} = w - tu \cdot \nabla w + o(t)$,

$$\begin{aligned} D^2 j(0; u, w) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (J'(\Omega + tu; w \circ (I + tu)^{-1}) - J'(\Omega; w)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (J'(\Omega + tu; w) - J'(\Omega; w) \\ &\quad + J'(\Omega + tu; \frac{1}{t}(w \circ (I + tu)^{-1} - w))) \\ &= (J')'(\Omega; u, w) + J'(\Omega; -u \cdot \nabla w). \end{aligned}$$

☒ **36:** Second variations for domain optimization problems, International Series of Numerical Mathematics, Vol. 91 [26]

領域変動による特別な事情

評価関数 $f(\phi, u(\phi)) = \tilde{f}(\phi)$ の2階形状微分の定義

$$\begin{aligned} f''(\phi, u(\phi))[\varphi_1, \varphi_2] &= \tilde{f}''(\phi)[\varphi_1, \varphi_2] \\ &= \lim_{\|\varphi_1\|_X \rightarrow 0, \|\varphi_2\|_X \rightarrow 0} \frac{\langle \mathbf{g}(\phi + \varphi_2), \varphi_1 \circ (\mathbf{i} + \varphi_2)^{-1} \rangle - \langle \mathbf{g}(\phi), \varphi_1 \rangle}{\|\varphi_1\|_X \|\varphi_2\|_X} \\ &= (\tilde{f}')'(\phi)[\varphi_1, \varphi_2] + \langle \mathbf{g}(\phi), \mathbf{t}(\varphi_1, \varphi_2) \rangle \end{aligned}$$

$$(\tilde{f}')'(\phi)[\varphi_1, \varphi_2] = \lim_{\|\varphi_2\|_X \rightarrow 0} \frac{1}{\|\varphi_2\|_X} (\langle \mathbf{g}(\phi + \varphi_2), \varphi_1 \rangle - \langle \mathbf{g}(\phi), \varphi_1 \rangle),$$

$$\langle \mathbf{g}(\phi), \mathbf{t}(\varphi_1, \varphi_2) \rangle = \lim_{\|\varphi_2\|_X \rightarrow 0} \frac{1}{\|\varphi_2\|_X} \langle \mathbf{g}(\phi + \varphi_2), \varphi_1 \circ (\mathbf{i} + \varphi_2)^{-1} - \varphi_1 \rangle$$

Lagrange 乗数法による 2 階形状微分

φ_1 を固定したとき $\tilde{f}'_i(\phi)[\varphi_1] = \langle g_i, \varphi_1 \rangle$ は ϕ の汎関数になる。



$\langle g_i, \varphi_1 \rangle$ に対する Lagrange 関数

$$\mathcal{L}_{Ii}(\phi, u, v_i, w_i, z_i) = \langle g_i, \varphi_1 \rangle + \mathcal{L}_S(\phi, u, w_i) + \mathcal{L}_{Ai}(\phi, v_i, z_i) \quad (1)$$

