記号法

文字の使い方

基本ルールを以下に示す.

$a, \alpha, \cdots$	アルファベットとギリシャ文字 (表 1) の小文字はスカラー，ベクトル，関数を表す.
$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\alpha}, \cdots$	アルファベットとギリシャ文字の太い小文字は有限次元のベクトルとそれを値域にもつ関数を表す.
$A, \mathcal{A}, \Gamma, \cdots$	アルファベットとギリシャ文字の大文字やその飾り文字を集合を表す.
$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\Gamma}, \cdots$	アルファベットとギリシャ文字の太い大文字を有限次元の行列とそれを値域にもつ関数を表す.
$\mathscr{L}, \mathscr{H}$	Lagrange 関数，Hamilton 関数の意味をもつ関数を表す.
$a_{\mathrm{A}}, a_{\mathrm{div}}$	ローマン体の添え字は用語の頭文字あるいは略称を表す.

以下，m, n, d を自然数とする.

集合

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	それぞれ自然数 (正整数), 整数, 有理数, 実数, 複素数の全体集合を表す.
$\mathbb{R}^d$	d 次元の実線形空間 (実ベクトル空間) を表す.
$A = \{a_1, \cdots, a_m\}$	集合 A は $a_1, \cdots, a_m$ の要素あるいは点からなることを表す.
$\lvert A\rvert$	有限集合 A の要素の数を表す.
$a \in A$	a は集合 A の要素であることを表す.
$\{0\}$	0 だけからなる集合を表す.

表 1: ギリシャ文字

大文字		小文字		よみ	大文字		小文字		よみ
A	$\boldsymbol{A}$	α	$\boldsymbol{\alpha}$	alpha	N	$\boldsymbol{N}$	ν	$\boldsymbol{\nu}$	nu
B	$\boldsymbol{B}$	β	$\boldsymbol{\beta}$	beta	Ξ	$\boldsymbol{\Xi}$	ξ	$\boldsymbol{\xi}$	xi
Γ	$\boldsymbol{\Gamma}$	γ	$\boldsymbol{\gamma}$	gamma	O	$\boldsymbol{O}$	o	$\boldsymbol{o}$	omicron
Δ	$\boldsymbol{\Delta}$	δ	$\boldsymbol{\delta}$	delta	Π	$\boldsymbol{\Pi}$	π ϖ	$\boldsymbol{\pi}$ $\boldsymbol{\varpi}$	pi
E	$\boldsymbol{E}$	ϵ ε	$\boldsymbol{\epsilon}$ $\boldsymbol{\varepsilon}$	epsilon	P	$\boldsymbol{P}$	ρ ϱ	$\boldsymbol{\rho}$ $\boldsymbol{\varrho}$	rho
Z	$\boldsymbol{Z}$	ζ	$\boldsymbol{\zeta}$	zeta	Σ	$\boldsymbol{\Sigma}$	σ ς	$\boldsymbol{\sigma}$ $\boldsymbol{\varsigma}$	sigma
H	$\boldsymbol{H}$	η	$\boldsymbol{\eta}$	eta	T	$\boldsymbol{T}$	τ	$\boldsymbol{\tau}$	tau
Θ	$\boldsymbol{\Theta}$	θ ϑ	$\boldsymbol{\theta}$ $\boldsymbol{\vartheta}$	theta	Υ	$\boldsymbol{\Upsilon}$	υ	$\boldsymbol{\upsilon}$	upsilon
I	$\boldsymbol{I}$	ι	$\boldsymbol{\iota}$	iota	Φ	$\boldsymbol{\Phi}$	ϕ φ	$\boldsymbol{\phi}$ $\boldsymbol{\varphi}$	phi
K	$\boldsymbol{K}$	κ	$\boldsymbol{\kappa}$	kappa	X	$\boldsymbol{X}$	χ	$\boldsymbol{\chi}$	chi
Λ	$\boldsymbol{\Lambda}$	λ	$\boldsymbol{\lambda}$	lambda	Ψ	$\boldsymbol{\Psi}$	ψ	$\boldsymbol{\psi}$	psi
M	$\boldsymbol{M}$	μ	$\boldsymbol{\mu}$	mu	Ω	$\boldsymbol{\Omega}$	ω	$\boldsymbol{\omega}$	omega

$\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$	無限点列 $\{a_1, a_2, \cdots\}$ を表す.
$A \subset B$	集合 A が集合 B の部分集合であることを表す.
$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$	集合 A と集合 B の和集合，積集合，差集合を表す.
$(0, 1)$, $[0, 1]$, $(0, 1]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 1\}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \le 1\}$ を表す.

