第 9 章 領域変動型の形状最適化問題

畔上 秀幸

January 7, 2022

名古屋大学 情報学研究科 複雑系科学専攻

はじめに

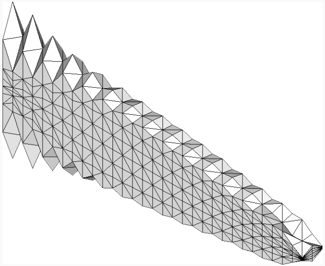
第 8 章では，連続体の密度を設計変数において連続体の最適な位相を求める問題についてみてきた．本章では，連続体の境界が移動するタイプの形状最適化問題についてみていくことにしよう．本章で示される理論の主要な部分は文献 [3] として公表された内容となっている．本書では，そこで使われた理論を第 1 章から第 7 章までの内容に照らし合わせながら，みていくことにする．

まず，領域変動型の形状最適化問題に関する研究の歴史について，著者の知る限りにおいて説明しておこう．領域変動型の形状最適化問題は領域最適化問題ともよばれ，20 世紀初めから研究されてきた．例えば，Hadamard の莫大な業績の中に薄膜の基本振動数が最大になるような境界形状を求める問題に関する記述がある．そこには，境界を外向き法線の方向に移動したときの基本振動数の Fréchet 微分に相当する考え方が示されている [29, 89]．その後も領域変動型の形状変動に対する Fréchet 微分を形状微分とよんで，それに関する研究成果をたくさんの研究者が発表してきた[1]．これらの研究の背景には、Lions[62] を中心とした数学者らによる関数を制御変数にした最適制御理論の研究があったといわれている．

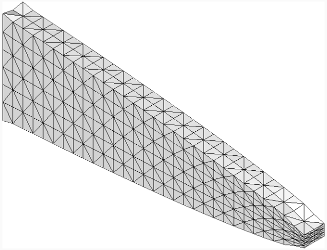
[1]たとえば，文献 [75, 36, 72, 73, 21, 69, 87, 74, 20, 19, 103, 102, 11, 12, 23, 22, 33, 31, 13, 89, 32, 26, 30, 24, 66, 27]

　このように形状微分の計算方法に関する理論は着実に発展してきたが，形状微分を用いた形状の動かし方に関する研究については，必ずしも良好な成果が得られてきたとはいえなかった．実際，有限要素モデルの境界上の節点座標を設計変数に選んで，設計変数の変動に対する Fréchet 微分を評価して，その値を用いて節点を移動していくと，図 9.1 (a) のような境界形状が波打つ数値不安定現象が現れることが知られていた [41]．図 9.1 (a) は 3 次元線形弾性体の平均コンプライアンス最小化問題 (問題 9.12.2) に対する数値解析の結果を示す．状態決定問題の境界条件は，後端において変位が拘束され，前端中心線上に下向きの一様な節点力 (外力) が仮定された．形状変動の境界条件は，前後左右端において法線方向の変動が拘束され，前後端の水平な中心線の変動が拘束された．状態決定問題の数値解析では，1 次の 4 面体有限要素が使われた．形状微分の計算方法には，あとで示される境界積分型の公式が使われた．

　このような境界形状が波打つ現象を避けるために，境界形状を B–スプライン曲線や Bezier 曲線などで定義して，その制御変数を設計変数に選ぶ方法 [16, 17] や，形状変動を基本変形モードの線形和で与えて，そのときの未定乗数を設計変数に選ぶ方法 (ベーシスベクトル法) [92, 33, 14, 76, 93] などが注目され，実際の最適設計にも使われてきた．しかしながら，そこで使われてきた方法では，いずれも,「まえがき」で説明されたようなパラメトリックな設計変数に対する微分が使われており，本来の形状微分とは異なるものであった．



(a) 波打ち形状



(b) H^1 勾配法による最適形状

図 9.1: 線形弾性体の形状最適化問題に対する数値解析例 (株式会社くいんと 提供)

それに対して，本章では，第 7 章で示された抽象的最適設計問題の枠組みに沿って，適切な関数空間の上で定義された領域変動を表す関数を設計変数にした領域変動型の形状最適化問題を構成し，そのうえで評価関数の形状微分を評価する方法についてみていくことにする．その結果明らかになることは，形状微分が次の領域をつくるのに必要な正則性を備えていないことである．そのことが，数値不安定現象を生む要因の一つになっていたと考えられる．そのうえで，そのような形状微分を使ったとしても，適切な勾配法を用いれば数値不安定現象に遭わずに形状最適化問題を解くことができる可能性がある．本章ではその方法について考えることにしよう．

図 9.1 (b) は 9.10 節で示されるアルゴリズムによって得られた結果を示している．境界条件や形状微分の計算方法は，図 9.1 (a) のときと同一である．状態決定問題の数値解析では 2 次の 4 面体有限要素が使われた．また，あとで示される Robin 条件を用いた H^1 勾配法の数値解析では，1 次の 4 面体有限要素が使われた．なお，このような有限要素の選択に関する妥当性は 9.11 節で示される．

このような関数空間上の勾配法に関する基本的な考え方は，Cea の論文 [19] において紹介されている．Pironneau の著書 [74, p. 48 (17)] の中にもその原型が読み取れる．また，漸近的正則化と称した方法 [91] も提案されている．それらに対して，著者 [2] が，工学的な発想に基づいて，力法とよんで提案した方法もその一例になっている．その後，力法の一般化も試みられている [7]．なお，それらの方法はさまざまな工学的な問題に適用されてきた[2]．また，力法の数学的解釈に関しては既報 [46] でも試みられた．そこでは，領域写像をあるクラスの連続関数全体の集合の要素であると仮定して，領域写像の変動に対する評価関数の Gâteaux 微分を用いて力法の正当性について議論された．本章では，領域写像の変動を適切な Hilbert 空間で定義して，評価関数の Fréchet 微分を用いた勾配法を考える．その勾配法に基づけば，力法はその一例になっていたことが明らかになる．

[2]たとえば，文献 [8, 85, 47, 48, 79, 98, 49, 78, 97, 99, 39, 81, 80, 82, 96, 40, 54, 100, 51, 52, 38, 6, 95, 37, 9, 58, 43, 42, 53, 83, 50, 84, 56, 55, 57, 44, 45, 86, 59, 4, 10]

なお，領域変動型の形状最適化問題を構成する方法として，本章でとりあげられる方法とは別の方法も提案されている．その一つは，Hadamard [29] が考えたように，境界を法線方向に移動することで次の境界形状が確定することに着目し，境界上で定義された法線方向への移動量を表す関数を設計変数に選ぶ方法である [65]．この方法でも，本章で示されるような勾配法に相当する正則化機能を備えた勾配法が使われる．しかし，状態決定問題の数値解析に有限要素法を用いる場合には，この方法で境界の移動を済ませたあと，領域内部のメッシュをそれに合わせて移動する方法を考えなければならない．また，もう一つの方法として，設計変数にレベルセット関数を用いる方法についても研究されている [94, 1, 101]．それらの問題における正則化法も提案されている [77, 18]．与えられた固定領域上で定義された連続なスカラー値関

数をレベルセット関数とよび，その関数のゼロ等値面によって境界を定義する方法である．この方法によれば，レベルセット関数が変動することによって，穴が連結して領域の位相を変化させることが容易におこなわれる．しかし，実際の領域よりも広い領域で数値解析をおこなわなければならず，また連続体が存在する領域上だけで定義された数値モデルを取り出すためには多少の手続きが必要となる．さらに，上記２つの方法では，状態決定問題の解関数の正則性に関して，本章で最初に示される方法よりも強い条件が必要となる．その理由は，評価関数の Fréchet 微分を計算する際，境界積分型の公式しか使えないためである．

本章の構成は次のようになっている．9.1 節から 9.4 節までは変動する領域上で定義された関数と汎関数に関する定義と公式をまとめている．9.1 節では，設計変数 (領域変動を表す関数) の許容集合および関数と汎関数に対する形状微分の定義を示す．その際，変動する領域上で定義された関数の領域変動に対する微分に関して，二つの定義方法があることに注目する．本書では，それらを「関数の形状微分」と「関数の形状偏微分」とよぶことにする．それらの定義を用いて，領域写像の Jacobi 行列に関する形状微分の公式を 9.2 節で求めることにする．9.3 節では，その公式を使って関数や汎関数の形状微分に関する命題を示す．ここでも，関数の形状微分を用いた公式と関数の形状偏微分を用いた公式が得られることに注目する．9.4 節では，関数の形状微分と形状偏微分などを使ってさまざまな関数の変動則を定義する．

　9.5 節から 9.8 節までは Poisson 問題を状態決定問題に選んだ場合の形状最適化問題を構成し，評価関数の形状微分を求めるまでをみていくことにする．9.5 節では，9.4 節で示された関数の変動則を使って，Poisson 問題を用いて状態決定問題を定義する．その問題の解を用いて，9.6 節において，一般的な評価関数を定義して，それらを用いて形状最適化問題を定義する．そこで定義された形状最適化問題の解が存在することは 9.7 節で示される．9.8 節では，7.5 節で示された評価関数の Fréchet 微分の求め方に沿って，領域変動に対する評価関数の形状微分と 2 階形状微分を求める方法について考える．その際，関数の形状微分公式を用いた方法と関数の形状偏微分公式を用いた二つの方法が考えられることに注目する．その結果，いずれの方法を用いても，評価

関数の形状勾配は次の領域が定義できるだけの正則性がないことが明らかとなる．

形状勾配の正則性が不足していても，7.6 節で示された抽象的勾配法や抽象的 Newton 法を適用することで，評価関数の形状微分を正則化する機能をもつ勾配法や Newton 法が定義される．9.9 節では，それらの抽象的な定義とそれらを具体化するいくつかの方法を紹介する．9.10 節ではアルゴリズムについて考える．しかし，基本的な構造は 3.7 項で示されたアルゴリズムと同じになる．このアルゴリズムによって得られた数値解の誤差評価は 9.11 節で示される．そこでは，6.6 節で示された数値解析における誤差評価の結果が使われることになる．

Poisson 問題に対する形状最適化問題に対して解法までをひととおりみたあとは，9.12 節において線形弾性体の平均コンプライアンス最小化問題に対する評価関数の形状微分を求めてみる．さらに，9.13 節では，Stokes 流れ場の平均流れ抵抗最小化問題を例にあげて評価関数の形状微分を求めてみる．これらの形状微分を用いた最適性の条件は，1.1 節で示された 1 次元線形弾性体の平均コンプライアンス最小化問題と 1.3 節で示された 1 次元分岐 Stokes 流れ場の平均流れ抵抗最小化問題に対する最適性の条件と一致することが確かめられる．

9.1 領域変動の集合と形状微分の定義

§9.1　領域写像の集合と形状微分の定義

領域変動型の形状最適化問題を構成するために，設計変数の許容集合を定義しよう．また，変動する領域の上で定義された関数や汎関数の領域変動に対する Fréchet 微分を形状微分とよぶことにして，それらの定義を示しておくことにする．

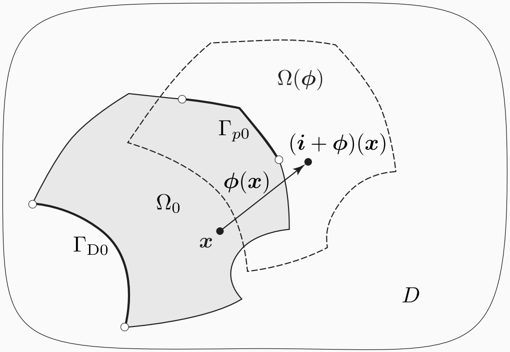


図 9.2: 領域変動 (変位) $\phi : D \to \mathbb{R}^d$

図 9.2 のように，$\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$ を初期領域を表す $d \in \{2, 3\}$ 次元の Lipschitz 領域 (A.5 節) とする．さらに，本章では，その境界 $\partial\Omega_0$ は $H^2 \cap C^{0,1}$ 級でもあると仮定する．ここで，境界が $H^{k+2} \cap C^{k,1}$ 級 ($k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$) であるとは，定義 A.5.2 ($C^k$ 級領域) の中で定義された関数 ϕ が
$H^{k+2}\left(B\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}\right); \mathbb{R}^d\right) \cap C^{k,1}\left(B\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}\right); \mathbb{R}^d\right)$ (境界上では
$H^{k+3/2}\left(\partial\Omega_0 \cap B\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}\right); \mathbb{R}^d\right) \cap C^{k,1}\left(\partial\Omega_0 \cap B\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}\right); \mathbb{R}^d\right)$) に属することであると定義する．また，これ以降，$H^{k+2}\left(\Omega_0; \mathbb{R}^d\right) \cap C^{k,1}\left(\Omega_0; \mathbb{R}^d\right)$ を
$H^{k+2} \cap C^{k,1}\left(\Omega_0; \mathbb{R}^d\right)$ のようにかくことにする．

初期領域 Ω_0 は与えられていると仮定する．その境界 $\partial\Omega_0$ に対して，$\Gamma_{\mathrm{D}0} \subset \partial\Omega_0$ を Dirichlet 境界，$\Gamma_{\mathrm{N}0} = \partial\Omega_0 \setminus \bar{\Gamma}_{\mathrm{D}0}$ を Neumann 境界とする．なお，集合につけられた記号 $\overline{(\cdot)}$ は閉包を表すことにする．また，本章では，同次 Neumann 境界と非同次 Neumann 境界を区別することにして，初期領域の非同次 Neumann 境界を $\Gamma_{p0} \subset \Gamma_{\mathrm{N}0}$ とかく．さらに，のちに式 (9.6.1) で定義される $m+1$ 個の評価関数 f_0 (目的関数) および $f_1, \ldots, f_m$ (制約関数) の中の境界積分で使われる被積分関数を $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ に対して $\eta_{\mathrm{N}i}$ とかくことにして，$\Gamma_{\eta i0} \subset \Gamma_{\mathrm{N}0}$ 上で非零とする．Γ_{p0} あるいは $\Gamma_{\eta i0}$ が変動すると仮定する場合には，これらの境界は区分的に $H^3 \cap C^{1,1}$ 級で， $d = 3$ のときそれらの境界 $\partial\Gamma_{p0}$ あるいは $\partial\Gamma_{\eta i0}$ は $H^2 \cap C^{0,1}$ 級であると仮定する．また，それらの境界を Γ_0 とかくとき，図 9.3 のように，Γ_0 (Γ_0 は開集合で $\partial\Gamma_0$ を除

く) 上の角点 ($d=2$ のとき) あるいは辺 ($d=3$ のとき) の集合を Θ_0 とかき，Θ_0 に含まれる辺 ($d=3$ のとき) は $H^2 \cap C^{0,1}$ 級であると仮定する．$\Gamma_{(\,\cdot\,)}$ のときには $\Theta_{(\,\cdot\,)}$ とかくことにする．

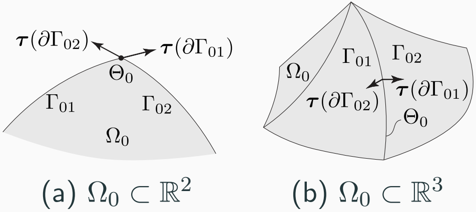


図 9.3: 境界 $\Gamma_0 = \Gamma_{01} \cup \Gamma_{02} \cup (\partial\Gamma_{01} \cap \partial\Gamma_{02}) \subset \partial\Omega_0$ 上の角点 ($d = 2$ のとき) あるいは辺 ($d = 3$ のとき) の集合 $\Theta_0 = \partial\Gamma_{01} \cap \partial\Gamma_{02}$ および $\partial\Gamma_{01}$ と $\partial\Gamma_{02}$ の外向き接線 $\boldsymbol{\tau}(\partial\Gamma_{01})$ と $\boldsymbol{\tau}(\partial\Gamma_{02})$

Ω_0 が変動したあとの領域を定義しよう．$\boldsymbol{i}$ は恒等写像を表すことにする．このとき，Ω_0 が変動したあとの領域は，連続な 1 対 1 写像 $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{\phi}:\Omega_0\to\mathbb{R}^d$ によって，$(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{\phi})(\Omega_0)=\{(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{\phi})(\boldsymbol{x})\mid \boldsymbol{x}\in\Omega_0\}$ のようにつくられると仮定する．すなわち，$\boldsymbol{\phi}$ は領域写像の変位を表すものとする．$(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{\phi})(\Omega_0)$ は $\boldsymbol{\phi}$ によってつくられた領域であることから，$\Omega(\boldsymbol{\phi})$ とかくことにする．同様に，初期の領域や境界 $(\,\cdot\,)_0$ に対して $(\,\cdot\,)(\boldsymbol{\phi})$ は $\{(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{\phi})(\boldsymbol{x})\mid \boldsymbol{x}\in(\,\cdot\,)_0\}$ を意味するものとする．

設計変数にこのような ϕ を選んだ場合，ϕ の定義域は Ω_0 で固定されていたとしても，領域が変動するために，状態決定問題の解の定義域が動いてしまうことになる．一般的な関数最適化問題では，このような事態は想定されていない．しかし，Calderón の拡張定理 (定理 4.4.4) により，ϕ の定義域を十分大きな有界領域 $D \subset \mathbb{R}^d$ に拡張すれば，通常の関数最適化問題の条件は満たされることになる．

そこで，定理 4.4.4 の仮定 ($p > 1$ に対して $\phi \in W^{1,p}\left(\Omega_0; \mathbb{R}^d\right)$) が満たされたもとで，$\phi$ の定義域を Ω_0 から十分大きな有界領域 $D \subset \mathbb{R}^d$ に拡張することにする．さらに，のちに関数空間上の勾配法を考えることから，設計変数

ϕ が入る関数空間は Hilbert 空間であることが必要となる．そこで，本章では，設計変数の線形空間を

$$X = \left\{ \phi \in H^1 \left(D; \mathbb{R}^d \right) \mid \phi = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \partial D \cup \bar{\Omega}_{\mathrm{C0}} \right\} \tag{9.1.1}$$

と定義する．ただし，$\bar{\Omega}_{\mathrm{C0}} \subset \bar{\Omega}_0$ は設計上の制約で領域変動を拘束する領域の閉包あるいは境界を表すものとする．本章では，$\bar{\Omega}_{\mathrm{C0}} = \emptyset$ (すなわち，$X = H^1 \left(D; \mathbb{R}^d \right)$) とみなして議論を進めることにして，$\bar{\Omega}_{\mathrm{C0}}$ の測度が正値をもつことを仮定するときにはその条件を明示することにする．

　しかし，ϕ を X の要素とした場合，$\Omega(\phi)$ が Lipschitz 領域となる保証はない．Lipschitz 領域となるためには，ϕ は $C^{0,1} \left(D; \mathbb{R}^d \right)$ の要素でなければならない．また，領域変動を同じ条件で繰り返すためには，$\partial\Omega_0$ に対する条件