$\mathcal{L}_{Ai}(\phi, v_i, z_i)$ は f_i に対する随伴問題の Lagrange 関数

$w_i \in U$ と $z_i \in U$ は g_i が u と v_i の関数であるために用意された随伴変数

体積制約つき平均コンプライアンス最小化問題に対する数値例

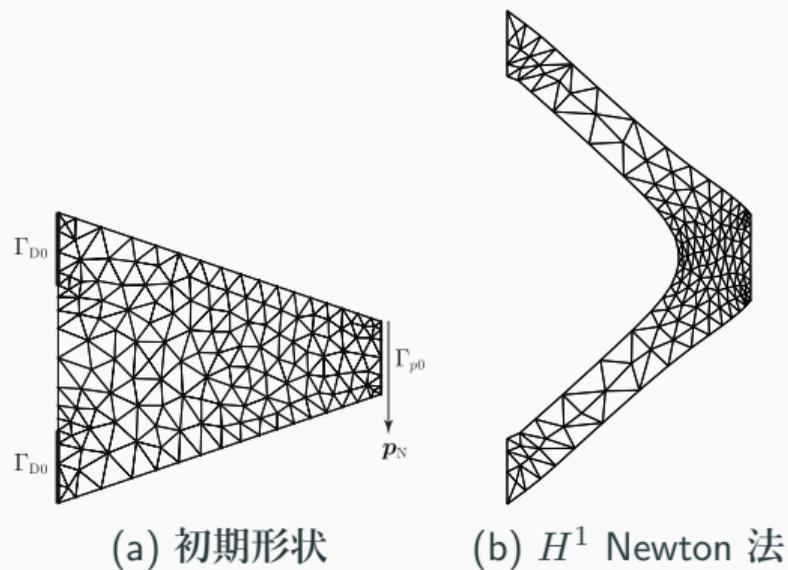


図 37: FreeFEM による解析結果

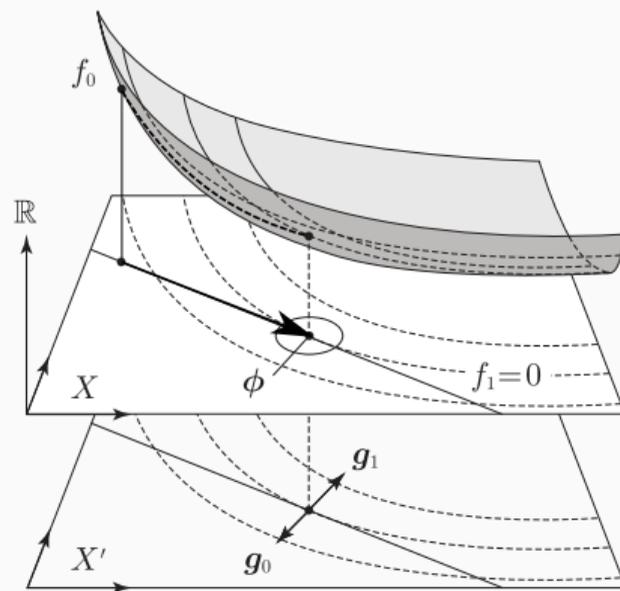
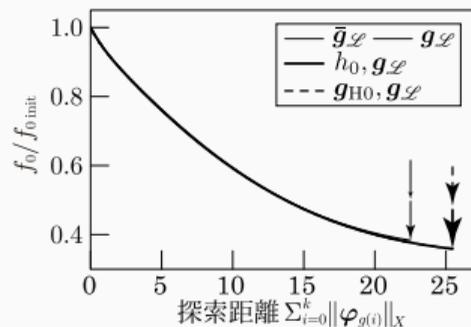
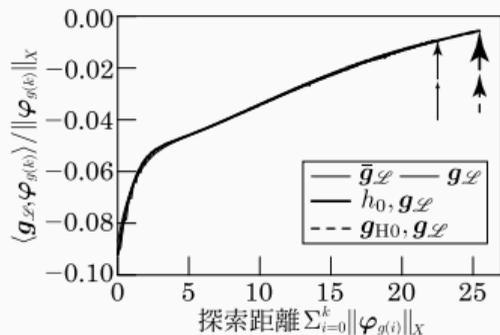


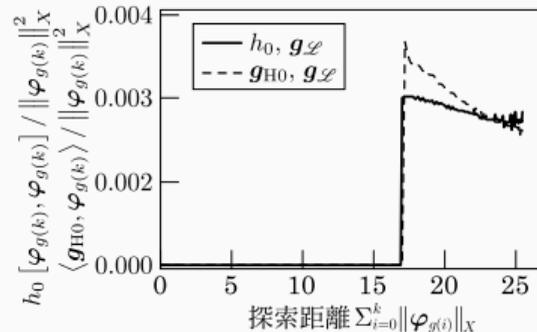
図 38: 最小点 ϕ のイメージ



(a) 評価関数



(b) 勾配



(c) 2階微分

図 39: 図 38 の矢印に沿ったグラフ (英文テキスト (Azegami 2020 [27]))