ベクトルと行列

以下，$\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ のベクトルと行列を考える.

$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_d)^\top \in \mathbb{R}^d$	d 次元の列実ベクトルを表す．x_i は $\boldsymbol{x}$ の i 番目の要素を表す．$\boldsymbol{x}^\top$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表す.
$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{m\times n}$	m 行 n 列の実行列を表す. $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{(i,j)\in\{1,\cdots,m\}\times\{1,\cdots,n\}}$ ともかく.
$\mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$, $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^{m\times n}}$	$\mathbb{R}^d$ および $\mathbb{R}^{m\times n}$ の零元を表す.
$\boldsymbol{x} \ge \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$	すべての $i \in \{1, \cdots, d\}$ に対して $x_i \ge 0$ を表す.
$\lVert\boldsymbol{x}\rVert_{\mathbb{R}^d,p}$	$p \in [1, \infty)$ のとき，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ の p 乗ノルム $\sqrt[p]{\lvert x_1\rvert^p + \cdots + \lvert x_d\rvert^p}$ を表す．$p = \infty$ のとき，最大値ノルム $\max\{\lvert x_1\rvert^p, \cdots, \lvert x_d\rvert^p\}$ を表す．混乱がなければ $\lVert\boldsymbol{x}\rVert_p$ とかく.
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ および $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{ij}$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ に対して，内積 (スカラー積) $\sum_{i\in\{1,\cdots,m\}} a_i b_i$, $\sum_{(i,j)\in\{1,\cdots,m\}^2} a_{ij} b_{ij}$ を表す.

$\|\boldsymbol{x}\|_{\mathbb{R}^d}$	$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ の Euclid ノルム $\sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$ を表す．混乱がなければ $\|\boldsymbol{x}\|$ とかく．
δ_{ij}	Kronecker のデルタ $\delta_{ij} = 1$ $(i = j)$, $\delta_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ を表す．
$\boldsymbol{I}_{\mathbb{R}^{m \times m}}$	単位行列 $(\delta_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ を表す．混乱がなければ $\boldsymbol{I}$ とかく．
$(\,\cdot\,)^{\mathrm{s}}$	$\left((\,\cdot\,)^{\top} + (\,\cdot\,)\right)/2$ を表す．

領域と関数

以下，$\mathbb{R}^d$ 上の領域と関数を考える．

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$	$\mathbb{R}^d$ の領域 (連結な開集合) を表す．
$\bar{\Omega}$	Ω の閉包を表す．
$\partial\Omega$	Ω の境界 $\bar{\Omega} \setminus \Omega$ を表す．
$\|\Omega\|$	$\displaystyle\int_{\Omega} \mathrm{d}x$ を表す．
S°	閉集合 S の内部を表す．
$\boldsymbol{\nu}$	境界 $\partial\Omega$ で定義された外向き単位法線を表す．
$\boldsymbol{\tau}_1, \cdots, \boldsymbol{\tau}_{d-1}$	境界 $\partial\Omega$ で定義された接線を表す．
κ	境界 $\partial\Omega$ で定義された $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nu}$ (平均曲率の $d-1$ 倍，主曲率の和) を表す．
$\boldsymbol{\nabla} u$	関数 $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ の勾配 $\partial u / \partial \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ を表す．
Δu	関数 $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ の Laplace 作用素 $\Delta = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}$ を表す．
$\partial_{\nu} u$	関数 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ に対して，境界 $\partial\Omega$ で定義された $(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, u$ を表す．
$\partial \boldsymbol{u} / \partial \boldsymbol{x}^{\top}$, $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{x}^{\top}}$	関数 $\boldsymbol{u} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ のとき，Jacobi 行列 $(\partial u_i / \partial x_j)_{ij} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d$ を表す．
$\partial_{\nu} \boldsymbol{u}$	関数 $\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ に対して，境界 $\partial\Omega$ で定義された $(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \boldsymbol{u} = \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^{\top}\right)^{\top} \boldsymbol{\nu}$ を表す．
$\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}\gamma$, $\mathrm{d}\varsigma$	領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 上の積分，境界 $\Gamma \subset \partial\Omega$ 上の積分，境界の境界 $\partial\Gamma$ 上の積分で使われる測度を表す．
$\operatorname{ess\,sup}_{\mathrm{a.e.}\, \boldsymbol{x} \in \Omega} \|u(\boldsymbol{x})\|$	関数 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ の本質的有界を表す．a.e. は「可測集合上ほとんどいたるところで」の意味を表す．

χ_Ω　領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ に対する特性関数 $\chi_\Omega : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ($\chi_\Omega(\Omega) = 1$, $\chi_\Omega\left(\mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}\right) = 0$) を表す.

