線形代数学 I

須田　淳

今回は採点します。

問 1(力技で簡単に解けます。)

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

A^2はAとEの足し合わせ(行列における線形結合)で表すことができる、すなわち、

$$A^2 = \alpha\ A + \beta\, E$$

ここでαとβを a,b,c,d を用いて表せ。tr Aやdet Aを使って簡単に書けないか考えてみよ。

問 2(力技でも解けるけど…。)

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

A^{-1}はAとEの線形結合で表すことができることが知られている、すなわち、

$$A^{-1} = p\ A + q\, E$$

ここでpとqを a,b,c,dを用いて表せ。tr Aやdet Aを使って簡単に書けないか考えてみよ。

問 3（超簡単。）

2 次行列A, Bを考える。

Bが、$B = s\,A + t\,E$（ここでs, tは任意の実数）と表されるとき、

$AB = BA$となることを示せ。

問 4（力技で良いでしょう。少し手を抜く方法あります。）

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & a \\ 6 & 1 & b \\ -2 & -4 & c \end{bmatrix}$$

とする。$AB = BA$となるように実数a, b, cを定めよ。

問5（期末試験レベルです。）

次のようにベクトルが変換される3次元数ベクトルの線形変換を考える。

$$\begin{bmatrix}2\\-2\\0\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}2\\2\\4\end{bmatrix}$$

(1) この線形変換を表す行列Aを求めよ。

(2) 変換前の列ベクトルを並べて行列Pをつくる、すなわち、

$$P=\begin{bmatrix}2&1&1\\-2&1&1\\0&-1&2\end{bmatrix}$$

とする。APを求めよ。

(3) P^{-1}を求めよ。

(4) $P^{-1}AP$を求めよ。

(5) $(P^{-1}AP)^n$を求めよ。（nは正の整数。）

(6) 以上の結果を参考にして、A^nを求めよ。

以上

鬼問題：挑戦したい人はどうぞ

（力技で行えるのですが、死にます…。レポート用紙4～5ページになるでしょう。そしてどこかで計算ミスするでしょう。）

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$$

A^3はA^2とAとEの線形結合で表すことができることが知られている。すなわち、

$$A^3=\alpha\ A^2+\beta A+\gamma E$$

ここでα,β,γをa_{ij}を用いて表せ。$\mathrm{tr}\,A$や$\det A$を使って簡単に書けないか考えてみよ。

優しい鬼問題

（これは力技で行けるかな。行列の掛け算、成分に0があるとうれしいですね。）

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\0&a_{22}&a_{23}\\0&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$$

A^3はA^2とAとEの線形結合で表すことができることが知られている。すなわち、

$$A^3=\alpha\ A^2+\beta A+\gamma E$$

ここでα,β,γをa_{ij}を用いて表せ。$\mathrm{tr}\,A$や$\det A$を使って簡単に書けないか考えてみよ。