$(\Gamma_{p0} \cup \Gamma_{\eta 00} \cup \Gamma_{\eta 10} \cup \cdots \cup \Gamma_{\eta m0} \setminus \bar{\Omega}_{\mathrm{C0}}$ は区分的に $H^3 \cap C^{1,1}$ 級) が変動後の $\partial\Omega(\phi)$ でも満たされている必要がある．さらに，最適形状の存在を保証するためには，9.7 節で示されるように，ϕ の集合は X 上でコンパクトでなければならない．これらの条件を考慮して，領域変動に対する関数や汎関数の Fréchet 微分を定義する際に用いる ϕ の線形空間を

$$Y = \begin{cases} X \cap H^2 \cap C^{0,1}\left(D;\mathbb{R}^d\right) & (\tilde{\Gamma}_0 = \emptyset \text{ or } \tilde{\Gamma}_0 \subset \bar{\Omega}_{\mathrm{C0}}) \\ X \cap H^3 \cap C^{1,1}\left(D;\mathbb{R}^d\right) & (\tilde{\Gamma}_0 \not\subset \bar{\Omega}_{\mathrm{C0}}) \end{cases} \tag{9.1.2}$$

とおく．ただし，$\tilde{\Gamma}_0$ は，9.5 節以降においては $\Gamma_{p0} \cup \Gamma_{\eta 00} \cup \Gamma_{\eta 10} \cup \cdots \cup \Gamma_{\eta m0}$ とする．それまでは，区分的に $H^3 \cap C^{1,1}$ 級を仮定された境界とする．さらに，設計変数の許容集合を

$$\mathcal{D} = \left\{ \phi \in Y \;\middle|\; \begin{cases} |\phi|_{C^{0,1}(D;\mathbb{R}^d)} \leq \sigma, \\ \|\phi\|_{H^2 \cap C^{0,1}(D;\mathbb{R}^d)} \leq \beta & (\tilde{\Gamma}_0 = \emptyset \text{ or } \tilde{\Gamma}_0 \subset \bar{\Omega}_{\mathrm{C}0}), \\ \|\phi\|_{H^3 \cap C^{1,1}(D;\mathbb{R}^d)} \leq \beta & (\tilde{\Gamma}_0 \not\subset \bar{\Omega}_{\mathrm{C}0}) \end{cases} \right\} \tag{9.1.3}$$

とおく．ただし，$\|\phi\|_{H^2 \cap C^{0,1}(D;\mathbb{R}^d)}$ は $\max\left\{\|\phi\|_{H^2(D;\mathbb{R}^d)}, \|\phi\|_{C^{0,1}(D;\mathbb{R}^d)}\right\}$ を表すことにする．ここで，$\sigma \in (0,1)$ と β は正定数とする．

$|\cdot|_{C^{0,1}(D;\mathbb{R}^d)} = \|\cdot\|_{C^{0,1}(D;\mathbb{R}^d)} - \|\cdot\|_{C(D;\mathbb{R}^d)}$ は Lipschitz 定数を表す (式 (4.3.2))．$|\phi|_{C^{0,1}(D;\mathbb{R}^d)} \leq \sigma$ は，$\boldsymbol{i}+\boldsymbol{\phi}$ とその逆写像 $(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{\phi})^{-1}$ がそれぞれ Ω_0 と $\Omega(\boldsymbol{\phi})$ 上の Lipschitz 写像 (双 Lipschitz 写像) になるための条件を表す (たとえば，[60, Proposition 1.41, p. 23], [64])．実際，この条件を満たせば $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{\phi}$ は Ω_0 上で全射の Lipschitz 写像である．また，任意の $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0 \in \Omega_0$ に対して，

$$\begin{aligned}\|(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{\phi})(\boldsymbol{x}_0) - (\boldsymbol{i}+\boldsymbol{\phi})(\boldsymbol{y}_0)\|_{\mathbb{R}^d} &\geq \|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{y}_0\|_{\mathbb{R}^d} - \|\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{y}_0)\|_{\mathbb{R}^d} \\ &\geq (1-\sigma)\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{y}_0\|_{\mathbb{R}^d}\end{aligned}$$

が成り立つので，$(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{\phi})(\boldsymbol{x}_0) = (\boldsymbol{i}+\boldsymbol{\phi})(\boldsymbol{y}_0)$ ならば $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{y}_0$ となり，$\boldsymbol{i}+\boldsymbol{\phi}$ は単射となる．そこで，$(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{\phi})^{-1}$ が存在して，任意の $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1 \in \Omega(\boldsymbol{\phi})$ に対して，

$$\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{y}_1\|_{\mathbb{R}^d} \geq (1-\sigma)\left\|(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{\phi})^{-1}(\boldsymbol{x}_1) - (\boldsymbol{i}+\boldsymbol{\phi})^{-1}(\boldsymbol{y}_1)\right\|_{\mathbb{R}^d}$$

が成り立つ．この不等式は，$(\boldsymbol{i}+\phi)^{-1}$ が $\Omega(\phi)$ 上の Lipschitz 写像であることを示している．一方，$\mathcal{D}$ が X 上のコンパクト集合となることは，Rellich-Kondrachov のコンパクト埋蔵定理 (定理 4.4.15) による．

今後の議論では，ϕ は $\mathcal{D}$ 上の内部 $\mathcal{D}^{\circ}$ にあって，$\Omega(\phi)$ が与えられたとき，そこからの任意の領域変動は，図 9.4 のような $\varphi \in Y$ を用いて，

$$(\Omega(\phi))(\varphi) = ((\boldsymbol{i}+\varphi) \circ (\boldsymbol{i}+\phi))(\Omega_0),$$

のように与えられると仮定する．ただし，$\circ$ は合成写像を表す．しかしながら，今後の議論で，関数や汎関数の形状微分を，古典的な定義とは異なり，$\varphi \in X$ (定義 9.1.1, 9.1.3, 9.1.4) の有界線形作用素として定義する．$\varphi \in X$ に対する Fréchet 微分では，$(\Omega(\phi))(\varphi)$ は $\Omega(\phi+\varphi)$ のように線形化される．

そこで，本章では，基本的に φ は X の要素であると仮定して，問題設定や使われる解法に基づいて得られる φ が Y に入り，それによって $\phi+\epsilon\varphi$ (ϵ は正定数) が $\mathcal{D}$ に入ることを確認することにする．

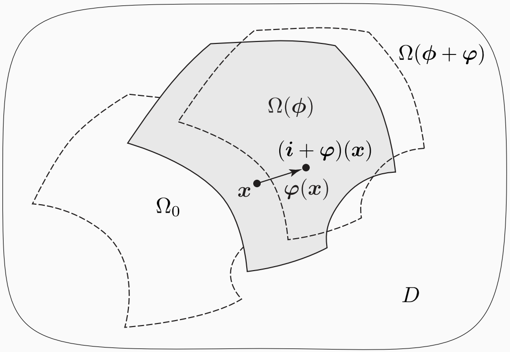
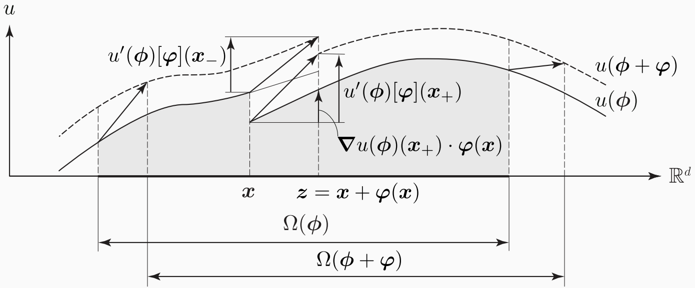


図 9.4: $\Omega(\phi)$ からの領域変動 $\boldsymbol{\varphi} \in Y$

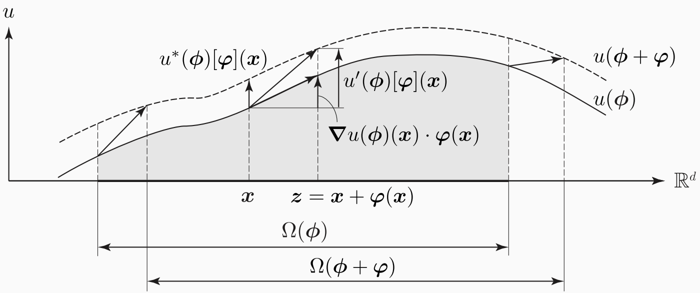
§9.1.3　形状微分の定義

　領域が動く問題では，そのうえで定義された関数や積分もそれに伴って変動する．ここでは，それらに対する**形状微分**の定義を示しておこう．

　$\phi_0 \in \mathcal{D}^\circ$ を固定して，その近傍 $B \subset Y$ 上の $\phi \in B$ に対して，$\Omega(\phi)$ からの任意の領域変動 $\varphi \in Y$ を考える．領域が $\Omega(\phi)$ から $\Omega(\phi + \varphi)$ に変動したとき，そのうえで定義されていた関数も動くと仮定する．このとき，ϕ のときの関数を $u(\phi)$ とかき，$\Omega(\phi)$ の拡張領域 D 上の点 x で定義された関数を $u(\phi)(x)$ とかくことにする．この表記法を用いて，**関数の形状微分**を次のように定義する．



(a) $u(\phi)$ が不連続関数の場合



(b) $u(\phi)$ が連続関数の場合

図 9.5: 領域変動とともに変動する関数 $u(\phi)$

定義 9.1.1 (関数の形状微分)

$\phi_0 \in \mathcal{D}^\circ$ の近傍 $B \subset Y$ 上のすべての $\phi \in B$ において，$u : B \to L^2(D;\mathbb{R})$ が定義されているとする．$\boldsymbol{x} \in D$ における $u(\phi)$ の値を $u(\phi)(\boldsymbol{x})$ とかくことにする．このとき，任意の $\varphi \in Y$ に対して，

$$\lim_{\|\varphi\|_Y \to 0} \frac{\|u(\phi + \varphi)(\boldsymbol{x} + \varphi(\boldsymbol{x})) - u(\phi)(\boldsymbol{x}) + u'(\phi)[\varphi](\boldsymbol{x})\|_{L^2(D;\mathbb{R})}}{\|\varphi\|_X} = 0$$

を満たす有界線形作用素 $u'(\phi)[\,\cdot\,] : Y \to L^2(D;\mathbb{R})$ が存在し，かつ $u'(\phi)[\,\cdot\,] : X \to L^2(D;\mathbb{R})$ も有界線形作用素となるとき，$u'(\phi)[\varphi]$ を ϕ における u の形状微分という．すべての $\phi \in B$ に対して $u'(\phi)[\varphi]$ が存在して $C(B;\mathcal{L}(X;L^2(D;\mathbb{R})))$ に属するとき，$u \in C^1_{S'}(B;L^2(D;\mathbb{R}))$ とかく．

定義 9.1.1 において，次の点について考慮された．

注意 9.1.2 (形状微分)

定義 9.1.1 では，$u'(\phi)[\,\cdot\,]$ が Y 上の有界線形作用素であると同時に，X 上の有界線形作用素であることを条件にしている．Y が X にコンパクトに埋蔵されていれば，X 上の有界線形作用素は Y 上の有界線形作用素でもあることになる (演習問題 4.4)．このような定義にした理由は，任意の $\varphi \in X$ によって変動したあとの領域 $\Omega(\phi + \varphi)$ が定義されないことを避けるためである．このように定義したことで，形状微分を Y 上の有界線形作用素であるとしたときよりも強い正則性が要求される．これ以降，形状微分に関するいくつかの定義が現れるが，同様の理由で X 上の有界線形作用素であることを要求することにする．

連続体力学では，定義 9.1.1 の $u(\phi+\varphi)(\boldsymbol{x}+\varphi(\boldsymbol{x}))$ は $u(\phi)(\boldsymbol{x})$ の Lagrange 表示とよばれ，$u'(\phi)[\varphi]$ は物質微分とよばれる．

図 9.5 (a) に $u'(\phi)[\varphi]$ を示す．ここで，$u \in L^2(D;\mathbb{R})$ が不連続関数であっても φ が連続関数であれば $u'(\phi)[\varphi]$ を定義できることがわかる．

次に，領域が変動しても $\Omega(\phi)$ の拡張領域 D 上の点 x を固定して $u(\phi+\varphi)(x)$ の変化を追ったときの微分を考える．このときの u の φ に対する Fréchet 微分を関数の形状偏微分とよび，次のように定義する．

定義 9.1.3 (関数の形状偏微分)

$\phi_0 \in \mathcal{D}^\circ$ の近傍 $B \subset Y$ 上のすべての $\phi \in B$ において，$u : B \to C^{0,1}(D;\mathbb{R})$ が定義されているとする．$\boldsymbol{x} \in D$ における $u(\phi)$ の値を $u(\phi)(\boldsymbol{x})$ とかくことにする．このとき，任意の $\varphi \in Y$ に対して，

$$\lim_{\|\varphi\|_Y \to 0} \frac{\|u(\phi+\varphi)(\boldsymbol{x}) - u(\phi)(\boldsymbol{x}) + u^*(\phi)[\varphi](\boldsymbol{x})\|_{C^{0,1}(D;\mathbb{R})}}{\|\varphi\|_X} = 0$$

を満たす有界線形作用素 $u^*(\phi)[\,\cdot\,] : Y \to C^{0,1}(D;\mathbb{R})$ が存在し，かつ $u^*(\phi)[\,\cdot\,] : X \to C^{0,1}(D;\mathbb{R})$ も有界線形作用素となるとき，$u^*(\phi)[\varphi]$ を ϕ における u の形状偏微分という．すべての $\phi \in B$ に対して $u^*(\phi)[\varphi]$ が存在して $C(B;\mathcal{L}(X;C^{0,1}(D;\mathbb{R})))$ に属するとき，$u \in C^1_{\mathrm{S}^*}(B;C^{0,1}(D;\mathbb{R}))$ とかく．

定義 9.1.3 の $u(\phi+\varphi)(\boldsymbol{x})$ は，連続体力学では $u(\phi)(\boldsymbol{x})$ の Euler 表示とよばれ，$u^*(\phi)[\varphi]$ は空間微分とよばれる．

図 9.5 (b) に $u^*(\phi)[\varphi]$ を示す．ここで，$u \in C^{0,1}(D;\mathbb{R})$ が連続関数であるために $u^*(\phi)[\varphi]$ の定義が有効になっていることに注意されたい．実際，図 9.5 (a) のように，u が不連続関数の場合には，φ による領域変動の間に，u の不連続点が横切るような $\boldsymbol{x}$ では，$u^*(\phi)[\varphi]$ が定義されない．

また，$u \in C^1_{\mathrm{S}^*}(B; C^{0,1}(D;\mathbb{R}))$ のとき，

$$
\begin{aligned}
&u(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) \\
&\quad = u(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{\phi}) \cdot \boldsymbol{\varphi} + o(\|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\|_X)
\end{aligned}
$$

$$= u(\phi)(\boldsymbol{x}) + u^*(\phi)[\boldsymbol{\varphi}](\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\nabla} u(\phi) \cdot \boldsymbol{\varphi} + o(\|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\|_X)$$

が成り立つ．これより，任意の $\boldsymbol{\varphi} \in X$ に対して，

$$u'(\phi)[\boldsymbol{\varphi}] = u^*(\phi)[\boldsymbol{\varphi}] + \boldsymbol{\nabla} u(\phi) \cdot \boldsymbol{\varphi} \tag{9.1.4}$$

を得る．なお，$\boldsymbol{x} = (x_i)_{i\in\{1,\dots,d\}} \in \mathbb{R}^d$ に対して $(\partial(\,\cdot\,)/x_1, \dots, \partial(\,\cdot\,)/x_d)^\top$ を $\boldsymbol{\nabla}(\,\cdot\,)$ とかくことにする．式 (9.1.4) の左辺は $u'(\phi)[\,\cdot\,] : X \to L^2(D;\mathbb{R})$ となり，$u \in C^1_{\mathrm{S}'}(B; L^2(D;\mathbb{R}))$ が成り立つ．

さらに，変動する領域の上で定義された汎関数の形状微分を次のように定義する．本章では，$\boldsymbol{z} \in \Omega(\phi + \boldsymbol{\varphi})$ に対して，$\boldsymbol{\nabla}_z = (\partial(\,\cdot\,)/z_1, \dots, \partial(\,\cdot\,)/z_d)^\top$ とかくことにする．また，$\boldsymbol{\nu}(\phi)$ は $\partial\Omega(\phi)$ 境界で定義された外向き単位法線

(定義 A.5.4) を表し，$\partial_{\nu}(\,\cdot\,) = \boldsymbol{\nu}(\phi) \cdot \boldsymbol{\nabla}(\,\cdot\,)$ とかくのに対して，$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\nu}(\phi + \varphi)$ は $\partial\Omega(\phi + \varphi)$ 上の外向き単位法線を表し，$\partial_{\mu}(\,\cdot\,) = \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\nabla}_z$ とかくことにする．さらに，X の双対空間を X' とかく．

定義 9.1.4 (汎関数の形状微分)

$\phi_0 \in \mathcal{D}^\circ$ の近傍 $B \subset Y$ 上のすべての $\phi \in B$ において，$u : B \to \mathcal{U} = H^3 \cap C^{1,1}(D;\mathbb{R})$ が定まり，$h_0 \in C^1\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d;\mathbb{R}\right)$, $h_1 \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R};\mathbb{R})$ は，$(u, \boldsymbol{\nabla} u, \partial_\nu u) \in \mathcal{U} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G}_{\Gamma(\phi)}$ ($\mathcal{G} = \{\boldsymbol{\nabla} u \mid u \in \mathcal{U}\}$, $\mathcal{G}_{\Gamma(\phi)} = \left\{ \partial_\nu u|_{\Gamma(\phi)} \;\middle|\; u \in \mathcal{U}\right\}$) ($\Gamma(\phi) \subseteq \partial\Omega(\phi)$ は区分的に $H^3 \cap C^{1,1}$ 級とする) に対して，

$$h_0(u, \boldsymbol{\nabla} u), h_{0u}(u, \boldsymbol{\nabla} u) \in L^2(D;\mathbb{R}), \quad h_{0\boldsymbol{\nabla} u}(u, \boldsymbol{\nabla} u) \in L^2\left(D;\mathbb{R}^d\right),$$
$$h_1(u, \partial_\nu u), h_{1u}(u, \partial_\nu u), h_{1\partial_\nu u}(u, \partial_\nu u) \in H^1(D;\mathbb{R})$$

のように与えられているとする．任意の $\varphi \in Y$ に対して，

定義 9.1.4 (汎関数の形状微分)

$$
\begin{aligned}
& f\left(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi}, u\left(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi}\right), \boldsymbol{\nabla}_{z} u\left(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi}\right), \partial_{\mu} u\left(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi}\right)\right) \\
& \quad=\int_{\Omega(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi})} h_{0}\left(u\left(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi}\right)(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{\nabla}_{z} u\left(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi}\right)(\boldsymbol{z})\right) \mathrm{d} z \\
& \qquad+\int_{\Gamma(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi})} h_{1}\left(u\left(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi}\right)(\boldsymbol{z}), \partial_{\mu} u\left(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi}\right)(\boldsymbol{z})\right) \mathrm{d} \zeta
\end{aligned}
\tag{9.1.5}
$$