2.7 最適解の存在

J. Haslinger and R. A. E. Mäkinen, Introduction to Shape Optimization: Theory, Approximation, and Computation, SIAM, 2003 [28, Section 2.3, Section 2.4]

(参考) **Weierstrass の定理** S は $X = \mathbb{R}^d$ の**有界閉部分集合**, かつ $f_0 : S \rightarrow \mathbb{R}$ は**連続**とする. このとき, f_0 の**最小点** $x^* \in S$ が存在する.

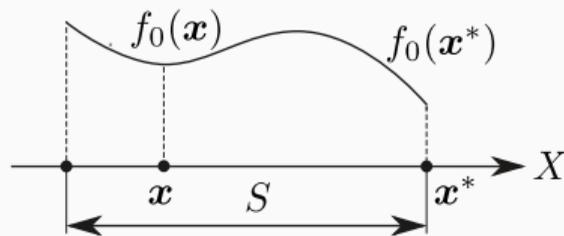


図 40: 関数 f_0 の極小点 x と最小点 x^*

最適解の存在を示すために議論すること

1. $\phi \in \mathcal{D} \in X$ に対する $\underline{u(\phi) \in \mathcal{S} \in U}$ の連続性
2. $\mathcal{F} = \{(\phi, u(\phi)) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S} \mid \text{境界値問題}\}$ のコンパクト性
3. $\mathcal{S} = \{(\phi, u) \in \mathcal{F} \mid f_1(\phi, u) \leq 0, \dots, f_m(\phi, u) \leq 0\}$ 上 f_0 の連続性

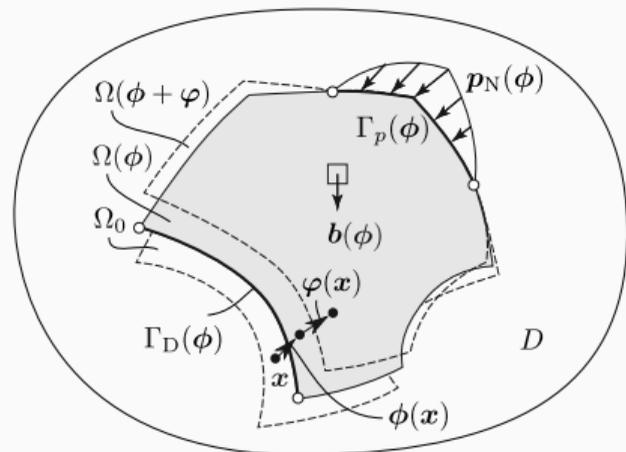


図 41: 変動する領域

- 基本となる線形空間 X
(Hilbert 空間)
- 領域摂動 φ が入る線形空間 $Y \in X$
(Lipschitz 連続)
- 領域変動 ϕ の許容集合 $\mathcal{D} \in X$
(コンパクト集合)

領域変動の集合

基本となる線形空間

$$X = \{ \phi \in H^1(D; \mathbb{R}^d) \mid \phi = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \partial D \}$$

領域摂動 φ が入る線形空間 (Rellich–Kondrachov のコンパクト埋蔵定理)

$$Y = X \cap \boxed{H^2(D; \mathbb{R}^d) \cap C^{0,1}(D; \mathbb{R}^d)} \in X$$

領域変動 ϕ の許容集合 (領域写像 $i + \phi$ が Ω_0 上で全射の Lipschitz 写像)

$$\mathcal{D} = \left\{ \phi \in Y \mid \|\phi\|_{C^{0,1}(D; \mathbb{R}^d)} \leq \sigma, \|\phi\|_{H^2 \cap C^{0,1}(D; \mathbb{R}^d)} \leq \beta \right\}$$