Banach 空間

以下，V をノルム空間, X と Y を Banach 空間とする.

$\|\boldsymbol{x}\|_V$　$\boldsymbol{x} \in V$ のノルムを表す．混乱がなければ $\|\boldsymbol{x}\|$ とかく.

$f : X \to Y$　X から Y への写像 (作用素) を表す.

$f(\boldsymbol{x}) : X \ni \boldsymbol{x} \mapsto f \in Y$　要素を明示した写像を表す.

$f \circ g$　合成写像 $f(g)$ を表す.

$\mathcal{L}(X;Y)$　X から Y への有界線形作用素の全体集合を表す.

$\mathcal{L}^2(X \times X;Y)$　$\mathcal{L}(X;\mathcal{L}(X;Y))$ を表す.

X'　X の双対空間，すなわち X 上の有界線形汎関数の全体集合 $\mathcal{L}(X;\mathbb{R})$ を表す.

$\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle_{X' \times X}$　$\boldsymbol{x} \in X$ と $\boldsymbol{y} \in X'$ の双対積を表す．混乱がなければ $\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$ とかく.

$f'(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{y}]$　$f : X \to \mathbb{R}$ のとき，f の $\boldsymbol{x} \in X$ における任意変動 $\boldsymbol{y} \in X$ に対する Fréchet 微分 $\langle f'(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle_{X' \times X}$ を表す.

$f_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})[\boldsymbol{z}]$, $\partial_X f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})[\boldsymbol{z}]$　$f : X \times Y \to \mathbb{R}$ のとき，f の $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in X \times Y$ における任意変動 $\boldsymbol{z} \in X$ に対する Fréchet 偏微分 $\langle \partial f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) / \partial \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle_{X' \times X}$ を表す．$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) / \partial \boldsymbol{x} \in X'$ を $f_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ とかく.

$C^k(X;Y)$　$k \in \{1, 2, \cdots\}$ 階まで Fréchet 微分可能な X から Y への写像の全体集合を表す.

$C^k_{\mathrm{S}'}(X;Y)$　$k \in \{1, 2, \cdots\}$ 階まで形状微分可能な X から Y への写像の全体集合を表す.

$C^k_{\mathrm{S}^*}(X;Y)$　$k \in \{1, 2, \cdots\}$ 階まで形状偏微分可能な X から Y への写像の全体集合を表す.

関数空間

以下，Ω を $\mathbb{R}^d$ の領域とする.

$C(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $C^0(\Omega;\mathbb{R}^n)$　Ω 上で定義された連続関数 $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ の全体集合を表す.

$C_{\mathrm{B}}(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $C^0_{\mathrm{B}}(\Omega;\mathbb{R}^n)$　$C(\Omega;\mathbb{R}^n)$ に含まれる有界な関数の全体集合を表す.

$C_0(\Omega;\mathbb{R}^n)$	$\boldsymbol{f} \in C(\Omega;\mathbb{R}^n)$ の台が Ω のコンパクト集合となるような $\boldsymbol{f}$ の全体集合を表す.
$C^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$	$k \in \{0,1,\cdots\}$ 階までの導関数が $C(\Omega;\mathbb{R}^n)$ に属する関数の全体集合を表す.
$C_{\mathrm{B}}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$	k 階微分までの導関数が $C_{\mathrm{B}}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ に属する関数の全体集合を表す.
$C_0^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$	$C^k(\Omega;\mathbb{R}^n) \cap C_0(\Omega;\mathbb{R}^n)$ を表す.
$C^{k,\sigma}(\Omega;\mathbb{R}^n)$	Hölder 指数 $\sigma \in (0,1]$ に対して，k 階までの導関数が Hölder 連続な $\boldsymbol{f} \in C^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$ の全体集合を表す．$k=0$ かつ $\sigma=1$ のとき，その関数を Lipschitz 連続という.
$L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$	$p \in [1,\infty)$ に対して p 乗 Lebesgue 可積分な関数 $\boldsymbol{f}:\Omega \to \mathbb{R}^n$ の全体集合を表す．$p=\infty$ に対して本質的有界な関数の全体集合を表す.
$W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R}^n)$	$k \in \{0,1,\cdots\}$ 階までの導関数が $L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ に属する関数の全体集合を表す.
$W_0^{k,p}(\Omega;\mathbb{R}^n)$	$W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})$ における $C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ の閉包を表す.
$H^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$	$W^{k,2}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ を表す.
$H_0^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$	$W_0^{k,2}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ を表す.