とおく．$\mathrm{d}z$ と $\mathrm{d}\zeta$ は $\Omega\left(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi}\right)$ のときの領域積分と境界積分で使われる微小測度を表すことにする．このとき，

定義 9.1.4 (汎関数の形状微分)

$$
\begin{aligned}
&f\left(\phi+\varphi, u\left(\phi+\varphi\right), \boldsymbol{\nabla}_z u\left(\phi+\varphi\right), \partial_\mu u\left(\phi+\varphi\right)\right)\\
&\quad = f\left(\phi, u\left(\phi\right), \boldsymbol{\nabla} u\left(\phi\right), \partial_\nu\left(\phi\right)\right)\\
&\qquad + f'\left(\phi, u\left(\phi\right), \boldsymbol{\nabla} u\left(\phi\right), \partial_\nu\left(\phi\right)\right)[\varphi] + o\left(\|\varphi\|_X\right)
\end{aligned}
$$

を満たす有界線形汎関数 $f'\left(\phi, u\left(\phi\right), \boldsymbol{\nabla} u\left(\phi\right), \partial_\nu u\left(\phi\right)\right)[\,\cdot\,] : Y \to \mathbb{R}$ が存在し，かつ $f'\left(\phi, u\left(\phi\right), \boldsymbol{\nabla} u\left(\phi\right), \partial_\nu u\left(\phi\right)\right)[\,\cdot\,] : X \to \mathbb{R}$ も有界線形汎関数ならば，すなわち，$f'\left(\phi, u\left(\phi\right), \boldsymbol{\nabla} u\left(\phi\right), \partial_\nu u\left(\phi\right)\right)[\varphi] = \left\langle \boldsymbol{g}\left(\phi\right), \varphi\right\rangle$ とかける $\boldsymbol{g}\left(\phi\right) \in X'$ が存在すれば，f は ϕ において形状微分可能といい，$\boldsymbol{g}\left(\phi\right)$ を f の形状勾配という．

定義 9.1.4 (汎関数の形状微分)

すべての $\phi \in B$ に対して $f'(\phi, u(\phi), \boldsymbol{\nabla} u(\phi), \partial_\nu(\phi))[\cdot]$ が存在して $C(B; \mathcal{L}(X; \mathbb{R}))$ に属するとき，$f \in C^1_{\mathrm{S}}(B; \mathbb{R})$ とかく．

さらに，任意の $\varphi_1, \varphi_2 \in Y$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \boldsymbol{g}(\phi + \varphi_2), \varphi_1 \circ (\boldsymbol{i} + \varphi_2)^{-1} \right\rangle \\
&\quad = \langle \boldsymbol{g}(\phi), \varphi_1 \rangle + f''(\phi, u(\phi), \boldsymbol{\nabla} u(\phi), \partial_\nu(\phi))[\varphi_1, \varphi_2] \\
&\qquad + o(\|\varphi_1\|_X, \|\varphi_2\|_X)
\end{aligned}
$$

を満たす有界双線形汎関数 $f''(\phi, u(\phi), \boldsymbol{\nabla} u(\phi), \partial_\nu(\phi))[\varphi_1, \varphi_2] = h(\phi)[\varphi_1, \varphi_2] : Y \times Y \to \mathbb{R}$ が存在し，かつ $h(\phi)[\varphi_1, \varphi_2] : X \times X \to \mathbb{R}$ も有界双線形汎関数ならば，f は 2 階形状微分可能といい，$h(\phi)[\varphi_1, \varphi_2]$ を f の 2 階形状微分あるいは形状 Hesse 形式という．

定義 9.1.4 (汎関数の形状微分)

すべての $\phi \in B$ に対して，2 階形状微分が存在して，
$f''(\phi, u(\phi), \boldsymbol{\nabla} u(\phi), \partial_\nu(\phi))[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2] \in C(B; \mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X; \mathbb{R})))$ のとき，
$f \in C_{\mathrm{S}}^2(B; \mathbb{R})$ とかく．

2 階形状微分の定義に従えば，$f''(\boldsymbol{\phi}, u(\boldsymbol{\phi}), \boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{\phi}), \partial_\nu(\boldsymbol{\phi}))[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2]$ は，

$$
\begin{aligned}
& f''(\boldsymbol{\phi}, u(\boldsymbol{\phi}), \boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{\phi}), \partial_\nu(\boldsymbol{\phi}))[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2] \\
& \quad = (f')'(\boldsymbol{\phi}, u(\boldsymbol{\phi}), \boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{\phi}), \partial_\nu(\boldsymbol{\phi}))[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2] + \langle \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\phi}), \boldsymbol{t}(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2) \rangle \qquad (9.1.6)
\end{aligned}
$$

のように分割される [88]．ただし，

$$
\begin{aligned}
& (f')'(\boldsymbol{\phi}, u(\boldsymbol{\phi}), \boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{\phi}), \partial_\nu(\boldsymbol{\phi}))[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2] \\
& \quad = \lim_{\|\boldsymbol{\varphi}_2\|_X \to 0} \frac{1}{\|\boldsymbol{\varphi}_2\|_X} \left(\langle \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}_2), \boldsymbol{\varphi}_1 \rangle - \langle \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\phi}), \boldsymbol{\varphi}_1 \rangle \right) \qquad (9.1.7) \\
& \langle \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\phi}), \boldsymbol{t}(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2) \rangle
\end{aligned}
$$

$$= \lim_{\|\boldsymbol{\varphi}_2\|_X \to 0} \frac{1}{\|\boldsymbol{\varphi}_2\|_X} \left\langle \boldsymbol{g}\left(\phi + \boldsymbol{\varphi}_2\right), \boldsymbol{\varphi}_1 \circ \left(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{\varphi}_2\right)^{-1} - \boldsymbol{\varphi}_1 \right\rangle \tag{9.1.8}$$

とおく．式 (9.1.7) は，$\boldsymbol{g}\left(\phi + \boldsymbol{\varphi}_2\right)$ の $\boldsymbol{\varphi}_2$ の変動に対する微分を表しており，汎関数の 2 階微分を計算するときにいつも現れる最適化問題に共通の成分である．一方，式 (9.1.8) は，変動ベクトル $\boldsymbol{\varphi}_1$ の $\boldsymbol{\varphi}_2$ による変動を補正する成分で，領域変動型の形状最適化問題に固有の成分である．式 (9.1.8) の $\boldsymbol{\varphi}_1 \circ \left(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{\varphi}_2\right)^{-1} - \boldsymbol{\varphi}_1$ は，$\boldsymbol{i} + \boldsymbol{\varphi}_2$ の逆写像による $\boldsymbol{\varphi}_1$ の変動を表している．この項のみを計算すれば，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}\left(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2\right) &= \lim_{\|\boldsymbol{\varphi}_2\|_X \to 0} \frac{1}{\|\boldsymbol{\varphi}_2\|_X} \left(\boldsymbol{\varphi}_1 \circ \left(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{\varphi}_2\right)^{-1} - \boldsymbol{\varphi}_1\right) \\ &= -\left(\boldsymbol{\varphi}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top\right)^\top = -\left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top\right)^\top \boldsymbol{\varphi}_2 \end{aligned} \tag{9.1.9}$$

となる．すなわち，$i+\varphi_2$ の逆写像を線形化したときの座標の移動ベクトルは $-\varphi_2$ であり，変動する関数値は φ_1 である．式 (9.1.4) において，u を $\varphi_1^\top$ に置き換えて，$\varphi_1^*(\phi)[-\varphi_2]=\mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$ とおいたときの $\varphi_1'(\phi)(\phi)[-\varphi_2]$ が式 (9.1.9) の右辺を与える．

しかしながら，式 (9.1.9) は，φ に対して成り立つ関係であり，$\boldsymbol{\nabla}\varphi^\top$ や $\boldsymbol{\nabla}\cdot\varphi$ に対しては成り立たない．$i+\varphi_2$ の逆写像が $\boldsymbol{\nabla}$ に対しても適用されるからである．$\boldsymbol{\nabla}\varphi^\top$ と $\boldsymbol{\nabla}\cdot\varphi$ に対するこれらの計算は，のちに式 (9.3.11) で与えられる．

9.2 Jacobi 行列式の形状微分

領域変動および関数と汎関数の形状微分の定義が示されたので，それに基づいて，領域変動 $\varphi \in Y$ に伴う Jacobi 行列式と Jacobi 逆行列の形状微分を求めておこう．これらは関数と汎関数の形状微分の公式を求めるときに使われる．

$\phi_0 \in \mathcal{D}^\circ$ を固定して，その近傍 $B \subset Y$ 上のすべての $\phi \in B$ に対して，$\Omega(\phi)$ からの任意の領域変動 $\varphi \in Y$ を考える．このとき，写像 $i + \varphi$ に対する Jacobi 行列と Jacobi 行列式を

$$
\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{I} + \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{\top}\right)^{\top}, \tag{9.2.1}
$$

$$
\omega(\boldsymbol{\varphi}) = \det \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}) \tag{9.2.2}
$$

とかくことにする[3]．ここで，$\boldsymbol{I}$ は単位行列を表す．$\omega(\boldsymbol{\varphi})$ は，$\Omega(\phi)$ の測度 $\mathrm{d}x$ と $\Omega(\phi+\boldsymbol{\varphi})$ 上の $\mathrm{d}x$ に対応する測度 $\mathrm{d}z$ に対して，$\mathrm{d}z = \omega(\boldsymbol{\varphi})\,\mathrm{d}x$ を与える関数となる．ここでは，領域上と境界上で定義された Jacobi 行列式に分けて，それらの形状微分についてみていくことにしよう．

[3] 通常は $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{\varphi})$ とかくが，ここでは，弾性論の変形勾配テンソルの表記法を用いることにする．

§9.2.1 領域 Jacobi 行列式の形状微分

まず，式 (9.2.2) で定義された $\omega(\varphi)$ の $\varphi_0 = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$ における形状微分は次のように得られる．

命題 9.2.1 (領域 Jacobi 行列式の形状微分)

$\phi_0 \in \mathcal{D}^\circ$ の近傍 $B \subset Y$ 上の $\phi \in B$ において，任意の $\varphi \in Y$ に対して，

$$\omega'(\varphi_0)[\varphi] = \boldsymbol{\nabla} \cdot \varphi$$

が成り立つ．さらに，$\omega'(\varphi_0)[\varphi]$ は $C(B; \mathcal{L}(X; L^2(D; \mathbb{R})))$ にも入る．

証明　$\boldsymbol{x} \in D$ に対して

$$\omega(\boldsymbol{\varphi}) = \det\left(\boldsymbol{I} + \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^\top\right)^\top\right) = \det\begin{pmatrix} 1+\varphi_{1,1} & \cdots & \varphi_{1,d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{d,1} & \cdots & 1+\varphi_{d,d} \end{pmatrix}$$

$$= 1 + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi} + \sum_{(i,j)\in\{1,\dots,d\}^2} o\left(\|\varphi_{i,j}\|_{L^2(D;\mathbb{R})}\right)$$

が成り立つ． $\square$

命題 9.2.2 (領域 Jacobi 逆行列の形状微分)

$\phi_0 \in \mathcal{D}^\circ$ の近傍 $B \subset Y$ 上の $\phi \in B$ において，任意の $\varphi \in Y$ に対して，

$$\boldsymbol{F}^{-\top\prime}(\varphi_0)[\varphi] = -\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^\top$$

が成り立つ．さらに，$\boldsymbol{F}^{-\top\prime}(\varphi_0)[\varphi]$ は $C\left(B;\mathcal{L}\left(X;L^2\left(D;\mathbb{R}^{d\times d}\right)\right)\right)$ にも入る．

証明　$\boldsymbol{x} \in D$ に対して

$$\boldsymbol{F}^{-\top}(\boldsymbol{\varphi})\left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{\top}\right) = \boldsymbol{I}$$

が成り立つ．ϕ で φ に対するその形状微分をとれば，

$$\boldsymbol{F}^{-\top\prime}(\boldsymbol{\varphi}_0)[\boldsymbol{\varphi}] + \boldsymbol{F}^{-\top}(\boldsymbol{\varphi}_0)\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{\top}\right) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{d\times d}}$$

となる．$\boldsymbol{F}^{-\top}(\boldsymbol{\varphi}_0) = \boldsymbol{I}$ より，本命題の結果が得られる．　$\square$

次に，境界の Jacobi 行列式に関する形状微分の公式を求めておく．領域変動型の形状最適化問題では，評価関数や状態決定問題の Lagrange 関数に境界積分が現れる．そのような境界積分の形状微分を求める際に，境界 Jacobi 行列式と法線の形状微分が必要となるためである．

$\partial\Omega(\phi)$ の微小測度と外向き単位法線を $\mathrm{d}\gamma(\phi)$ と $\boldsymbol{\nu}(\phi)$ のように表す．なお，Lipschitz 境界上の法線は，境界近傍の座標系で境界をグラフとして定義したときのグラフに対する法線で定義され，$L^\infty\left(\partial\Omega(\phi);\mathbb{R}^d\right)$ に入ると仮定とされる [28, 63]．ここでは，$\partial\Omega(\phi)$ は区分的に $H^2 \cap C^{0,1}$ 級と仮定して，$\boldsymbol{\nu}(\phi) \in H^{1/2} \cap L^\infty\left(\partial\Omega(\phi);\mathbb{R}^d\right)$ と仮定する．

このとき，任意の $\varphi \in Y$ に対して，

$$\varpi(\boldsymbol{\varphi}) = \frac{\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi})}{\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{\phi})} = \omega(\boldsymbol{\varphi})\,\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}) \cdot \left(\boldsymbol{F}^{-\top}(\boldsymbol{\varphi})\,\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\phi})\right) \tag{9.2.3}$$

が成り立つ．この関係は，次の命題から得られる．

命題 9.2.3 (Nanson の公式)

$\phi_0 \in \mathcal{D}^\circ$ の近傍 $B \subset Y$ 上の $\phi \in B$ において，$\partial\Omega(\phi)$ は区分的に $H^2 \cap C^{0,1}$ 級とする．このとき，任意の $\varphi \in Y$ に対して，

$$\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi})\,\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}) = \omega(\boldsymbol{\varphi})\,\boldsymbol{F}^{-\top}(\boldsymbol{\varphi})\,\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\phi})\,\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{\phi}) \tag{9.2.4}$$

が成り立つ．また，$\omega(\boldsymbol{\varphi})\,\boldsymbol{F}^{-\top}(\boldsymbol{\varphi})\,\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\phi})$ は $L^\infty(\partial\Omega(\boldsymbol{\phi});\mathbb{R})$ に入る．

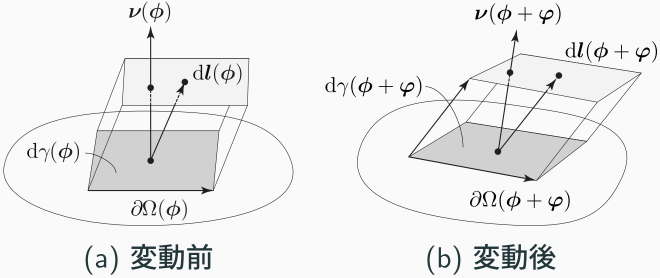


図 9.6: 微小測度 $\mathrm{d}\gamma\,(\boldsymbol{\phi})$ と $\mathrm{d}\gamma\,(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi})$

証明　$\mathrm{d}\boldsymbol{l}(\phi) \in \mathbb{R}^d$ を $\mathrm{d}\gamma(\phi)$ 上の $\boldsymbol{\nu}(\phi) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}(\phi) > 0$ を満たす任意ベクトルとして，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}(\phi + \varphi)$ を写像 $\boldsymbol{i} + \varphi$ により変換されたベクトルとする．このとき，図 9.6 に示される平行 6 面体の体積について

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}) \, \mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}) = \omega(\boldsymbol{\varphi}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\phi}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\phi}) \, \mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{\phi})$$

が成り立つ．ここで，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}(\phi + \varphi) = \boldsymbol{F}(\varphi) \, \mathrm{d}\boldsymbol{l}(\phi)$ を上式に代入すれば，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\phi}) \cdot \left(\boldsymbol{F}^{\top}(\boldsymbol{\varphi}) \, \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}) \right) \mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}) = \mathrm{d}\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\phi}) \cdot (\omega(\boldsymbol{\varphi}) \, \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\phi})) \, \mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{\phi})$$

が得られる．$\mathrm{d}\boldsymbol{l}(\phi)$ は任意なので，式 (9.2.4) が得られる．　$\square$

式 (9.2.4) は，領域変動による座標変換に伴う 2 階テンソル (行列) 関数の関係式を与える Piola 変換を使って得ることもできる [25, Theorem 1.7-1]．任意の $\varphi \in Y$ に対する 2 階テンソル値関数 $\boldsymbol{A} \in C^1\left(D; \mathbb{R}^{d\times d}\right)$ の Piola 変換 $\boldsymbol{A}(\varphi)$ は，Jacobi 行列 $\boldsymbol{F}(\varphi)$ の余因子行列 $\omega(\varphi)\boldsymbol{F}^{-\top}(\varphi)$ を用いて，

$$\boldsymbol{A} = \omega(\varphi)\boldsymbol{A}(\varphi)\boldsymbol{F}^{-\top}(\varphi)$$

によって定義される．$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \varphi(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{i} + \varphi)(\boldsymbol{x})$ を $\Omega(\phi)$ 上の点 $\boldsymbol{x}$ の許容変動 φ による移動先を表し，$\partial(\,\cdot\,)/\partial \boldsymbol{z}$ を $\boldsymbol{\nabla}_z$ とかくことにするとき，

$$\int_{\Omega(\phi)} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega(\phi)} \boldsymbol{A}\boldsymbol{\nu}(\phi)\,\mathrm{d}\gamma(\phi)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \boldsymbol{\nabla}_z \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\varphi})\, \omega(\boldsymbol{\varphi})\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi})} \boldsymbol{\nabla}_z \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\varphi})\, \mathrm{d}z \\
&= \int_{\partial\Omega(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi})} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\varphi})\, \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi})\, \mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi})
\end{aligned}
$$

が成り立つ．上式の境界積分に関する等式に，Piola 変換を代入し，
$\boldsymbol{A}(\varphi) = \boldsymbol{I}$ とおけば，式 (9.2.4) を得る．