$\sigma \in (0, 1)$ と β は正定数

汎関数の形状微分（定義の見直し）

$Y \in X$ のとき、 $X' \in Y'$ が成り立つ。



形状勾配 $g(\phi)$ は $X' \in Y'$ の要素として定義する。

形状微分を **Gâteaux 微分** で定義したときは、 $g(\phi) \in Y'$ (要注意) であった。



形状微分を **Fréchet 微分** に変更することで、 H^1 勾配法を自然に定義できる。

2.8 H^1 勾配法の正則性

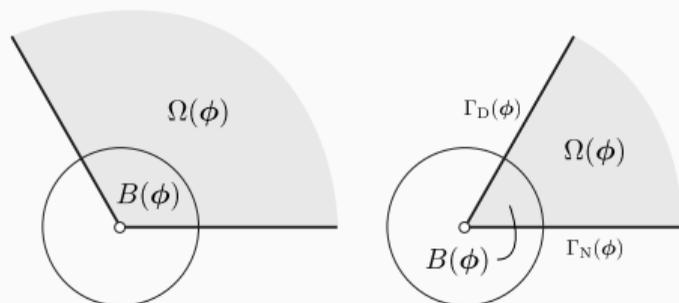
u の許容集合

$$S = \begin{cases} U \cap W^{2,2q_R}(D; \mathbb{R}^d) & (\text{境界積分}), \\ U \cap W^{2,4}(D; \mathbb{R}^d) & (\text{領域積分}), \end{cases}$$

$q_R > d$. u が S に入らない境界上の点あるいは辺の近傍を $B(\phi)$ とかく。

H^1 勾配法の正則性

$(\phi, u(\phi)) \in \mathcal{D} \times S$ のとき, H^1 勾配法の弱解 $\varphi_{gi} \in X$ は $\Omega(\phi) \setminus \bar{B}(\phi)$ 上で $H^2 \cap C^{0,1}$ 級 となる。



(a) 同一種境界

(b) 混合境界

図 42: 特異点近傍 $B(\phi)$

3. おわりに

竹内謙善博士	プログラム開発
田上大助先生	集中講義
村井大介博士	有限要素法解の誤差評価
成富佑輔博士	2階微分の数値検証
Julius Fergy T. Rabago 博士	解の存在
相野眞行博士	解の存在
畔上研究室に在籍した学生達	興味ある基本的な問題への応用
共同研究を行った研究者の皆様	実問題への応用

嚥下における筋活動の同定に関する研究を続けたい。

H. Azegami and S. Ono and K. Takeuchi and T. Kikuchi and Y. Michiwaki and K. Hanyuu and T. Kamiya, **Identification of muscle activity in tongue motion during swallowing through medical image data**, Journal of Biomechanical Science and Engineering, 2022 [29]

