線形代数学 I

須田　淳

問１

３次元数ベクトル空間から 4 次元数ベクトル空間への線形写像を考える。この写像により単位ベクトルが次のように写像される。写像を表す行列を求めよ。

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\\2\end{bmatrix}$$

問２

4 次元数ベクトル空間から 3 次元数ベクトル空間への線形写像を考える。この写像により単位ベクトルが次のように写像される。写像を表す行列を求めよ。

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}4\\3\\5\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}-1\\0\\-2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}1\\8\\0\end{bmatrix}$$

問３

3 次元実数ベクトル空間から実数への線形写像を考える。この写像により単位ベクトルが次のように写像される。写像を表す行列を求めよ。

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \mapsto 5, \quad \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \mapsto 3, \quad \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \mapsto 1$$

問４

３次元数ベクトル空間から 3 次元数ベクトル空間への線形写像を考える。この写像により次のようにベクトルが写像される。写像を表す行列を求めよ。

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}3\\5\\2\end{bmatrix}$$

問５

３次元数ベクトル空間から 3 次元数ベクトル空間への線形写像を考える。この写像により次のようにベクトルが写像される。写像を表す行列を求めよ。

$$\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$

問６

３次元数ベクトル空間から ３ 次元数ベクトル空間への線形写像を考える。この写像により次のようにベクトルが写像される。写像を表す行列を求めよ。

$$\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}7\\4\\3\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}9\\4\\5\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}4\\2\\4\end{bmatrix}$$

問７

次の行列で表される３次元数ベクトル空間から３次元数ベクトル空間への線形写像がある。

$$\begin{bmatrix}4 & 2 & 0\\8 & 4 & 0\\6 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

次のベクトルがどのように写像されるか求めよ

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

問８

次の行列で表される３次元数ベクトル空間から３次元数ベクトル空間への線形写像がある。

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 2 & 1\\2 & 5 & 3\end{bmatrix}$$

次のベクトルがどのように写像されるか求めよ

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\4\\11\end{bmatrix}$$

問９

実数全体から実数全体への写像（つまり、関数ですね）で①単射(だが全射ではない)、②全射(だが単射ではない)、③全単射、④単射でも全射でもない、という例をそれぞれ１例以上挙げよ。グラフの概形も書くこと。 ③の例：$y = ax + b\ (a \neq 0)$。

問１０

次の関数が(実数全体から実数全体への)全単射になるための a の条件を求めよ。

$$y = ax + \sin 5x$$

以上