式 (9.2.4) の両辺と $\boldsymbol{\nu}(\phi+\varphi)$ の内積をとれば，式 (9.2.3) が得られる．また，式 (9.2.4) より，$\boldsymbol{\nu}(\phi+\varphi)$ は $\boldsymbol{F}^{-\top}(\varphi)\boldsymbol{\nu}(\phi)$ の方向をもった単位ベクトルであることから

$$\boldsymbol{\nu}(\phi+\varphi)=\frac{\boldsymbol{F}^{-\top}(\varphi)\boldsymbol{\nu}(\phi)}{\left\|\boldsymbol{F}^{-\top}(\varphi)\boldsymbol{\nu}(\phi)\right\|_{\mathbb{R}^d}} \tag{9.2.5}$$

が成り立つ．

これらの関係に基づけば，式 (9.2.3) の $\varpi(\varphi)$ の形状微分は命題 9.2.4 のように得られる．以下では，$\partial\Omega(\phi)$ 上の接線 (定義 A.5.3) を $\boldsymbol{\tau}_1(\phi)$, $\ldots, \boldsymbol{\tau}_{d-1}(\phi)$ のようにかくことにする．また，平均曲率 (定義 A.5.5) の $d-1$ 倍 (主曲率の和) を $\kappa(\phi)=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nu}(\phi)$ のようにかくことにする．なお，

Lipschitz 境界上の接線は，法線と同様に，境界近傍の座標系で境界をグラフとして定義したときのグラフの接線として定義され，$L^{\infty}\left(\partial\Omega(\phi);\mathbb{R}^d\right)$ に入ると仮定する．平均曲率も法線の導関数に対して同様に定義され，区分的に $C^{1,1}$ 級の境界に対して，$L^{\infty}(\partial\Omega(\phi);\mathbb{R})$ に入ると仮定とされる．ここでは，$\partial\Omega(\phi)$ は区分的に $H^3\cap C^{1,1}$ 級と仮定して，$\kappa(\phi)\in H^{1/2}\cap L^{\infty}(\partial\Omega(\phi);\mathbb{R})$ と仮定する．また，$\boldsymbol{\nabla}_{\tau}(\,\cdot\,)=(\boldsymbol{\tau}_j(\phi)\cdot\boldsymbol{\nabla})_{j\in\{1,\dots,d-1\}}(\,\cdot\,)\in\mathbb{R}^{d-1}$ および $\boldsymbol{\varphi}_{\tau}=(\boldsymbol{\tau}_j(\phi)\cdot\boldsymbol{\varphi})_{j\in\{1,\dots,d-1\}}\in\mathbb{R}^{d-1}$ とかくことにする．これ以降，$\boldsymbol{\nu}(\phi)$, $\boldsymbol{\tau}_1(\phi)$, ... , $\boldsymbol{\tau}_{d-1}(\phi)$ および $\kappa(\phi)$ は単に $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\tau}_1$, ... , $\boldsymbol{\tau}_{d-1}$ および κ とかくことにする．

命題 9.2.4 (境界 Jacobi 行列式の形状微分)

$\phi_0 \in \mathcal{D}^\circ$ の近傍 $B \subset Y$ 上の $\phi \in B$ において，$\partial\Omega(\phi)$ は区分的に $H^2 \cap C^{0,1}$ 級とする．このとき，任意の $\varphi \in Y$ に対して，

$$\varpi'(\varphi_0)[\varphi] = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi})_\tau = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\nu} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^\top \boldsymbol{\nu}\right) \tag{9.2.6}$$

が成り立つ．さらに，$\partial\Omega(\phi)$ が区分的に $H^3 \cap C^{1,1}$ 級ならば，

$$\varpi'(\varphi_0)[\varphi] = \kappa\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\nabla}_\tau \cdot \boldsymbol{\varphi}_\tau \tag{9.2.7}$$

が成り立つ．また，$\varpi'(\varphi_0)[\varphi]$ は $C(B; \mathcal{L}(Y; L^\infty(\partial\Omega(\phi); \mathbb{R})))$ に入る．

証明　式 (9.2.3) と式 (9.2.5) より，

$$\varpi(\varphi) = \omega(\varphi) \left\| \boldsymbol{F}^{-\top}(\varphi)\boldsymbol{\nu} \right\|_{\mathbb{R}^d}$$

が得られる．式 (9.2.6) は，命題 9.2.1 と命題 9.2.2 より

$$\begin{aligned} \varpi'(\varphi_0)[\varphi] &= \omega'(\varphi_0)[\varphi] \left\| \boldsymbol{F}^{-\top}(\varphi_0)\boldsymbol{\nu} \right\|_{\mathbb{R}^d} \\ &\quad + \omega(\varphi_0)\left(\boldsymbol{F}^{-\top}(\varphi_0)\boldsymbol{\nu}\right) \cdot \left(\boldsymbol{F}^{-\top\prime}(\varphi_0)[\varphi]\boldsymbol{\nu}\right) / \left\| \boldsymbol{F}^{-\top}(\varphi_0)\boldsymbol{\nu} \right\|_{\mathbb{R}^d} \\ &= \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\nu} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{\top}\boldsymbol{\nu}\right) \end{aligned}$$

によって得られる．

さらに，その境界が区分的に $H^3 \cap C^{1,1}$ 級ならば，ほとんど至るところ $\kappa = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nu}$ が定義できて，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi} &= \boldsymbol{\nabla} \cdot \left\{ (\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \, \boldsymbol{\nu} + \sum_{j \in \{1,\dots,d-1\}} (\boldsymbol{\tau}_j \cdot \boldsymbol{\varphi}) \, \boldsymbol{\tau}_j \right\} \\ &= \partial_\nu (\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi}) + \kappa (\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi}) + \boldsymbol{\nabla}_\tau \cdot \boldsymbol{\varphi}_\tau \end{aligned} \tag{9.2.8}$$

とかける．ただし，$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau}_1 = 0, \dots, \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau}_{d-1} = 0$ を用いた．なぜならば，$\Omega(\phi)$ が図 9.7 のような半径 r の円 (2 次元領域) のとき，$\boldsymbol{x} = (0, r)^\top$ では，

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \tau_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_2}{\partial x_2} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos\theta - 1}{r \tan\theta} = 0$$

が成り立つためである．$\Omega(\phi)$ が 3 次元領域の場合も同様の関係が成り立つ．

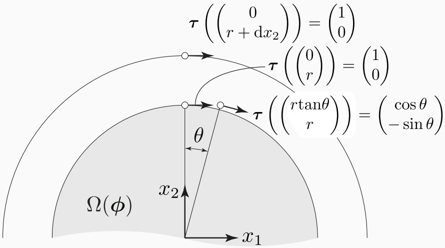


図 9.7: 円近傍における接線の分布

また，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nu} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}^\top \boldsymbol{\nu} \right) &= \boldsymbol{\nu} \cdot \left[\boldsymbol{\nabla} \left\{ (\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \boldsymbol{\nu} + \sum_{j \in \{1, \dots, d-1\}} (\boldsymbol{\tau}_j \cdot \boldsymbol{\varphi}) \boldsymbol{\tau}_j \right\}^\top \boldsymbol{\nu} \right] \\
&= \partial_\nu (\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi})
\end{aligned} \tag{9.2.9}
$$

が成り立つ．ここでは，

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{\nabla} (\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \boldsymbol{\nu}^\top \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nabla} (\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi}), \quad \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\nu}^\top \boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}, \\
\boldsymbol{\nabla} (\boldsymbol{\tau}_j \cdot \boldsymbol{\varphi}) \boldsymbol{\tau}_j^\top \boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\tau}_j^\top \boldsymbol{\nu} \right) = 0
\end{gathered}
$$

を用いた．$\boldsymbol{\nu} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\tau}_1^\top \boldsymbol{\nu}\right) = 0, \ldots, \boldsymbol{\nu} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\tau}_{d-1}^\top \boldsymbol{\nu}\right) = 0$ が成り立つことは，$\Omega(\phi)$ が図 9.7 のような半径 r の円のとき，$\boldsymbol{x} = (0, r)^\top$ では，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nu} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\tau}_j^\top \boldsymbol{\nu}\right) &= \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \tau_1 / \partial x_1 & \partial \tau_2 / \partial x_1 \\ \partial \tau_1 / \partial x_2 & \partial \tau_2 / \partial x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1/r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}
$$

が成り立つことで確かめられる．$\Omega(\phi)$ が 3 次元領域の場合も同様の関係が成り立つ．

そこで，式 (9.2.8) と式 (9.2.9) を式 (9.2.6) に代入すれば，式 (9.2.7) が得られる． □

また，法線の形状微分について，次の公式が得られる．

命題 9.2.5 (法線の形状微分)

$\phi_0 \in \mathcal{D}^\circ$ の近傍 $B \subset Y$ 上の $\phi \in B$ において，$\partial\Omega(\phi)$ は区分的に $H^2 \cap C^{0,1}$ 級とする．このとき，任意の $\varphi \in Y$ に対して，

$$\boldsymbol{\nu}'(\phi)[\varphi] = -\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^\top\right)\boldsymbol{\nu} + \left\{\boldsymbol{\nu}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^\top\boldsymbol{\nu}\right)\right\}\boldsymbol{\nu}$$

が成り立つ．また，$\boldsymbol{\nu}'(\phi)[\varphi]$ は $C\left(B;\mathcal{L}\left(Y;L^\infty\left(\partial\Omega(\phi);\mathbb{R}^d\right)\right)\right)$ に入る．

証明　$\Omega(\phi+\varphi)$ 上の外向き単位法線は式 (9.2.5) で与えられる．これを

$$\boldsymbol{\nu}(\phi+\varphi)=\frac{\boldsymbol{F}^{-\top}(\varphi)\boldsymbol{\nu}}{\|\boldsymbol{F}^{-\top}(\varphi)\boldsymbol{\nu}\|_{\mathbb{R}^d}}=\frac{\boldsymbol{h}(\varphi)}{\|\boldsymbol{h}(\varphi)\|_{\mathbb{R}^d}}$$

とかく．このとき，

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\nu}'(\varphi_0)[\varphi]\\
&\quad=\frac{1}{\|\boldsymbol{h}(\varphi_0)\|_{\mathbb{R}^d}^2}\left\{\boldsymbol{h}'(\varphi_0)[\varphi]\|\boldsymbol{h}(\varphi_0)\|_{\mathbb{R}^d}-\frac{\boldsymbol{h}(\varphi_0)^\top(\boldsymbol{h}'(\varphi_0)[\varphi])\boldsymbol{h}(\varphi_0)}{\|\boldsymbol{h}(\varphi_0)\|_{\mathbb{R}^d}}\right\}\\
&\quad=-\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^\top\right)\boldsymbol{\nu}+\left[\boldsymbol{\nu}\cdot\left\{\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^\top\right)\boldsymbol{\nu}\right\}\right]\boldsymbol{\nu}
\end{aligned}$$

が成り立つ． □

9.3 汎関数の形状微分

9.2 節の結果を用いて，変動する領域の上で定義された領域積分と境界積分の形状微分を求める公式をまとめておこう．その際，被積分関数の形状微分を用いる公式と形状偏微分を用いる公式が得られることに注意する．

§9.3.1　関数の形状微分を用いた公式

まず，関数の形状微分 u' を使った公式を求めよう．定義 9.1.1 より，次の命題が成り立つ．ここでは，$\phi + \varphi$ のときに関数や汎関数は $u(\phi + \varphi)$ や $f(\phi + \varphi, u(\phi + \varphi))$ のように表して，ϕ のときに関数や汎関数は u や $f(\phi, u)$ のようにかくことにする．さらに，定義 9.1.1 に従う $u'(\phi)[\varphi]$ を u' とかくことにする．

命題 9.3.1 (導関数なし領域積分の形状微分: 関数の形状微分)

$\phi_0 \in \mathcal{D}^\circ$ の近傍 $B \subset Y$ 上のすべての $\phi \in B$ において，
$u \in C^1_{\mathrm{S}'}\left(B; L^2\left(D; \mathbb{R}\right)\right)$ が与えられているとする．任意の $\varphi \in Y$ に対して，

$$f\left(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}, u\left(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}\right)\right) = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi})} u\left(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}\right) \mathrm{d}z$$

とおく．このとき，

$$f'\left(\boldsymbol{\phi}, u\right)\left[\boldsymbol{\varphi}\right] = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \left(u' + u \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}\right) \mathrm{d}x \tag{9.3.1}$$

となる．さらに，$f'\left(\boldsymbol{\phi}, u\right)\left[\boldsymbol{\varphi}\right]$ は $C\left(B; \mathcal{L}\left(X; \mathbb{R}\right)\right)$ にも入る．

証明　f の積分領域 $\Omega(\phi + \varphi)$ を $\Omega(\phi)$ に変換すれば，

$$f(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}, u(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi})) = \int_{\Omega(\phi)} u(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}))\ \omega(\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{x})\ \mathrm{d}x$$

となる．定義 9.1.1 を用いれば，

$$f'(\boldsymbol{\phi}, u(\boldsymbol{\phi}))[\boldsymbol{\varphi}] = \int_{\Omega(\phi)} (u'(\boldsymbol{\phi})[\boldsymbol{\varphi}]\,\omega(\boldsymbol{\varphi}_0) + u(\boldsymbol{\phi})\,\omega'(\boldsymbol{\varphi}_0)[\boldsymbol{\varphi}])\,\mathrm{d}x$$

が得られる．これに命題 9.2.1 を用いれば，本命題の結果が得られる．　□

　次に，関数の導関数を被積分関数にもつ領域積分について考える．まず，次の結果に注目する．以下では，任意の $\varphi \in Y$ に対して，$\Omega(\phi)$ の拡張領域 D 上の点 $\boldsymbol{x}$ の移動先を $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{x})$ とかく．また，$\boldsymbol{\nabla}_z$ は $\partial(\,\cdot\,)/\partial \boldsymbol{z}$ を表す．

命題 9.3.2 (微分の引き戻し)

$\phi_0 \in \mathcal{D}^\circ$ の近傍 $B \subset Y$ 上のすべての $\phi \in B$ において，
$u \in C(B; H^1(D; \mathbb{R}))$ が与えられているとする．任意の $\varphi \in Y$ に対して，

$$u(\phi + \varphi)(\boldsymbol{z}) = u(\phi)\left((\boldsymbol{i} + \varphi)^{-1}(\boldsymbol{z})\right) = u(\phi)(\boldsymbol{x}) \tag{9.3.2}$$

が成り立つとする．このとき，

$$\boldsymbol{\nabla}_z u(\phi + \varphi)(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{F}^{-\top}(\varphi) \boldsymbol{\nabla} u(\phi)(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ．さらに，$\boldsymbol{F}^{-\top}(\varphi) \boldsymbol{\nabla} u(\phi)$ は $C\left(B; \mathcal{L}\left(X; L^1\left(D; \mathbb{R}^d\right)\right)\right)$ にも入る．

証明　微分の連鎖則より，

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi})}{\partial \boldsymbol{z}}(\boldsymbol{z}) = \frac{\partial \boldsymbol{x}^\top}{\partial \boldsymbol{z}} \frac{\partial u(\boldsymbol{\phi})}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{x}^\top}\right)^{-\top} \frac{\partial u(\boldsymbol{\phi})}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ． □

　そこで，領域積分の被積分関数に導関数が含まれる場合には，次の公式を得る [70, 61, 60]．

命題 9.3.3 (導関数あり領域積分の形状微分: 関数の形状微分)

$\phi \in \mathcal{D}^\circ$ の近傍 $B \subset Y$ 上で u は $C^1_{\mathrm{S}'}(B; H^1(D;\mathbb{R}))$ の要素とする．任意の $\varphi \in Y$ に対して，

$$f(\phi + \varphi, \nabla_z u(\phi + \varphi)) = \int_{\Omega(\phi+\varphi)} \nabla_z u(\phi + \varphi) \, \mathrm{d}z$$

とおく．このとき，

$$f'(\phi, \nabla u)[\varphi] = \int_{\Omega(\phi)} \left\{ \nabla u' - \left(\nabla \varphi^\top \right) \nabla u + (\nabla \cdot \varphi) \nabla u \right\} \mathrm{d}x \tag{9.3.3}$$

となる．さらに，$f'(\phi, \nabla u)[\varphi]$ は $C(B; \mathcal{L}(X; \mathbb{R}))$ にも入る．

証明　命題 9.3.2 において式 (9.3.2) が仮定されていたことに注意すれば，

$$
\begin{aligned}
& f\left(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\nabla}_z u\left(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi}\right)\right) \\
&= \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi})} \Big[\boldsymbol{\nabla}_z u\left(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi}\right)\left(\boldsymbol{z}\right)\big|_* \\
&\qquad + \boldsymbol{\nabla}_z \Big\{ u\left(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi}\right)\left(\boldsymbol{z}\right) - u\left(\boldsymbol{\phi}\right)\Big(\left(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{\varphi}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{z}\right)\Big)\Big\}\Big]\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \Big\{ \boldsymbol{F}^{-\top}\left(\boldsymbol{\varphi}\right)\boldsymbol{\nabla} u\left(\boldsymbol{\phi}\right)\left(\boldsymbol{x}\right) + u_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})}\left(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi}\right)\left(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\varphi}\left(\boldsymbol{x}\right)\right) \\
&\qquad - u_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})}\left(\boldsymbol{\phi}\right)\left(\boldsymbol{x}\right)\Big\}\omega\left(\boldsymbol{\varphi}\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ただし，$\nabla_z u(\phi+\varphi)(z)|_*$ は式 (9.3.2) が仮定されたもとでの $\nabla_z u(\phi+\varphi)(z)$ とする．f の形状微分の定義 (定義 9.1.4) と $u'(\phi)[\varphi]$ の定義 (定義 9.1.1) より，

$$f'(\phi,\nabla u(\phi))[\varphi]=\int_{\Omega(\phi)}\Big\{\big(\boldsymbol{F}^{-\top\prime}(\varphi_0)[\varphi]\nabla u(\phi)+\nabla u'(\phi)[\varphi]\big)\omega(\varphi_0)\\
+\boldsymbol{F}^{-\top}(\varphi_0)\nabla u(\phi)\,\omega'(\varphi_0)[\varphi]\Big\}\mathrm{d}x$$

が得られる．この結果に命題 9.2.1 と命題 9.2.2 を用いれば，本命題の結果が得られる． □

命題 9.3.1 と命題 9.3.3 の比較から次のことがよみとれる．領域測度の形状微分に関する項 ($\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}$ が含まれる項) に関しては，領域測度に $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}$ が乗じられただけで，両者で同じ扱いがなされている．一方，被積分関数の形状微分に関する項に関しては，両者で扱いが異なっている．導関数なしの場合には，u が u' に変化しただけなのに対して，導関数ありの場合には，$\boldsymbol{\nabla} u$ が $\boldsymbol{\nabla} u' - \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}^{\top}\right) \boldsymbol{\nabla} u$ に変化している．その点に注意すれば，被積分関数が u と $\boldsymbol{\nabla} u$ の関数で与えられた場合には，次の結果が得られる．

命題 9.3.4 (領域積分の形状微分: 関数の形状微分)