舌境界の時間変化が与えられたとき、**筋の伸縮運動**を求めたい。

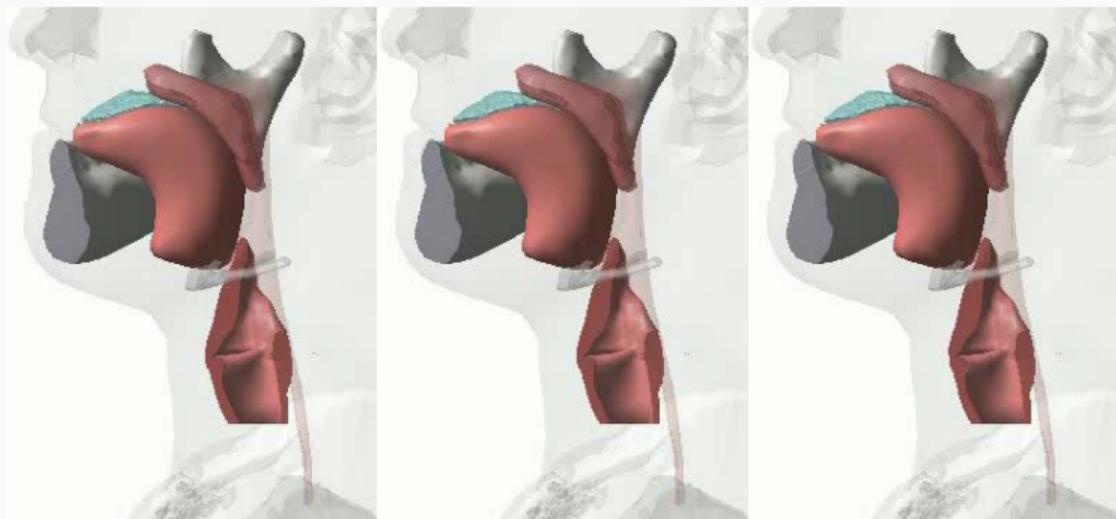


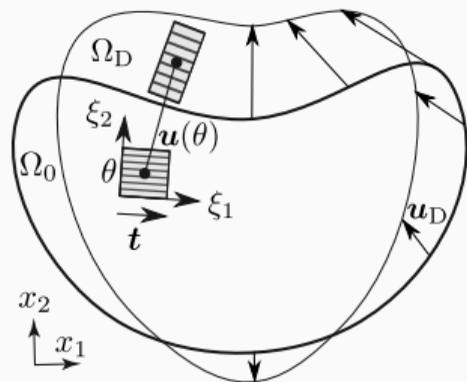
図 43: 嚥下運動のシミュレーション [菊地貴博 (武蔵野赤十字病院) 提供]

道脇らの研究では、各器官に制御領域が設けられて、観測された形状変化に合おうように、そこに人工的な変形が与えられていた。

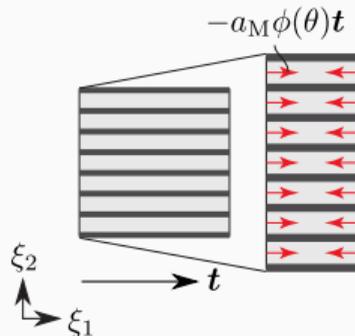


観測された各器官の形状変化から、数理モデルに基づいて、その変化を引き起こす筋活動を理論的に同定したい。

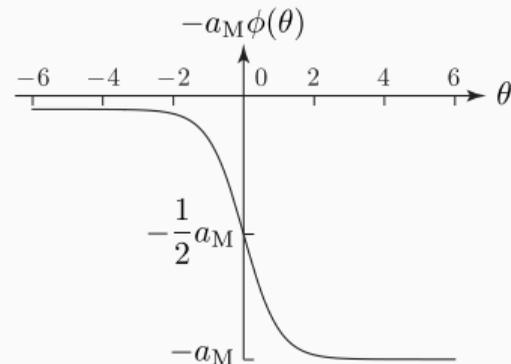
筋活動のモデリング



(a) 舌の変形



(b) 筋活動



(c) 筋活動の大きさ

図 44: 筋活動 (非弾性収縮応力) のモデリング (t は最小主応力方向)

u_D に対する反力の L^2 ノルムの 2 乗が最小になるような θ を求める.