$\phi_0 \in \mathcal{D}^\circ$ の近傍 $B \subset Y$ 上のすべての $\phi \in B$ において，$u \in C^1_{\mathrm{S}'}(B;\mathcal{U})$ ($\mathcal{U} = H^2(D;\mathbb{R})$) が定まり，$h \in C^1\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d;\mathbb{R}\right)$ は，$(u, \boldsymbol{\nabla} u) \in \mathcal{U} \times \mathcal{G}$ ($\mathcal{G} = \{\boldsymbol{\nabla} u \mid u \in \mathcal{U}\}$) に対して，

$$h(u, \boldsymbol{\nabla} u), h_u(u, \boldsymbol{\nabla} u) \in L^2(D;\mathbb{R}), \quad h_{\boldsymbol{\nabla} u}(u, \boldsymbol{\nabla} u) \in L^\infty\left(D;\mathbb{R}^d\right)$$

のように与えられるとする．任意の $\boldsymbol{\varphi} \in Y$ に対して，

$$\begin{aligned} &f(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}, u(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}), \boldsymbol{\nabla}_z u(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi})) \\ &\quad = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi})} h(u(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}), \boldsymbol{\nabla}_z u(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}))\, \mathrm{d}z \end{aligned}$$

とおく．このとき，

命題 9.3.4 (領域積分の形状微分: 関数の形状微分)

$$
\begin{aligned}
&f'(\phi, u, \boldsymbol{\nabla} u)[\boldsymbol{\varphi}] \\
&\quad = \int_{\Omega(\phi)} \Big\{ h_u(u, \boldsymbol{\nabla} u)[u'] + h_{\boldsymbol{\nabla} u}(u, \boldsymbol{\nabla} u)\left[\boldsymbol{\nabla} u' - \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{\top}\right)\boldsymbol{\nabla} u\right] \\
&\qquad + h(u, \boldsymbol{\nabla} u)\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi} \Big\} \mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{9.3.4}
$$

となる．さらに，$f'(\phi, u, \boldsymbol{\nabla} u)[\boldsymbol{\varphi}]$ は $C(B; \mathcal{L}(X; \mathbb{R}))$ にも入る．

命題 9.3.4 で得られた公式は，9.8.1 項において評価関数の形状微分を求める際に使われる重要な公式となる．次節以降では，$f(\phi, u, \boldsymbol{\nabla} u)$ を $f(\phi, u)$ とかくことにして，式 (9.3.4) を

$$f'(\phi, u, \boldsymbol{\nabla} u)[\boldsymbol{\varphi}] = f'(\phi, u)[\boldsymbol{\varphi}, u'] = f_{\phi'}(\phi, u)[\boldsymbol{\varphi}] + f_u(\phi, u)[u'] \tag{9.3.5}$$

のようにかくことにする．ここで，

$$\begin{aligned} & f_{\phi'}(\phi, u)[\boldsymbol{\varphi}] \\ & \quad = \int_{\Omega(\phi)} \left\{ h_{\boldsymbol{\nabla} u}(u, \boldsymbol{\nabla} u)\left[-\left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}^{\top} \right) \boldsymbol{\nabla} u \right] + h(u, \boldsymbol{\nabla} u)\, \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi} \right\} \mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{9.3.6}$$

$$f_u(\phi, u)[u'] = \int_{\Omega(\phi)} \{ h_u(u, \boldsymbol{\nabla} u)[u'] + h_{\boldsymbol{\nabla} u}(u, \boldsymbol{\nabla} u)[\boldsymbol{\nabla} u'] \} \mathrm{d}x \tag{9.3.7}$$

である．式 (9.3.5) の表現において，すべての項は φ と u' の 1 次形式に分けられている．この公式は，のちにそれぞれの評価関数に対する Lagrange 関数の形状微分を計算するときに使われる．その状況では，評価関数の形状微分は φ の 1 次形式から得られ，随伴問題の弱形式は u' の 1 次形式から得られる. 式 (9.3.5) において，添え字 $(\,\cdot\,)_{\phi'}$ は，9.3.2 節で示される類似の形状偏微分 (そこでは $(\,\cdot\,)_{\phi^*}$ が使われる) と区別するために使われた．

領域積分の 2 階形状微分に関しては，あとで使うために，関数の形状微分を使ったときの公式のみを示しておく．ここでは，$f_{\phi'}(\phi, u)[\varphi]$ のみに注目して，$f_{\phi'\phi'}(\phi, u)[\varphi_1, \varphi_2]$ の公式を示す．定義 9.1.4 に従えば，

$$f_{\phi'\phi'}(\boldsymbol{\phi}, u)[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2] = (f_{\phi'})_{\phi'}(\boldsymbol{\phi}, u)[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2] + \langle \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\phi}, u), \boldsymbol{t}(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2)\rangle \tag{9.3.8}$$

のように分割される．ただし，

$$
\begin{aligned}
&\left(f_{\phi'}\right)_{\phi'}(\boldsymbol{\phi}, u)[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2] \\
&\quad = \lim_{\|\boldsymbol{\varphi}_2\|_X \to 0} \frac{1}{\|\boldsymbol{\varphi}_2\|_X} \left(\langle \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}_2, u), \boldsymbol{\varphi}_1 \rangle - \langle \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\phi}, u), \boldsymbol{\varphi}_1 \rangle \right), \qquad (9.3.9) \\
&\langle \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\phi}, u), \boldsymbol{t}(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2) \rangle \\
&\quad = \lim_{\|\boldsymbol{\varphi}_2\|_X \to 0} \frac{1}{\|\boldsymbol{\varphi}_2\|_X} \left\langle \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}_2, u), \boldsymbol{\varphi}_1 \circ (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{\varphi}_2)^{-1} - \boldsymbol{\varphi}_1 \right\rangle \qquad (9.3.10)
\end{aligned}
$$

とおく．式 (9.3.9) は，$\boldsymbol{\varphi}_1$ を固定したときの $\langle \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}_2, u), \boldsymbol{\varphi}_1 \rangle$ の $\boldsymbol{\varphi}_2$ の変動に対する微分を表している．一方，式 (9.3.10) は，変動ベクトル $\boldsymbol{\varphi}_1$ の $\boldsymbol{\varphi}_2$ による変動を $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{\varphi}_2$ の逆写像によって補正する成分を表している．

$\varphi_1 \circ (\boldsymbol{i} + \varphi_2)^{-1} - \varphi_1$ の項のみを計算すれば，式 (9.1.9) のようになる．しかし，式 (9.3.5) の $f_{\phi'}(\phi, u)[\varphi]$ では，$\boldsymbol{\nabla}\varphi^{\top}$ や $\boldsymbol{\nabla} \cdot \varphi$ が使われている．そこで，次に示す別の公式となる．

式 (9.1.9) のあとの説明に従って，式 (9.3.6) の $-\boldsymbol{\nabla}\varphi^{\top}$ に対して，φ を φ_1 におきかえ，さらに $\boldsymbol{i} + \varphi_2$ の逆写像を線形化した変動 $-\varphi_2$ を加える．この変動は，命題 9.3.3 において，φ を $-\varphi_2$ におきかえ，u を $\varphi_1^{\top}$ におきかえたときの関係によって，$-\boldsymbol{\nabla}\varphi^{\top}$ を $\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi_2^{\top} - \boldsymbol{\nabla} \cdot \varphi_2\right) \boldsymbol{\nabla}\varphi_1^{\top}$ に変化させる．また，式 (9.3.6) の $\boldsymbol{\nabla} \cdot \varphi$ に対して，同じ変動を加える．命題 9.3.3 において，φ を $-\varphi_2$ におきかえ，u を $\cdot\varphi_1$ におきかえたときの関係によって，$\boldsymbol{\nabla} \cdot \varphi$ は $\boldsymbol{\nabla}\varphi_2^{\top} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla}\varphi_1^{\top}\right)^{\top} - \boldsymbol{\nabla} \cdot \varphi_2 \boldsymbol{\nabla} \cdot \varphi_1$ となる．

このことを汎関数

$$f(\boldsymbol{\phi}, u) = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \boldsymbol{\nabla} u \, \mathrm{d}x$$

に対して確かめてみよう．この $f(\boldsymbol{\phi}, u)$ の形状微分を

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\phi}, u), \boldsymbol{\varphi}_1 \rangle &= \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla} u \, \mathrm{d}x - \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \boldsymbol{\nabla} u \, \mathrm{d}x \\ &= f_1(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\varphi}_1) + f_2(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\varphi}_1) \end{aligned}$$

とおく．このとき，式 (9.3.10) は

$$\langle \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\phi}, u), \boldsymbol{t}(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2) \rangle = \langle \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\phi}, u), \boldsymbol{\varphi}_1 \rangle_{\boldsymbol{\varphi}_1} [-\boldsymbol{\varphi}_2]$$

$$= f_{1\boldsymbol{\varphi}_1}(\phi, \boldsymbol{\varphi}_1)[-\boldsymbol{\varphi}_2] + f_{2\boldsymbol{\varphi}_1}(\phi, \boldsymbol{\varphi}_1)[-\boldsymbol{\varphi}_2]$$

とかける．右辺の各項は，命題 9.3.3 より，次のように得られる．

$$\begin{aligned}
f_{1\boldsymbol{\varphi}_1}(\phi, \boldsymbol{\varphi}_1)[-\boldsymbol{\varphi}_2] &= \int_{\Omega(\phi)} \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_2\right) \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla} u \,\mathrm{d}x, \\
f_{2\boldsymbol{\varphi}_1}(\phi, \boldsymbol{\varphi}_1)[-\boldsymbol{\varphi}_2] &= \int_{\Omega(\phi)} \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_2\right) \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_1 \boldsymbol{\nabla} u \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega(\phi)} \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top \cdot \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top\right)^\top - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_2 \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_1\right) \boldsymbol{\nabla} u \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

これらの関係を用いれば，

$$
\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{g}(\phi, u), \boldsymbol{t}(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2)\rangle \\
&\quad = \int_{\Omega(\phi)} \Big\{ h_{\boldsymbol{\nabla} u}(u, \boldsymbol{\nabla} u)\left[\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_2\right)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top\boldsymbol{\nabla} u\right] \\
&\qquad\quad + h(u, \boldsymbol{\nabla} u)\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top \cdot \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top\right)^\top - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_2\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_1\right)\Big\}\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{9.3.11}
$$

となる．評価関数の 2 階形状微分を求める際には，通常の方法で求められる式 (9.3.9) の項に，式 (9.3.11) による項を加えることに注意する必要がある．

次に，汎関数が境界積分で与えられた場合を考えよう．$\Gamma(\phi)$ は $\partial\Omega(\phi)$ の部分集合 ($\Gamma(\phi) = \partial\Omega(\phi)$ でもよい) とする．また，$\Theta(\phi)$ を $\partial\Omega(\phi)$ 上の角

点 ($d = 2$ のとき) あるいは辺 ($d = 3$ のとき) の集合とする (図 9.3)．τ は $\Gamma(\phi)$ の接線 ($d = 2$ のとき) あるいは $\Gamma(\phi)$ の接線かつ $\partial\Gamma(\phi)$ の外向き法線 ($d = 3$ のとき) とする．$\Theta(\phi)$ に対する τ は，図 9.3 のように，$\Theta(\phi)$ の両側に存在するものとする．$\mathrm{d}\varsigma$ は $\partial\Gamma(\phi) \cup \Theta(\phi)$ の測度を表すことにする．

命題 9.3.5 (導関数なし境界積分の形状微分: 関数の形状微分)

$\phi_0 \in \mathcal{D}^\circ$ の近傍 $B \subset Y$ 上のすべての $\phi \in B$ において，
$u \in C^1_{\mathrm{S}'}\left(B; H^1\left(D; \mathbb{R}\right)\right)$ が与えられているとする．$\Gamma\left(\phi\right)$ は区分的に
$H^2 \cap C^{0,1}$ 級とする．また，任意の $\varphi \in Y$ に対して，

$$f\left(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}, u\left(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}\right)\right) = \int_{\Gamma\left(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi}\right)} u\left(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}\right) \mathrm{d}\zeta$$

とおく．このとき，

命題 9.3.5 (導関数なし境界積分の形状微分: 関数の形状微分)

$$f'(\phi, u)[\boldsymbol{\varphi}] = \int_{\Gamma(\phi)} \{u' + u(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi})_{\tau}\}\,\mathrm{d}\gamma$$

となる．ただし，$(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi})_{\tau}$ は式 (9.2.6) に従う．さらに，$\Gamma(\phi)$ が区分的に $H^3 \cap C^{1,1}$ 級ならば，

$$f'(\phi, u)[\boldsymbol{\varphi}] = \int_{\Gamma(\phi)} (u' + \kappa u \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\nabla}_{\tau} u \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\tau})\,\mathrm{d}\gamma + \int_{\partial\Gamma(\phi)\cup\Theta(\phi)} u\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}\varsigma$$

となる．ただし，$\boldsymbol{\nabla}_{\tau}(\,\cdot\,) = (\boldsymbol{\tau}_j(\phi)\cdot\boldsymbol{\nabla})_{j\in\{1,\dots,d-1\}}(\,\cdot\,) \in \mathbb{R}^{d-1}$ および $\boldsymbol{\varphi}_{\tau} = (\boldsymbol{\tau}_j(\phi)\cdot\boldsymbol{\varphi})_{j\in\{1,\dots,d-1\}} \in \mathbb{R}^{d-1}$ とする．さらに，$f'(\phi, u)[\boldsymbol{\varphi}]$ は $C(B; \mathcal{L}(X;\mathbb{R}))$ にも入る．

証明　f の積分領域 $\Gamma(\phi+\varphi)$ を $\Gamma(\phi)$ に変換すれば，

$$f(\phi+\varphi, u(\phi+\varphi)) = \int_{\Gamma(\phi)} u(\phi+\varphi)(\boldsymbol{x}+\varphi(\boldsymbol{x}))\varpi(\varphi)\,\mathrm{d}\gamma$$

となる．f の形状微分の定義 (定義 9.1.4) と $u'(\phi)[\varphi]$ の定義 (定義 9.1.1) より，

$$f'(\phi, u(\phi))[\varphi] = \int_{\Gamma(\phi)} \{u'(\phi)[\varphi]\varpi(\varphi_0) + u(\phi)\varpi'(\varphi_0)[\varphi]\}\mathrm{d}\gamma$$

が得られる．これに命題 9.2.4 を用いれば，前半の結果が得られる．さらに，$\Gamma(\phi)$ が区分的に $H^3 \cap C^{1,1}$ 級ならば，$\int_{\Gamma(\phi)} u(\phi)\boldsymbol{\nabla}_\tau \cdot \varphi_\tau\,\mathrm{d}\gamma$ に対して Gauss–Green の定理 (定理 A.8.2) を用いれば，後半の結果が得られる．　□

さらに，境界積分の被積分関数が法線方向の導関数の場合には，次のようになる．

命題 9.3.6 (導関数あり境界積分の形状微分: 関数の形状微分)

$\phi_0 \in \mathcal{D}^\circ$ の近傍 $B \subset Y$ 上のすべての $\phi \in B$ において，u は $C^1_{\mathrm{S}'}(B; H^2(D;\mathbb{R}))$ の要素として与えられているとする．$\Gamma(\phi)$ は区分的に $H^2 \cap C^{0,1}$ 級とする．また，任意の $\varphi \in Y$ に対して，

$$f(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi}, \partial_\mu u(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi})) = \int_{\Gamma(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi})} \partial_\mu u(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi})\,\mathrm{d}\zeta$$

とおく．このとき，

$$f'(\boldsymbol{\phi}, \partial_\nu u)[\boldsymbol{\varphi}] = \int_{\Gamma(\boldsymbol{\phi})} \left\{\partial_\nu u' + w(\boldsymbol{\varphi}, u) + \partial_\nu u\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi})_\tau\right\}\mathrm{d}\gamma$$

命題 9.3.6 (導関数あり境界積分の形状微分: 関数の形状微分)

となる．ただし，

$$w(\boldsymbol{\varphi}, u) = \left[\left\{ \boldsymbol{\nu} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}^\top \boldsymbol{\nu} \right) \right\} \boldsymbol{\nu} - \left\{ \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}^\top + \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}^\top \right)^\top \right\} \boldsymbol{\nu} \right] \cdot \boldsymbol{\nabla} u \qquad (9.3.12)$$

とおいた．また，$(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi})_\tau$ は式 (9.2.6) に従う．さらに，$\Gamma(\phi)$ が区分的に $H^3 \cap C^{1,1}$ 級ならば，

$$\begin{aligned} f'(\phi, \partial_\nu u)[\boldsymbol{\varphi}] &= \int_{\Gamma(\phi)} \left\{ \partial_\nu u' + w(\boldsymbol{\varphi}, u) + \kappa \partial_\nu u \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\nabla}_\tau (\partial_\nu u) \cdot \boldsymbol{\varphi}_\tau \right\} \mathrm{d}\gamma \\ &\quad + \int_{\partial\Gamma(\phi) \cup \Theta(\phi)} \partial_\nu u \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\varsigma \qquad (9.3.13) \end{aligned}$$

となる．また，$f'(\phi, \partial_\nu u)[\boldsymbol{\varphi}]$ は $C(B; \mathcal{L}(Y; \mathbb{R}))$ に入る．

証明　命題 9.3.2 において式 (9.3.2) が仮定されていたことに注意すれば，

$$
\begin{aligned}
&f\left(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi}, \partial_\mu u\left(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi}\right)\right) \\
&\quad = \int_{\Gamma(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi})} \left[\boldsymbol{\nabla}_z u\left(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi}\right)\left(\boldsymbol{z}\right)\big|_* \right. \\
&\qquad \left. + \boldsymbol{\nabla}_z \left\{ u\left(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi}\right)\left(\boldsymbol{z}\right) - u\left(\boldsymbol{\phi}\right)\left(\left(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{\varphi}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{z}\right)\right) \right\} \right] \cdot \boldsymbol{\nu}\left(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi}\right)\left(\boldsymbol{z}\right) \mathrm{d}\zeta \\
&\quad = \int_{\Gamma(\boldsymbol{\phi})} \left\{ \left(\boldsymbol{F}^{-\top}\left(\boldsymbol{\varphi}\right) \boldsymbol{\nabla} u\left(\boldsymbol{\phi}\right)\right) \cdot \left(\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu}'\left(\boldsymbol{\phi}\right)[\boldsymbol{\varphi}] + o\left(\|\boldsymbol{\varphi}\|_X\right)\right) \right. \\
&\qquad \left. + \partial_\mu u\left(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi}\right)\left(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\varphi}\left(\boldsymbol{x}\right)\right) - \partial_\mu u\left(\boldsymbol{x}\right) \right\} \varpi\left(\boldsymbol{\varphi}\right) \mathrm{d}\gamma
\end{aligned}
$$

が得られる．ただし，$\boldsymbol{\nabla}_z u(\phi+\varphi)(z)|_*$ は式 (9.3.2) が仮定されたもとでの $\boldsymbol{\nabla}_z u(\phi+\varphi)(z)$ とする．f の形状微分の定義 (定義 9.1.4) と $u'(\phi)[\varphi]$ の定義 (定義 9.1.1) より，

$$f'(\boldsymbol{\phi}, \partial_\nu u(\boldsymbol{\phi}))[\boldsymbol{\varphi}] = \int_{\Gamma(\boldsymbol{\phi})} \Big[\Big\{\big(\boldsymbol{F}^{-\top\prime}(\boldsymbol{\varphi}_0)[\boldsymbol{\varphi}]\boldsymbol{\nabla} u\big)\cdot\boldsymbol{\nu} + \partial_\nu u'(\boldsymbol{\phi})[\boldsymbol{\varphi}] \\ + \big(\boldsymbol{F}^{-\top}(\boldsymbol{\varphi}_0)\boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{\phi})\big)\cdot\boldsymbol{\nu}'(\boldsymbol{\phi})[\boldsymbol{\varphi}]\Big\}\varpi(\boldsymbol{\varphi}_0) \\ + \boldsymbol{F}^{-\top}(\boldsymbol{\varphi}_0)\partial_\nu u(\boldsymbol{\phi})\varpi'(\boldsymbol{\varphi}_0)[\boldsymbol{\varphi}]\Big]\mathrm{d}\gamma$$

が得られる．これに命題 9.2.2，命題 9.2.4 および命題 9.2.5 を用いれば，

$$f'(\boldsymbol{\phi}, \partial_\nu u(\boldsymbol{\phi}))[\boldsymbol{\varphi}] = \int_{\Gamma(\boldsymbol{\phi})} \Big[-\big\{\big(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^\top\big)\boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{\phi})\big\}\cdot\boldsymbol{\nu} + \partial_\nu u'(\boldsymbol{\phi})[\boldsymbol{\varphi}]$$

$$
\begin{aligned}
&+ \left[- \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}^{\top}\right) \boldsymbol{\nu} + \left\{\boldsymbol{\nu} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}^{\top}\right) \boldsymbol{\nu}\right\} \boldsymbol{\nu}\right] \cdot \boldsymbol{\nabla} u\left(\boldsymbol{\phi}\right) \\
&+ \partial_{\nu} u\left(\boldsymbol{\phi}\right) \left\{\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\nu} \cdot \left(\left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}^{\top}\right) \boldsymbol{\nu}\right)\right\}\Big] \mathrm{d}\gamma
\end{aligned}
$$

が得られる．これより，本命題の前半の結果が得られる．後半の結果は命題 9.3.5 の証明と同様にして得られる． □

境界積分の被積分関数が u と $\partial_{\nu} u$ の関数で与えられる場合には，命題 9.3.5 と命題 9.3.6 の証明に微分の連鎖律を用いれば，次の結果が得られる．

命題 9.3.7 (境界積分の形状微分: 関数の形状微分)

$\phi_0 \in \mathcal{D}^\circ$ の近傍 $B \subset Y$ 上のすべての $\phi \in B$ において，$u \in \mathcal{U} = H^2(D;\mathbb{R})$ が定まり，$h \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R};\mathbb{R})$ は，$(u, \partial_\nu u) \in \mathcal{U} \times \mathcal{G}_{\Gamma(\phi)}$ $\left(\mathcal{G}_{\Gamma(\phi)} = \left\{ \partial_\nu u|_{\Gamma(\phi)} \;\middle|\; u \in \mathcal{U} \right\}\right)$ に対して，

$$h(u, \partial_\nu u) \in H^1(D;\mathbb{R}), \quad h_u(u,u), h_{\partial_\nu u}(u, \boldsymbol{\nabla} u) \in H^1\left(D;\mathbb{R}^d\right)$$

のように与えられるとする．ただし，$\Gamma(\phi)$ は区分的に $H^2 \cap C^{0,1}$ 級とする．また，任意の $\varphi \in Y$ に対して，

$$\begin{aligned} & f(\phi + \boldsymbol{\varphi}, u(\phi + \boldsymbol{\varphi}), \partial_\mu u(\phi + \boldsymbol{\varphi})) \\ & \quad = \int_{\Gamma(\phi+\boldsymbol{\varphi})} h(u(\phi + \boldsymbol{\varphi}), \partial_\mu u(\phi + \boldsymbol{\varphi}))\, \mathrm{d}\zeta \end{aligned}$$

命題 9.3.7 (境界積分の形状微分: 関数の形状微分)

とおく．このとき，

$$
\begin{aligned}
&f'(\boldsymbol{\phi}, u, \partial_\nu u)[\boldsymbol{\varphi}] \\
&\quad = \int_{\Gamma(\boldsymbol{\phi})} \Big\{ h_u(u, \partial_\nu u)[u'] + h_{\partial_\nu u}(u, \partial_\nu u)[\partial_\nu u' + w(\boldsymbol{\varphi}, u)] \\
&\qquad\quad + h(u, \partial_\nu u)(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi})_\tau \Big\} \mathrm{d}\gamma
\end{aligned}
$$

となる．ここで，$w(\boldsymbol{\varphi}, u)$ と $(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi})_\tau$ はそれぞれ式 (9.3.12) と式 (9.2.6) に従う．さらに，$\Gamma(\boldsymbol{\phi})$ が区分的に $H^3 \cap C^{1,1}$ 級で，$h(u, \partial_\nu u) \in H^3(D; \mathbb{R})$ ならば，

命題 9.3.7 (境界積分の形状微分: 関数の形状微分)

$$
\begin{aligned}
&f'(\boldsymbol{\phi}, u, \partial_\nu u)[\boldsymbol{\varphi}] \\
&\quad = \int_{\Gamma(\boldsymbol{\phi})} \Big\{ h_u(u, \partial_\nu u)[u'] + h_{\partial_\nu u}(u, \partial_\nu u)\left[\partial_\nu u' + w(\boldsymbol{\varphi}, u)\right] \\
&\qquad + \kappa h(u, \partial_\nu u)\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\nabla}_\tau h(u, \partial_\nu u) \cdot \boldsymbol{\varphi}_\tau \Big\} \mathrm{d}\gamma \\
&\qquad + \int_{\partial\Gamma(\boldsymbol{\phi}) \cup \Theta(\boldsymbol{\phi})} h(u, \partial_\nu u)\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\varsigma
\end{aligned}
\tag{9.3.14}
$$

となる．また，$f'(\boldsymbol{\phi}, u, \partial_\nu u)[\boldsymbol{\varphi}]$ は $C(B; \mathcal{L}(Y; \mathbb{R}))$ に入る．

なお，命題 9.3.6 と命題 9.3.7 において，次の点に注意する必要がある．

注意 9.3.8 (導関数あり境界積分の形状微分)

境界積分の中に関数の導関数が存在する場合，その形状微分 (式 (9.3.13) と式 (9.3.14)) の中に式 (9.3.12) の $w(\varphi, u)$ が含まれる．そのために，$f'(\phi, u, \partial_\nu u)[\cdot] \in \mathcal{L}(Y; \mathbb{R})$ ($\notin \mathcal{L}(X; \mathbb{R})$) であった．しかし，境界積分の形状微分は，9.1.3 項で示されたように，任意の $\varphi \in X$ に対する有界線形作用素として定義されている．そこで，今後，評価関数を定義する際に，評価関数の形状微分に $w(\varphi, u)$ が残らないように構成することが必要となる．実際，評価関数を式 (9.6.1) のように定義して，Dirichlet 境界上の被積分関数 $\eta_{\mathrm{D}i}(\phi, \partial_\nu u)$ に対して仮定 9.6.1 あるいは仮定 9.6.2 に記した条件を仮定すれば，望みの結果が得られることになる．

命題 9.3.7 で得られた公式も，9.8.1 項において評価関数の形状微分を求める際に使われる重要な公式となる．次節以降では，$f(\phi, u, \partial_\nu u)$ を $f(\phi, u)$ とかくことにして，式 (9.3.14) を

$$f'(\phi, u, \partial_\nu u)[\boldsymbol{\varphi}] = f'(\phi, u)[\boldsymbol{\varphi}, u'] = f_{\phi'}(\phi, u)[\boldsymbol{\varphi}] + f_u(\phi, u)[u'] \quad (9.3.15)$$

のようにかくことにする．ここで，

$$f_{\phi'}(\phi, u)[\boldsymbol{\varphi}] = \int_{\Gamma(\phi)} \left\{ h_{\partial_\nu u}(u, \partial_\nu u)[w(\boldsymbol{\varphi}, u)] + h(u, \partial_\nu u)(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi})_\tau \right\} \mathrm{d}\gamma,$$

$$f_u(\phi, u)[u'] = \int_{\Gamma(\phi)} \left(h_u(u, \partial_\nu u)[u'] + h_{\partial_\nu u}(u, \partial_\nu u)[\partial_\nu \hat{u}] \right) \mathrm{d}\gamma$$

である．さらに，$\Gamma(\phi)$ が区分的に $H^3 \cap C^{1,1}$ 級ならば，

$$
\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{\phi}'}(\boldsymbol{\phi}, u)[\boldsymbol{\varphi}] = \int_{\Gamma(\boldsymbol{\phi})} \Big(& h_{\partial_\nu u}(u, \partial_\nu u)[w(\boldsymbol{\varphi}, u)] \\
& + \kappa h(u, \partial_\nu u)\, \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\nabla}_\tau h(u, \partial_\nu u) \cdot \boldsymbol{\varphi}_\tau \Big) \mathrm{d}\gamma \\
& + \int_{\partial\Gamma(\boldsymbol{\phi}) \cup \Theta(\boldsymbol{\phi})} h(u, \partial_\nu u)\, \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\varsigma
\end{aligned}
$$

である．

次に，関数の形状偏微分 u^* (定義 9.1.3) を用いて領域積分と境界積分の形状微分を求める公式を求めてみよう．ここでも，$\phi + \varphi$ のときに関数や汎関数は $u(\phi + \varphi)$ や $f(\phi + \varphi, u(\phi + \varphi))$ のように表して，ϕ のときに関数や汎関数は u や $f(\phi, u)$ のようにかくことにする．さらに，定義 9.1.3 に従う $u^*(\phi)[\varphi]$ を u^* とかくことにする．

まず，命題 9.3.1 に対応して，次の命題が成り立つ．

命題 9.3.9 (導関数なし領域積分の形状微分: 関数の形状偏微分)

$\phi_0 \in \mathcal{D}^\circ$ の近傍 $B \subset Y$ 上のすべての $\phi \in B$ において，
$u \in C^1_{\mathrm{S}^*}(B; H^1(D; \mathbb{R}))$ が与えられているとする．任意の $\varphi \in Y$ に対して，

$$f(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}, u(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi})) = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi})} u(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}) \, \mathrm{d}z$$

とおく．このとき，

$$f'(\boldsymbol{\phi}, u)[\boldsymbol{\varphi}] = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} u^* \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega(\boldsymbol{\phi})} u \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\gamma \tag{9.3.16}$$

となる．さらに，$f'(\phi, u)[\varphi]$ は $C(B; \mathcal{L}(X; \mathbb{R}))$ にも入る．

証明　命題 9.3.1 の証明において，$u'(\phi)[\varphi]$ に式 (9.1.4) を代入し，Gauss–Green の定理 (定理 A.8.2) を用いれば，本命題の結果が得られる． □

図 9.8 に，式 (9.3.16) 右辺の各積分に対応する面積を示している．右辺第 1 項は $\Omega(\phi) \cap \Omega(\phi + \varphi)$ 上の塗りつぶされた領域の面積に対応し，第 2 項は左右の塗りつぶされた領域の面積に対応する．ただし，右側の領域は外向き単位法線 $\boldsymbol{\nu}$ が右を向いているので $\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} > 0$ となるのに対して，左側の領域は $\boldsymbol{\nu}$ が左を向いているので $\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} < 0$ となることに注意されたい．

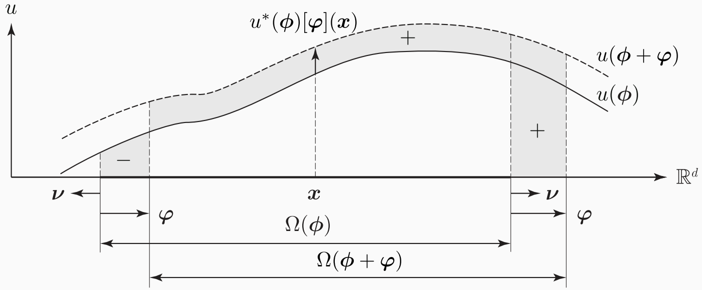


図 9.8: 関数の形状偏微分 u^* を用いたときの領域積分の形状微分

また，命題 9.3.3 に対応する導関数を被積分関数にした領域積分に対する関数の形状偏微分を用いた公式は，$\boldsymbol{\nabla} u \in C^1_{\mathrm{S}^*}\left(B; H^1\left(D; \mathbb{R}^d\right)\right)$ を命題 9.3.9 の u とみなすことで得られる．このとき，定義 9.1.3 より
$(\boldsymbol{\nabla} u)^*(\boldsymbol{\phi})[\boldsymbol{\varphi}] = \boldsymbol{\nabla} u^*(\boldsymbol{\phi})[\boldsymbol{\varphi}]$ が成り立つことを考慮して，$\boldsymbol{\nabla} u^*(\boldsymbol{\phi})[\boldsymbol{\varphi}]$ を
$\boldsymbol{\nabla} u^*$ とかくことにすれば，

$$f'(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\nabla} u)[\boldsymbol{\varphi}] = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \boldsymbol{\nabla} u^* \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega(\boldsymbol{\phi})} (\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \boldsymbol{\nabla} u \, \mathrm{d}\gamma \tag{9.3.17}$$

が得られる．式 (9.3.17) は，Gauss–Green の定理より，

$$f'(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\nabla} u)[\boldsymbol{\varphi}] = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \left[\boldsymbol{\nabla} u^* + \left\{\boldsymbol{\nabla}^{\top}\left(\boldsymbol{\nabla} u \, \boldsymbol{\varphi}^{\top}\right)^{\top}\right\}^{\top}\right] \mathrm{d}x$$

$$= \int_{\Omega(\phi)} (\boldsymbol{\nabla} u^* + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\nabla} u + \Delta u \boldsymbol{\varphi}) \, \mathrm{d}x \tag{9.3.18}$$

とかける．そこで，命題 9.3.3 の結果と比較すれば，

$$\boldsymbol{\nabla} u' (\phi) [\boldsymbol{\varphi}] = \boldsymbol{\nabla} u^* (\phi) [\boldsymbol{\varphi}] + \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}^\top\right) \boldsymbol{\nabla} u (\phi) + \Delta u (\phi) \boldsymbol{\varphi} \tag{9.3.19}$$

が成り立つことになる．式 (9.3.19) は， 式 (9.1.4) より，

$$\boldsymbol{\nabla} u' (\phi) [\boldsymbol{\varphi}] = \boldsymbol{\nabla} u^* (\phi) [\boldsymbol{\varphi}] + \boldsymbol{\nabla} (\boldsymbol{\nabla} u (\phi) \cdot \boldsymbol{\varphi}) .$$

からも得られる．

被積分関数が u と $\boldsymbol{\nabla} u$ の関数で与えられる場合には，命題 9.3.9 に微分の連鎖律を用いることによって，次の結果が得られる．

命題 9.3.10 (領域積分の形状微分: 関数の形状偏微分)

$\phi_0 \in \mathcal{D}^\circ$ の近傍 $B \subset Y$ 上のすべての $\phi \in B$ において，$u \in C^1_{\mathrm{S}^*}(B; \mathcal{U})$ ($\mathcal{U} = H^1(D; \mathbb{R})$) が定まり，$h \in C^1\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}\right)$ は，$(u, \boldsymbol{\nabla} u) \in \mathcal{U} \times \mathcal{G}$ ($\mathcal{G} = \{\boldsymbol{\nabla} u \mid u \in \mathcal{U}\}$) に対して，

$$h(u, \boldsymbol{\nabla} u) \in H^1(D; \mathbb{R}), \quad h_u(u, \boldsymbol{\nabla} u), h_{\boldsymbol{\nabla} u}(u, \boldsymbol{\nabla} u) \in L^2\left(D; \mathbb{R}^d\right)$$

のように与えられるとする．任意の $\varphi \in Y$ に対して，

$$\begin{aligned} & f(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}, u(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}), \boldsymbol{\nabla}_z u(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi})) \\ & \quad = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi})} h(u(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}), \boldsymbol{\nabla}_z u(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}))\, \mathrm{d}z \end{aligned}$$

命題 9.3.10 (領域積分の形状微分: 関数の形状偏微分)

とおく．このとき，

$$f'(\boldsymbol{\phi}, u, \boldsymbol{\nabla} u)[\boldsymbol{\varphi}] = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \{h_u(u, \boldsymbol{\nabla} u)[u^*] + h_{\boldsymbol{\nabla} u}(u, \boldsymbol{\nabla} u)[\boldsymbol{\nabla} u^*]\} \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega(\boldsymbol{\phi})} h(u, \boldsymbol{\nabla} u)\, \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}\gamma \tag{9.3.20}$$

となる．さらに，$f'(\boldsymbol{\phi}, u, \boldsymbol{\nabla} u)[\boldsymbol{\varphi}]$ は $C(B; \mathcal{L}(X; \mathbb{R}))$ にも入る．

命題 9.3.10 で得られた公式は，9.8.4 項において評価関数の形状微分を求める際に使われる重要な公式となる．これ以降では，$f(\phi, u, \boldsymbol{\nabla} u)$ を $f(\phi, u)$ とかくことにして，式 (9.3.20) を

$$f'(\boldsymbol{\phi}, u, \boldsymbol{\nabla} u)[\boldsymbol{\varphi}] = f'(\boldsymbol{\phi}, u)[\boldsymbol{\varphi}, u^*] = f_{\boldsymbol{\phi}^*}(\boldsymbol{\phi}, u)[\boldsymbol{\varphi}] + f_u(\boldsymbol{\phi}, u)[u^*] \tag{9.3.21}$$

のようにかくことにする．ここで，

$$f_{\boldsymbol{\phi}^*}(\boldsymbol{\phi}, u)[\boldsymbol{\varphi}] = \int_{\partial\Omega(\boldsymbol{\phi})} h(u, \boldsymbol{\nabla} u)\, \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, \mathrm{d}\gamma,$$

$$f_u(\boldsymbol{\phi}, u)[u^*] = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \{h_u(u, \boldsymbol{\nabla} u)[u^*] + h_{\boldsymbol{\nabla} u}(u, \boldsymbol{\nabla} u)[\boldsymbol{\nabla} u^*]\}\, \mathrm{d}x$$

である．

汎関数が境界積分で与えられた場合は，命題 9.3.5 に式 (9.1.4) を代入することによって，次の公式が得られる．

命題 9.3.11 (導関数なし境界積分の形状微分: 関数の形状偏微分)