設計変数 θ の関数空間:

$$X = H^1(\Omega_0; \mathbb{R}^m),$$

$$\mathcal{D} = \left\{ \theta \in H^2 \cup C^{0,1}(\Omega_0; \mathbb{R}^m) \mid \max \left\{ \|\theta\|_{H^2(\Omega_0; \mathbb{R}^m)}, \|\theta\|_{C^{0,1}(\Omega_0; \mathbb{R}^m)} \right\} \leq \beta_{\mathcal{D}} \right\}$$

筋活動:

$$\mathbf{S}_M(\theta) = -a_M \phi(\theta) \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} \quad \text{where} \quad \phi(\theta) = -a_M \left(\frac{1}{2} \tanh \theta + \frac{1}{2} \right)$$

変位 \mathbf{u} の関数空間:

$$U = \{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega_0; \mathbb{R}^d) \mid \mathbf{u} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \Gamma_{D0} \},$$
$$\mathcal{S} = U \cap C^{0,1}(\Omega_0; \mathbb{R}^d)$$

右 Cauchy-Green 変形テンソル:

$$\mathbf{C}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}^\top(\mathbf{u}) \mathbf{F}(\mathbf{u}) \quad \text{where} \quad \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{I} + (\nabla \mathbf{u}^\top)^\top$$

第2 Piola-Kirchhoff 応力: 弾性ポテンシャル $p(\mathbf{C}(\mathbf{u}))$ に対して

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}) = 2 \frac{\partial p(\mathbf{C}(\mathbf{u}))}{\partial \mathbf{C}(\mathbf{u})} + \mathbf{S}_M(\boldsymbol{\theta}) \quad \Leftarrow \quad \text{構成則}$$

本研究では, 圧縮性 neo-Hooke 則が使われた.

第 1 Piola–Kirchhoff 応力: $\Pi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}) = \mathbf{F}(\mathbf{u}) \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u})$

問題 1 (\mathbf{u}_D と $\boldsymbol{\theta}$ による超弾性有限変形問題)

$\mathbf{u}_D \in C^{0,1}(\Omega_0; \mathbb{R}^d)$ と $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{D}$ が与えられたとき,

$$-\nabla^\top \Pi^\top(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}^\top \quad \text{in } \Omega_0$$

を満たす $\mathbf{u} - \mathbf{u}_D \in \mathcal{S}$ ($\mathbf{u} = \mathbf{u}_D$ on $\partial\Omega_0$) を求めよ.

\mathbf{u}_D に対する反力の静水圧成分 $\alpha \in \mathbb{R}$ を除く法線方向成分の L^2 ノルムの 2 乗

$$f_0(\mathbf{u}, \alpha) = \int_{\partial\Omega_0} \{\boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{\Pi}(\theta, \mathbf{u}) \boldsymbol{\nu}) - \alpha\}^2 d\gamma$$

問題 2 (筋活動同定問題)

次を満たす θ を求めよ.

$$\min_{\theta \in \mathcal{D}} \{f_0(\mathbf{u}, \alpha) \mid \mathbf{u} - \mathbf{u}_D \in \mathcal{S} \text{ は問題 1 の解}, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

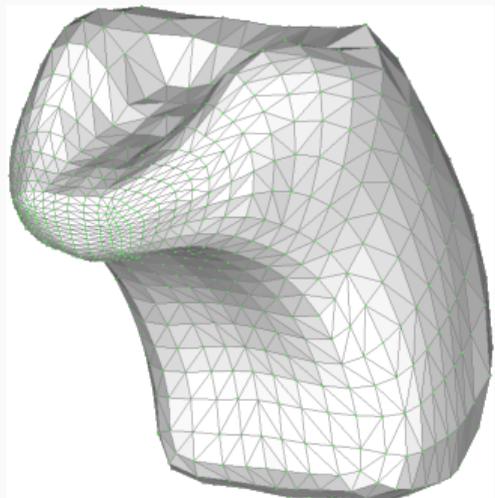
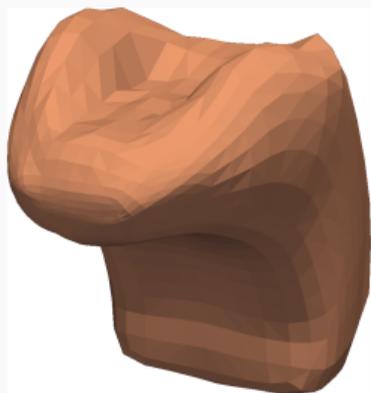