$\phi_0 \in \mathcal{D}^\circ$ の近傍 $B \subset Y$ 上のすべての $\phi \in B$ において，u は $C^1_{\mathrm{S}^*}(B; H^2(D;\mathbb{R}))$ の要素として与えられているとする．$\Gamma(\phi)$ は区分的に $H^2 \cap C^{0,1}$ 級とする．また，任意の $\varphi \in Y$ に対して，

$$f(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi}, u(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi})) = \int_{\Gamma(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi})} u(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi})\,\mathrm{d}\zeta$$

とおく．このとき，

$$f'(\boldsymbol{\phi}, u)[\boldsymbol{\varphi}] = \int_{\Gamma(\boldsymbol{\phi})} \left(u^* + \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\varphi} + u(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi})_\tau\right)\mathrm{d}\gamma \tag{9.3.22}$$

命題 9.3.11 (導関数なし境界積分の形状微分: 関数の形状偏微分)

となる．ここで，$(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi})_{\tau}$ は式 (9.2.6) に従う．さらに，$\Gamma(\phi)$ が区分的に $H^3\cap C^{1,1}$ 級ならば，

$$
\begin{aligned}
f'(\boldsymbol{\phi},u)[\boldsymbol{\varphi}] &= \int_{\Gamma(\boldsymbol{\phi})}\{u^* + (\partial_\nu+\kappa)\,u\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\varphi}\}\,\mathrm{d}\gamma \\
&\quad + \int_{\partial\Gamma(\boldsymbol{\phi})\cup\Theta(\boldsymbol{\phi})} u\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}\varsigma
\end{aligned}
\tag{9.3.23}
$$

となる．さらに，$f'(\boldsymbol{\phi},u)[\boldsymbol{\varphi}]$ は $C(B;\mathcal{L}(X;\mathbb{R}))$ にも入る．

また，境界積分の被積分関数が $\partial_\nu u$ の場合には，次の結果が得られる．

命題 9.3.12 (導関数あり境界積分の形状微分: 関数の形状偏微分)

$\phi_0 \in \mathcal{D}^\circ$ の近傍 $B \subset Y$ 上のすべての $\phi \in B$ において，u は $C^1_{\mathrm{S}^*}(B; H^3(D;\mathbb{R}))$ の要素として与えられているとする．$\Gamma(\phi)$ は区分的に $H^2 \cap C^{0,1}$ 級とする．また，任意の $\varphi \in Y$ に対して，

$$f(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi}, \partial_\mu u(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi})) = \int_{\Gamma(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi})} \partial_\mu u(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi})\, \mathrm{d}\zeta$$

とおく．このとき，

$$f'(\boldsymbol{\phi}, \partial_\nu u)[\boldsymbol{\varphi}] = \int_{\Gamma(\boldsymbol{\phi})} \left(\partial_\nu u^* + \bar{w}(\boldsymbol{\varphi}, u) + \partial_\nu u \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}\right)_\tau\right) \mathrm{d}\gamma$$

となる．ただし，

命題 9.3.12 (導関数あり境界積分の形状微分: 関数の形状偏微分)

$$\bar{w}(\boldsymbol{\varphi}, u) = -\left[\sum_{i \in \{1,\dots,d-1\}} \left\{\boldsymbol{\tau}_i \cdot \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^\top \boldsymbol{\nu}\right)\right\} \boldsymbol{\tau}_i\right] \cdot \boldsymbol{\nabla} u + (\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \Delta u \qquad (9.3.24)$$

とおいた．また，$(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi})_\tau$ は式 (9.2.6) に従う．さらに，$\Gamma(\phi)$ が区分的に $H^3 \cap C^{1,1}$ 級ならば，

$$\begin{aligned} f'(\phi, \partial_\nu u)[\boldsymbol{\varphi}] = \int_{\Gamma(\phi)} \{\partial_\nu u^* + \bar{w}(\boldsymbol{\varphi}, u) + \kappa \partial_\nu u \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} \\ - \boldsymbol{\nabla}_\tau (\partial_\nu u) \cdot \boldsymbol{\varphi}_\tau\} \mathrm{d}\gamma + \int_{\partial\Gamma(\phi) \cup \Theta(\phi)} \partial_\nu u \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\varsigma \end{aligned}$$

となる．また，$f'(\phi, \partial_\nu u)[\boldsymbol{\varphi}]$ は $C(B; \mathcal{L}(Y; \mathbb{R}))$ に入る．

証明　式 (9.3.19) から

$$\partial_\nu u'(\phi)[\boldsymbol{\varphi}] = \partial_\nu u^*(\phi)[\boldsymbol{\varphi}] + \left\{\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^\top\right)^\top \boldsymbol{\nu}\right\} \cdot \boldsymbol{\nabla} u(\phi) + \Delta u(\phi)\,\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\varphi} \tag{9.3.25}$$

が得られる．この関係を命題 9.3.6 の結果に代入すれば，本命題の結果が得られる． □

　そこで，境界積分の被積分関数が u と $\partial_\nu u$ の関数で与えられる場合には，命題 9.3.11 と命題 9.3.12 に微分の連鎖律を用いることによって，次の結果が得られる．

命題 9.3.13 (境界積分の形状微分: 関数の形状偏微分)

$\phi_0 \in \mathcal{D}^\circ$ の近傍 $B \subset Y$ 上のすべての $\phi \in B$ において，$u \in C^1_{\mathrm{S}^*}(B;\mathcal{U})$ $(\mathcal{U} = H^3(D;\mathbb{R}))$ が定まり，$h \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R};\mathbb{R})$ は，$(u, \partial_\nu u) \in \mathcal{U} \times \mathcal{G}_{\Gamma(\phi)}$ $(\mathcal{G}_{\Gamma(\phi)} = \left\{ \partial_\nu u|_{\Gamma(\phi)} \;\middle|\; u \in \mathcal{U} \right\})$ に対して，

$$h(u, \partial_\nu u) \in H^2(D;\mathbb{R}), \quad h_u(u, u), h_{\partial_\nu u}(u, \boldsymbol{\nabla} u) \in H^1\left(D;\mathbb{R}^d\right)$$

のように与えられるとする．ただし，$\Gamma(\phi)$ は区分的に $H^2 \cap C^{0,1}$ 級とする．また，任意の $\varphi \in Y$ に対して，

$$\begin{aligned} & f(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}, u(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}), \partial_\mu u(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi})) \\ & \quad = \int_{\Gamma(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi})} h(u(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}), \partial_\mu u(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}))\, \mathrm{d}\zeta \end{aligned}$$

命題 9.3.13 (境界積分の形状微分: 関数の形状偏微分)

とおく．このとき，

$$
\begin{aligned}
&f'(\phi, u, \partial_\nu u)[\boldsymbol{\varphi}] \\
&\quad = \int_{\Gamma(\phi)} \Big\{ h_u(u, \partial_\nu u)[u^*] + \boldsymbol{\nabla} h(u, \partial_\nu u) \cdot \boldsymbol{\varphi} \\
&\qquad + h_{\partial_\nu u}(u, \partial_\nu u)[\partial_\nu u^* + \bar{w}(\boldsymbol{\varphi}, u)] + h(u, \partial_\nu u)(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi})_\tau \Big\} \mathrm{d}\gamma
\end{aligned}
$$

となる．ここで，$\bar{w}(\boldsymbol{\varphi}, u)$ と $(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi})_\tau$ はそれぞれ式 (9.3.24) と式 (9.2.6) に従う．さらに，$\Gamma(\phi)$ が区分的に $H^3 \cap C^{1,1}$ 級ならば，

命題 9.3.13 (境界積分の形状微分: 関数の形状偏微分)

$$
\begin{aligned}
&f'(\boldsymbol{\phi}, u, \partial_\nu u)[\boldsymbol{\varphi}] \\
&\quad = \int_{\Gamma(\boldsymbol{\phi})} \left\{ h_u(u, \partial_\nu u)[u^*] + h_{\partial_\nu u}(u, \partial_\nu u)[\partial_\nu u^* + \bar{w}(\boldsymbol{\varphi}, u)] \right. \\
&\qquad \left. + (\partial_\nu + \kappa) h(u, \partial_\nu u) \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} \right\} \mathrm{d}\gamma \\
&\qquad + \int_{\partial\Gamma(\boldsymbol{\phi}) \cup \Theta(\boldsymbol{\phi})} h(u, \partial_\nu u) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\varsigma
\end{aligned}
\tag{9.3.26}
$$

となる．また，$f'(\phi, u, \partial_\nu u)[\varphi]$ は $C(B; \mathcal{L}(Y; \mathbb{R}))$ に入る．

なお，命題 9.3.12 と命題 9.3.13 においても，注意 9.3.8 と同じ点に注意する必要がある．

命題 9.3.13 で得られた公式も 9.8.4 項において評価関数の形状微分を求める際に使われる重要な公式となる．次節以降では，$f(\phi, u, \partial_\nu u)$ を $f(\phi, u)$ とかくことにして，式 (9.3.26) を

$$f'(\phi, u, \partial_\nu u)[\boldsymbol{\varphi}] = f'(\phi, u)[\boldsymbol{\varphi}, u^*] = f_{\boldsymbol{\phi}^*}(\boldsymbol{\phi}, u)[\boldsymbol{\varphi}] + f_u(\boldsymbol{\phi}, u)[u^*] \tag{9.3.27}$$

のようにかくことにする．ここで，

$$f_{\boldsymbol{\phi}^*}(\boldsymbol{\phi}, u)[\boldsymbol{\varphi}] = \int_{\Gamma(\phi)} \left\{ h_u(u, \partial_\nu u)[\boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{\phi}) \cdot \boldsymbol{\varphi}] + h_{\partial_\nu u}(u, \partial_\nu u)[\bar{w}(\boldsymbol{\varphi}, u)] \right.$$

$$
+ h\left(u\left(\boldsymbol{\phi}\right), \partial_\nu u\left(\boldsymbol{\phi}\right)\right) \left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}\right)_\tau \Big\}\mathrm{d}\gamma,
$$

$$
f_u\left(\boldsymbol{\phi}, u\right)[u^*] = \int_{\Gamma(\boldsymbol{\phi})} \left(h_u\left(u, \partial_\nu u\right)[u^*] + h_{\partial_\nu u}\left(u, \partial_\nu u\right)[\partial_\nu u^*]\right)\mathrm{d}\gamma
$$

である．さらに，$\Gamma\left(\phi\right)$ が区分的に $H^3 \cap C^{1,1}$ 級ならば，

$$
\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{\phi}^*}\left(\boldsymbol{\phi}, u\right)[\boldsymbol{\varphi}] = \int_{\Gamma(\boldsymbol{\phi})} &\Big\{h_{\partial_\nu u}\left(u, \partial_\nu u\right)[\bar{w}\left(\boldsymbol{\varphi}, u\right)] \\
&+ \left(\partial_\nu + \kappa\right) h\left(u\left(\boldsymbol{\phi}\right), \partial_\nu u\left(\boldsymbol{\phi}\right)\right) \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\varphi}\Big\}\mathrm{d}\gamma \\
&+ \int_{\partial\Gamma(\boldsymbol{\phi})\cup\Theta(\boldsymbol{\phi})} h\left(u\left(\boldsymbol{\phi}\right), \partial_\nu u\left(\boldsymbol{\phi}\right)\right) \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}\varsigma
\end{aligned}
$$

である．

9.4 関数の変動則

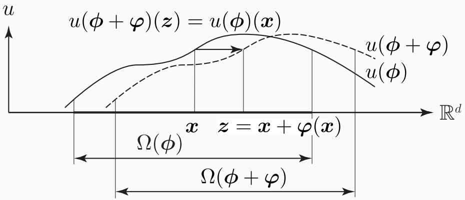


図 9.9: 物質固定の関数 $u : D \to \mathbb{R}$

まず，図 9.9 のように，関数値が領域上の点の移動とともに移動する場合を考える．そのときの関数の変動則を次のように定義する．

定義 9.4.1 (物質固定)

$\phi_0 \in \mathcal{D}^\circ$ の近傍 $B \subset Y$ 上のすべての $\phi \in B$ において，
$u \in C^1_{\mathrm{S}'}\left(B; L^2\left(D; \mathbb{R}\right)\right)$ が与えられたとき，任意の $\varphi \in Y$ に対して，

$$u'\left(\phi\right)\left[\varphi\right] = 0$$

が満たされるとき，u は物質固定とよぶ．

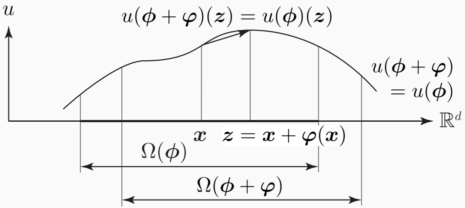


図 9.10: 空間固定の関数 $u : D \to \mathbb{R}$

また，図 9.10 のように，関数が領域変動に依存しないときの関数の変動則を次のように定義する．

定義 9.4.2 (空間固定)

$\phi_0 \in \mathcal{D}^\circ$ の近傍 $B \subset Y$ 上のすべての $\phi \in B$ において，
$u \in C^1_{\mathrm{S}^*}(B; H^1(D; \mathbb{R}))$ が与えられたとき，任意の $\varphi \in Y$ に対して，

$$u'(\phi)[\varphi] - \boldsymbol{\nabla} u(\phi) \cdot \varphi = u^*(\phi)[\varphi] = 0$$

が満たされるとき，u は空間固定とよぶ．

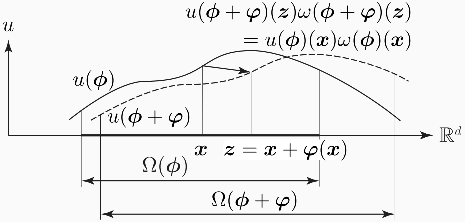


図 9.11: 領域測度共変の関数 $u : D \to \mathbb{R}$

さらに，領域上の点の移動とともにその点の関数値が領域の Jacobi 行列式 $\omega(\boldsymbol{\varphi})$ に反比例して変化する場合を考える．このとき，ほとんど至るところ任意 $\boldsymbol{x} \in D$ において

$$\begin{aligned} & u(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) \\ & \quad = \frac{u(\boldsymbol{\phi})(\boldsymbol{x})}{\omega(\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}))} \\ & \quad = u(\boldsymbol{\phi})(\boldsymbol{x})(1 - \omega'(\boldsymbol{\varphi}_0)[\boldsymbol{\varphi}](\boldsymbol{x}) + o(\|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\|_{\mathbb{R}^d})) \end{aligned} \tag{9.4.1}$$

が成り立つ．図 9.11 はそのようすを示す．そこで，命題 9.2.1 を用いて，このときの変動則を次のように定義する．

定義 9.4.3 (領域測度共変)

$\phi_0 \in \mathcal{D}^\circ$ の近傍 $B \subset Y$ 上のすべての $\phi \in B$ において，
$u \in C^1_{S'}(B; L^2(D; \mathbb{R}))$ が与えられたとき，任意の $\varphi \in Y$ に対して，

$$u'(\phi)[\varphi] + u(\phi)\nabla \cdot \varphi = 0 \tag{9.4.2}$$

が満たされるとき，u を領域測度共変とよぶ．

命題 9.3.1 に式 (9.4.2) を代入すれば $f'(\phi, u(\phi))[\varphi] = 0$ が得られる．すなわち，領域測度共変の関数とは，その関数の領域積分は領域が変動しても一定になることを意味している．

また，境界上の点の移動とともにその点の関数値が境界の Jacobi 行列式 $\varpi(\varphi)$ に反比例した値をとる場合には，

$$
\begin{aligned}
& u(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) \\
& \quad = \frac{u(\boldsymbol{\phi})(\boldsymbol{x})}{\varpi(\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}))} \\
& \quad = u(\boldsymbol{\phi})(\boldsymbol{x})\left(1-\varpi'(\boldsymbol{\varphi}_0)[\boldsymbol{\varphi}](\boldsymbol{x})+o\left(\|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\|_{\mathbb{R}^d}\right)\right)
\end{aligned} \tag{9.4.3}
$$

が成り立つ．そこで，命題 9.2.4 を用いて，このときの変動則を次のように定義する．

定義 9.4.4 (境界測度共変)

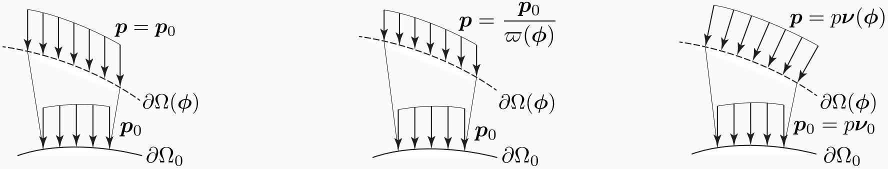
$\phi_0 \in \mathcal{D}^\circ$ の近傍 $B \subset Y$ 上のすべての $\phi \in B$ において，
$u \in C^1_{\mathrm{S}'}(B; H^1(D; \mathbb{R}))$ が与えられたとき，区分的に $H^2 \cap C^{0,1}$ 級の $\partial\Omega(\phi)$ 上で，任意の $\varphi \in Y$ に対して，

$$u'(\phi)[\varphi] + u(\phi)(\boldsymbol{\nabla} \cdot \varphi)_\tau = 0 \tag{9.4.4}$$

が満たされるとき，u を境界測度共変とよぶ．ただし，$\boldsymbol{\nabla}_\tau \cdot \varphi$ は式 (9.2.6) に従う．

命題 9.3.5 に式 (9.4.4) を代入すれば $f'(\phi, u(\phi))[\varphi] = 0$ が得られる．この場合は，u の境界積分が変化しないことを意味する．

以上の定義を使って，具体的な問題を考えてみよう．図 9.12 に，線形弾性問題の境界力 p_0 が境界の変動に伴って p に変化する際の代表的な変動パターンを示している．図 9.12 (c) は，静水圧が作用する境界が変動したときの境界力の変化を表している．本書では，静水圧の仮定を直接使うことはないが，将来，必要となったときのために，静水圧の境界積分に対する形状微分について求めておこう．



(a) $\boldsymbol{p}_0$ が定ベクトルのときの空間固定および物質固定

(b) $\boldsymbol{p}_0$ が定ベクトルのときの境界測度共変

(c) p は空間固定で法線は物質固定 (静水圧)

図 9.12: 線形弾性問題の境界力 p に対する代表的な変動パターン

境界積分の被積分関数が静水圧のとき，次のような公式が得られる．

命題 9.4.5 (静水圧境界積分の形状微分)

$p \in H^2(D;\mathbb{R})$ を空間固定のある関数とする．$\phi_0 \in \mathcal{D}^\circ$ の近傍 $B \subset Y$ 上の $\phi \in B$ において，$\Gamma(\phi)$ は区分的に $H^2 \cap C^{0,1}$ 級とする．任意の $\varphi \in Y$ に対して，

$$f(\phi + \varphi, p) = \int_{\Gamma(\phi+\varphi)} p\boldsymbol{\nu}(\phi + \varphi)\,\mathrm{d}\zeta$$