図 45: 舌の有限要素モデル

- 有限要素: 4 面体 2 次
- 節点数: 10564
- 要素数: 59701
- ヤング率: 20 kPa
- ポアソン比: 0 / 0.4
- 最大筋収縮応力 a_M : 6.5 kPa
- θ の初期値: -3



(a) Frame 36



(b) Frame 38

図 46: 筋活動の同定に用いた舌の変形

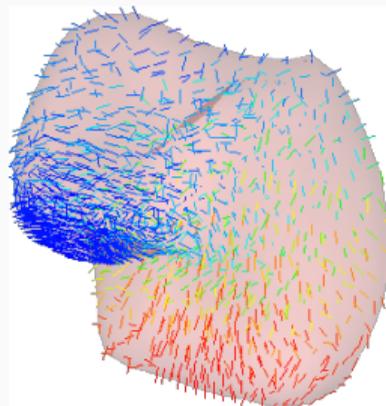


図 47: 筋応力

$$a_M \phi(\theta) \mathbf{t} = -\mathbf{S}_M(\theta_{\text{opt}}) \mathbf{t}$$

($\nu_P = 0$, Frame 36-38)

退職にあたって思うこと

1. 高専時代の卒業研究で形状同定問題を扱っていたことは驚きであった。
 - 機械工学とものづくりの基礎を学んだことが、その後の発想の基になった。
2. 匿名の査読者を含めてたくさんの人から誤りの指摘や助言（ときには批判）をいただいた。
 - 専門性が高まると孤独になる。指摘を受けたあとには発展があった。
3. 結局、数学が必要となった。
 - 実問題への応用を考えたとき、数学は生き生きとする。

力学はバイオエンジニアリングのしっかりした基礎がための手助けをするであろうし、他方ではバイオエンジニアリングは力学の新たな発展のきっかけとなるであろう。

(Fung・瀬口の解説記事)

4. 参考文献

[1] T. Suzuki and T. Tsuchiya.

Weak formulation of Hadamard variation applied to the filtration problem.

Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, Vol. 28, pp. 327–350, 2011.

[2] I. M. Gelfand, S. V. Fomin, 関根智明訳.

変分法.

総合図書, 東京, 1970.

[3] Y. C. Fung, 神谷紀生共訳大橋義夫.

固体の力学/理論.

培風館, 東京, 1970.

[4] 渡辺勝彦, 畔上秀幸, 平野八州男.

き裂エネルギー密度による安定成長き裂の破壊抵抗評価 (第2報薄板延性
き裂への適用) .

日本機械学会論文集 A 編, Vol. 52, No. 475, pp. 736–743, 1986.

[5] 渡辺勝彦, 畔上秀幸.

き裂前縁を含む面の非連続性を考慮したき裂モデルの提案とそのき裂パ
ラメータ評価への適用.

日本機械学会論文集 A 編, Vol. 51, No. 469, pp. 2154–2161, 1985.

[6] Y. C. Fung, 瀬口靖幸.

生体システムにおける力学.

日本機械学会誌, Vol. 88, pp. 290–296, 1988.

[7] 畔上秀幸.

成長の構成則を用いた形状最適化手法の提案 (静的弾性体の場合).

日本機械学会論文集 A 編, Vol. 54, No. 508, pp. 2167–2175, 1988.

[8] M. W. Suh, W. J. Anderson, and J. P. McDonald.

Application of geometric strain method to shape optimization of spring retainer redesign.

In C. A. Brebbia and S. Hernandez, editors, Computer Aided Optimization Design of Structures: Recent advances, pp. 189–198. Computational Mechanics Publications, Southampton, Boston, 1989.

[9] C. Matteck and S. Burkhardt.

A new method of structural shape optimization based on biological growth.

International Journal of Fatigue, Vol. 12, No. 3, pp. 185–190, 1990.

[10] N. V. Banichuk.

Optimality conditions and analytical methods of shape optimization.

In E. J. Haug and J. Cea, editors, Optimization of Distributed Parameter Structures, Vol. 2, pp. 973–1004. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1981.

[11] J. Cea.

Problems of shape optimization.

In E. J. Haug and J. Cea, editors, Optimization of Distributed Parameter Structures, Vol. 2, pp. 1005–1048. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, 1981.

[12] J. Cea.

Numerical methods of shape optimal design.

In E. J. Haug and J. Cea, editors, Optimization of Distributed Parameter Structures, Vol. 2, pp. 1049–1088. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, 1981.

[13] J. P. Zolésio.

The material derivative (or speed) method for shape optimization.

In E. J. Haug and J. Cea, editors, Optimization of Distributed Parameter Structures, Vol. 2, pp. 1089–1151. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, 1981.

[14] J. P. Zolésio.

Domain variational formulation for free boundary problems.

In E. J. Haug and J. Cea, editors, Optimization of Distributed Parameter Structures, Vol. 2, pp. 1152–1194. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, 1981.

[15] 畔上秀幸.

領域最適化問題の一解法.

日本機械学会論文集 A 編, Vol. 60, No. 574, pp. 1479–1486, 1994.

[16] H. Azegami and K. Takeuchi.

A smoothing method for shape optimization: Traction method using the Robin condition.

International Journal of Computational Methods, Vol. 3, No. 1, pp. 21–33, 2006.

[17] O. Pironneau.

Optimal Shape Design for Elliptic Systems.

Springer, New York, 1984.

[18] J. Sokolowski and J. P. Zolésio.

Introduction to Shape Optimization: Shape Sensitivity Analysis.

Springer, New York, 1992.

[19] H. Azegami, S. Kaizu, Shimoda M., and E. Katamine.

Irregularity of shape optimization problems and an improvement technique.

In S. Hernandez and C. A. Brebbia, editors, Computer Aided Optimization Design of Structures V, pp. 309–326. Computational Mechanics Publications, Southampton, 1997.

[20] 海津聰, 畔上秀幸.

最適形状問題と方法について.

日本応用数学会論文誌, Vol. 16, No. 3, pp. 277–290, 2006.

[21] H. Azegami, S. Kaizu, and K. Takeuchi.

Regular solution to topology optimization problems of continua.

JSIAM Letters, Vol. 3, pp. 1–4, 2011.

[22] K. Ohtsuka.

Generalized J-integral and three-dimensional fracture mechanics I.

Hiroshima Mathematical Journal, Vol. 11, pp. 21–52, 1981.

[23] K. Ohtsuka.

Generalized J-integral and its applications I: Basic theory.

Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, Vol. 2, pp. 329–350, 1985.

[24] M. Kimura.

Shape derivative of minimum potential energy: abstract theory and applications.

Jindřich Nečas Center for Mathematical Modeling Lecture notes Volume IV, Topics in Mathematical Modeling, pp. 1–38, 2008.

[25] 畔上秀幸.

形状最適化問題.

森北出版, 東京, 2016.

[26] J. Simon.

Second variations for domain optimization problems.

International Series of Numerical Mathematics, Vol. 91, pp. 361–378, 1989.

[27] H. Azegami.

Shape Optimization Problems.

Springer, Singapore, 2020.

[28] J. Haslinger and R. A. E. Mäkinen.

Introduction to Shape Optimization: Theory, Approximation, and Computation.

SIAM, Philadelphia, 2003.

[29] H. Azegami, S. Ono, K. Takeuchi, T. Kikuchi, Y. Michiwaki, K. Hanyuu, and T. Kamiya.

Identification of muscle activity in tongue motion during swallowing through medical image data.

Journal of Biomechanical Science and Engineering, Vol. 17, No. 1, pp. 21–00254, 2022.