とおく．このとき，f の形状微分は，

$$f'(\phi, p)[\varphi] = \int_{\Gamma(\phi)} \left\{(\boldsymbol{\nabla} p \cdot \boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{\nu} - p\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^\top\right)\boldsymbol{\nu} + p(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{\nu}\right\}\mathrm{d}\gamma$$

となる．また，$f'(\phi, p)[\varphi]$ は $C(B;\mathcal{L}(Y;\mathbb{R}))$ に入る．

証明　f の積分領域 $\Gamma(\phi+\varphi)$ を $\Gamma(\phi)$ に変換すれば，

$$f(\phi+\boldsymbol{\varphi},p)=\int_{\Gamma(\phi)} p(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}))\,\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}))\,\varpi(\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\gamma$$

が成り立つ．f の形状微分の定義より，

$$f'(\phi,p)[\boldsymbol{\varphi}]=\int_{\Gamma(\phi)}\{(p'(\phi)[\boldsymbol{\varphi}]\,\boldsymbol{\nu}+p\boldsymbol{\nu}'(\phi)[\boldsymbol{\varphi}])\,\varpi(\boldsymbol{\varphi}_0)+p\boldsymbol{\nu}\varpi'(\boldsymbol{\varphi}_0)[\boldsymbol{\varphi}]\}\,\mathrm{d}\gamma$$

が得られる．ここで，p は空間固定 (定義 9.4.2) を仮定していることから，$p'(\phi)[\boldsymbol{\varphi}]=\boldsymbol{\nabla}p\cdot\boldsymbol{\varphi}$ が成り立ち，命題 9.2.4 と命題 9.2.5 を用いれば，本命題の結果が得られる． $\square$

9.5 状態決定問題

　関数や汎関数に対する形状微分の定義と公式が得られたので，それらを使って状態決定問題となる偏微分方程式の境界値問題を定義しよう．本章では，簡単のために，最初に Poisson 問題を考えることにする．

　領域変動型の形状最適化問題では，既知関数や解関数の定義域が動くことになる．そこで，既知関数に関しては，初期領域 Ω_0 のときに $b_0 : D \to \mathbb{R}$, $p_{\mathrm{N}0} : D \to \mathbb{R}$, $u_{\mathrm{D}0} : D \to \mathbb{R}$ のように定義されていて，状態決定問題の定義域が $\Omega(\phi)$ に動いたあとは，ある指定された変動則により $b(\phi) : D \to \mathbb{R}$, $p_{\mathrm{N}}(\phi) : D \to \mathbb{R}$, $u_{\mathrm{D}}(\phi) : D \to \mathbb{R}$ のように与えられると仮定する．その変動則については，のちに評価関数の形状微分を求める際に指定することにする．

解関数に関しては，H^1 級の関数となることから，Calderón の拡張定理 (定理 4.4.4) により，D 上で定義された関数とみなすことができる．そこで，$\phi \in \mathcal{D}$ に対して，状態決定問題に対する同次形の解 (Dirichlet 条件を与える既知関数 u_{D} に対して，$\tilde{u} = u - u_{\mathrm{D}}$ で与えられる) が入る実 Hilbert 空間 (最適設計問題における状態変数の線形空間) を

$$U(\phi) = \left\{ u \in H^1(D;\mathbb{R}) \;\middle|\; u = 0 \text{ on } \Gamma_{\mathrm{D}}(\phi) \right\} \tag{9.5.1}$$

とおく．さらに，のちに示される勾配法によって得られる領域変動が式 (9.1.3) の $\mathcal{D}$ に入るようにするために，状態決定問題に対する同次形の解 $\tilde{u}$ が入る状態変数の許容集合を，

$$\mathcal{S}(\phi) = U(\phi) \cap W^{2,4}(D;\mathbb{R}) \tag{9.5.2}$$

とおく．$\mathcal{S}(\phi)$ の条件に加えてさらに必要となる正則性については，必要となったときに示すことにする．

既知関数の正則性について次の 2 組の仮定をおく．あとで関数の形状微分公式を用いて形状微分を求める際に，次の仮定を用いる．

仮定 9.5.1 (既知関数の正則性 (関数の形状微分))

既知関数は，$\phi \in \mathcal{D}^{\circ}$ の近傍 $B \subset Y$ 上で

$$b \in C^1_{\mathrm{S}'}\left(B; C^{0,1}(D;\mathbb{R})\right), \quad p_{\mathrm{N}} \in C^1_{\mathrm{S}'}\left(B; C^{1,1}(D;\mathbb{R})\right),$$
$$u_{\mathrm{D}} \in C^1_{\mathrm{S}'}\left(B; W^{2,4}(D;\mathbb{R})\right)$$

であると仮定する．これらの形状微分を $(\,\cdot\,)'(\phi)[\varphi]$ のようにかく．

また，あとで関数の形状偏微分公式を用いて形状微分を求める際に，次の仮定を用いる．

仮定 9.5.2 (既知関数の正則性 (関数の形状偏微分))

既知関数は

$$
\begin{aligned}
&b \in C^1_{\mathrm{S}^*}\left(B; C^{0,1}(D;\mathbb{R})\right), \quad p_{\mathrm{N}} \in C^1_{\mathrm{S}^*}\left(B; C^{1,1}(D;\mathbb{R})\right), \\
&u_{\mathrm{D}} \in C^1_{\mathrm{S}'}\left(B; W^{2,2q_{\mathrm{R}}}(D;\mathbb{R})\right)
\end{aligned}
$$

であると仮定する．ただし，$q_{\mathrm{R}} > d$ とする．これらの形状偏微分を $(\,\cdot\,)^*(\phi)[\varphi]$ のようにかく．

また，境界の正則性については次の仮定を設ける．

仮定 9.5.3 (角点の開き角)

$\Omega(\phi)$ が 2 次元領域の場合には境界上の角点，$\Omega(\phi)$ が 3 次元領域の場合には境界上の角線に垂直な面を考え，その面における境界上の角点に関して，開き角 β が，Dirichlet 境界 と Neumann 境界の

1. 同一種境界上にあるとき $\beta < 2\pi/3$，
2. 混合境界上にあるとき $\beta < \pi/3$

が満たされると仮定する．

仮定 9.5.1 と仮定 9.5.3 が成り立てば u が S に入ることは，命題 5.3.1 によって確認される．

以上の仮定を用いて，領域変動型 Poisson 問題を次のように定義する．ここでも，$\partial_\nu = \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nabla}$ とかくことにする．

問題 9.5.4 (領域変動型 Poisson 問題)

$\phi \in \mathcal{D}$ に対して $b(\phi)$, $p_{\mathrm{N}}(\phi)$, $u_{\mathrm{D}}(\phi)$ が与えられたとき，

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= b(\phi) \quad \text{in } \Omega(\phi), \\
\partial_\nu u &= p_{\mathrm{N}}(\phi) \quad \text{on } \Gamma_p(\phi), \\
\partial_\nu u &= 0 \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{N}}(\phi) \setminus \bar{\Gamma}_p(\phi), \\
u &= u_{\mathrm{D}}(\phi) \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{D}}(\phi)
\end{aligned}
$$

を満たす $u : \Omega(\phi) \to \mathbb{R}$ を求めよ．

これ以降，$b(\phi)$ や $u_{\mathrm{D}}(\phi)$ および $U(\phi)$ や $\mathcal{S}(\phi)$ などを b や u_{D} および U や $\mathcal{S}$ などのようにかくことにする．

問題 9.5.4 は，のちに示される領域変動型の形状最適化問題 (問題 9.6.3) において等式制約として扱われる．のちの議論では，等式制約は Lagrange 関数の停留条件に置き換えられる．ここではそのための準備として，問題 9.5.4 の Lagrange 関数を

$$\mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{\phi}, u, v) = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} (-\boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v + bv)\, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_p(\boldsymbol{\phi})} p_{\mathrm{N}} v \, \mathrm{d}\gamma + \int_{\Gamma_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{\phi})} \{(u - u_{\mathrm{D}})\, \partial_\nu v + v \partial_\nu u\} \, \mathrm{d}\gamma \tag{9.5.3}$$

と定義しておく．ここで，u は問題 9.5.4 の解とはかぎらないとする．v は Lagrange 乗数として導入された $\mathcal{S}$ の要素とする．式 (9.5.3) において，右辺第 3 項は，第 8 章において θ 型 Poisson 問題に対する Lagrange 関数を定義した式 (8.2.4) の場合と同様，のちの議論をわかりやすくするために追加された．また，式 (9.5.3) を第 7 章で示した抽象的変分問題に対する Lagrange 関数の定義式 (7.2.3) に合わせれば，$\tilde{u} = u - u_{\mathrm{D}}$ とおくことにして，

$$\mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{\phi}, u, v) = -a(\boldsymbol{\phi})(u, v) + l(\boldsymbol{\phi})(v) = -a(\boldsymbol{\phi})(\tilde{u}, v) + \hat{l}(\boldsymbol{\phi})(v) \tag{9.5.4}$$

とかける．ここで，

$$a(\boldsymbol{\phi})(u, v) = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v \, \mathrm{d}x, \tag{9.5.5}$$

$$l(\boldsymbol{\phi})(v) = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} bv \, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_p(\boldsymbol{\phi})} p_{\mathrm{N}} v \, \mathrm{d}\gamma, \tag{9.5.6}$$

$$\hat{l}(\boldsymbol{\phi})(v) = l(\boldsymbol{\phi})(v) + a(\boldsymbol{\phi})(u_{\mathrm{D}}, v) \tag{9.5.7}$$

と定義する．u が問題 9.5.4 の解のとき，任意の $v \in U$ に対して，

$$\mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{\phi}, u, v) = 0$$

が成り立つ．この式は問題 9.5.4 の弱形式と同値である．

なお，9.3 節の表記法に従えば，$\mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{\phi}, u, v)$ は $\mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{\phi}, u, \boldsymbol{\nabla} u, \partial_\nu u, v, \boldsymbol{\nabla} v, \partial_\nu v)$ とかくべきである．しかし，これ以降は $\mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{\phi}, u, v)$ のようにかくことにする．

9.6 領域変動型形状最適化問題

9.5 節において，設計変数 $\phi \in \mathcal{D}$ が与えられたときに状態変数 $\tilde{u} = u - u_{\mathrm{D}} \in \mathcal{S}$ が状態決定問題の解として決定されることをみてきた．それらの変数を用いて形状最適化問題を定義する．

ここでは，評価関数を $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ に対して

$$f_i(\boldsymbol{\phi}, u) = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \zeta_i(\boldsymbol{\phi}, u, \boldsymbol{\nabla} u)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_{\eta i}(\boldsymbol{\phi})} \eta_{\mathrm{N}i}(\boldsymbol{\phi}, u)\,\mathrm{d}\gamma \\ - \int_{\Gamma_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{\phi})} \eta_{\mathrm{D}i}(\boldsymbol{\phi}, \partial_\nu u)\,\mathrm{d}\gamma - c_i \tag{9.6.1}$$

とおく．ただし，$c_1, \ldots, c_m$ は定数で，すべての $i \in \{1, \ldots, m\}$ に対して $f_i \leq 0$ を満たすある $(\boldsymbol{\phi}, \tilde{u}) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}$ が存在する (Slater 制約想定が満たされる) ように定められているとする．また，ζ_i, $\eta_{\mathrm{N}i}$ および $\eta_{\mathrm{D}i}$ は次のように与えられていると仮定する．これらの仮定は，のちに示される随伴問題 (問題 9.8.1) の解が適切な正則性をもつために必要とされる．評価関数の 2 階形状微

分を得るためには，2 階微分に対する仮定が必要となるが，ここでは省略する．ここでも，2 組の仮定を設けることにする．

まず，関数の形状微分公式を用いるときに，次の仮定を用いることにする．

仮定 9.6.1 (評価関数の正則性 (関数の形状微分))

式 (9.6.1) の評価関数 f_i $(i \in \{0, 1, \dots, m\})$ では，$\zeta_i \in C^1\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}\right)$, $\eta_{\mathrm{N}i} \in C^1\left(\mathbb{R}; \mathbb{R}\right)$, $\eta_{\mathrm{D}i} \in C^1\left(\mathbb{R}; \mathbb{R}\right)$ を仮定し，$(\boldsymbol{\phi}, u, \boldsymbol{\nabla} u, \partial_\nu u) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G}_{\Gamma_{\mathrm{D}}}$ $(\mathcal{G} = \{ \boldsymbol{\nabla} u \mid u \in \mathcal{D}\}$, $\mathcal{G}_{\Gamma_{\mathrm{D}}} = \left\{ \partial_\nu u|_{\Gamma_{\mathrm{D}}} \;\middle|\; u \in \mathcal{D}\right\})$ と任意の $(\varphi, \hat{u}) \in Y \times U$ に対して，

仮定 9.6.1 (評価関数の正則性 (関数の形状微分))

$$
\begin{aligned}
&\zeta_i(\boldsymbol{\phi}, u, \boldsymbol{\nabla} u), \zeta_{i\boldsymbol{\phi}'}(\boldsymbol{\phi}, u, \boldsymbol{\nabla} u)[\boldsymbol{\varphi}] \in H^1 \cap L^\infty(D; \mathbb{R}), \\
&\zeta_{iu}(\boldsymbol{\phi}, u, \boldsymbol{\nabla} u)[\hat{u}] \in L^4(D; \mathbb{R}), \quad \zeta_{i(\boldsymbol{\nabla} u)^\top}(\boldsymbol{\phi}, u, \boldsymbol{\nabla} u)[\boldsymbol{\nabla} \hat{u}] \in W^{1,4}\left(D; \mathbb{R}^d\right), \\
&\eta_{\mathrm{N}i}(\boldsymbol{\phi}, u), \eta_{\mathrm{N}i\boldsymbol{\phi}'}(\boldsymbol{\phi}, u)[\boldsymbol{\varphi}] \in W^{2,q_{\mathrm{R}}}(D; \mathbb{R}), \quad \eta_{\mathrm{N}iu}(\boldsymbol{\phi}, u)[\hat{u}] \in W^{1,4}(D; \mathbb{R}), \\
&\eta_{\mathrm{D}i}(\boldsymbol{\phi}, \partial_\nu u), \eta_{\mathrm{D}i\boldsymbol{\phi}'}(\boldsymbol{\phi}, \partial_\nu u)[\boldsymbol{\varphi}] \in W^{1,q_{\mathrm{R}}}(D; \mathbb{R}), \\
&\eta_{\mathrm{D}i\partial_\nu u}(\boldsymbol{\phi}, \partial_\nu u)[\partial_\nu \hat{u}] \in W^{2,4}(D; \mathbb{R})
\end{aligned}
$$

であると仮定する．ただし，$\eta_{\mathrm{D}i}(\boldsymbol{\phi}, \partial_\nu u)$ が $\partial_\nu u$ に対して線形であると仮定する．非線形のときは，$\Gamma_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{\phi})$ 上で $(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi})_\tau = 0$ とする．また，$(\,\cdot\,)_{\boldsymbol{\phi}'}(\boldsymbol{\phi}, \,\cdot\,)[\boldsymbol{\varphi}]$ は関数の形状微分 (定義 9.1.1) を表す．

また，関数の形状偏微分公式を用いるときには，次の仮定を用いることにする．

仮定 9.6.2 (評価関数の正則性 (関数の形状偏微分))

式 (9.6.1) の評価関数 f_i $(i \in \{0, 1, \ldots, m\})$ では，$\zeta_i \in C^1\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}\right)$, $\eta_{\mathrm{N}i} \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $\eta_{\mathrm{D}i} \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ を仮定し，
$(\phi, u, \boldsymbol{\nabla} u, \partial_\nu u) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G}_{\Gamma_{\mathrm{D}}}$ $(\mathcal{G} = \{\boldsymbol{\nabla} u \mid u \in \mathcal{D}\}$,
$\mathcal{G}_{\Gamma_{\mathrm{D}}} = \left\{ \partial_\nu u|_{\Gamma_{\mathrm{D}}} \;\middle|\; u \in \mathcal{D}\right\})$ と任意の $(\varphi, \hat{u}) \in Y \times U$ に対して，

仮定 9.6.2 (評価関数の正則性 (関数の形状偏微分))

$$
\begin{aligned}
&\zeta_i\left(\boldsymbol{\phi}, u, \boldsymbol{\nabla} u\right), \zeta_{i\boldsymbol{\phi}^*}\left(\boldsymbol{\phi}, u, \boldsymbol{\nabla} u\right)[\boldsymbol{\varphi}] \in W^{1,q_{\mathrm{R}}}\left(D; \mathbb{R}\right),\\
&\zeta_{iu}\left(\boldsymbol{\phi}, u, \boldsymbol{\nabla} u\right)[\hat{u}] \in L^{2q_{\mathrm{R}}}\left(D; \mathbb{R}\right),\\
&\zeta_{i(\boldsymbol{\nabla} u)^\top}\left(\boldsymbol{\phi}, u, \boldsymbol{\nabla} u\right)[\boldsymbol{\nabla}\hat{u}] \in W^{1,2q_{\mathrm{R}}}\left(D; \mathbb{R}^d\right),\\
&\eta_{\mathrm{N}i}\left(\boldsymbol{\phi}, u\right), \eta_{\mathrm{N}i\boldsymbol{\phi}^*}\left(\boldsymbol{\phi}, u\right)[\boldsymbol{\varphi}] \in W^{2,q_{\mathrm{R}}}\left(D; \mathbb{R}\right), \quad \eta_{\mathrm{N}iu}\left(\boldsymbol{\phi}, u\right)[\hat{u}] \in W^{1,2q_{\mathrm{R}}}\left(D; \mathbb{R}\right),\\
&\eta_{\mathrm{D}i}\left(\boldsymbol{\phi}, \partial_\nu u\right), \eta_{\mathrm{D}i\boldsymbol{\phi}^*}\left(\boldsymbol{\phi}, \partial_\nu u\right)[\boldsymbol{\varphi}] \in W^{1,q_{\mathrm{R}}}\left(D; \mathbb{R}\right),\\
&\eta_{\mathrm{D}i\partial_\nu u}\left(\boldsymbol{\phi}, \partial_\nu u\right)[\partial_\nu \hat{u}] \in W^{2,2q_{\mathrm{R}}}\left(D; \mathbb{R}\right)
\end{aligned}
$$

であると仮定する．ただし，$q_{\mathrm{R}} > d$ とする．また，$\eta_{\mathrm{D}i}\left(\boldsymbol{\phi}, \partial_\nu u\right)$ は $\partial_\nu u$ に対して線形で，$\eta_{\mathrm{D}i\partial_\nu u}\left(\boldsymbol{\phi}, \partial_\nu u\right) = v_{\mathrm{D}i}$ のように与えられるとする．
$(\,\cdot\,)_{\boldsymbol{\phi}^*}\left(\boldsymbol{\phi}, \,\cdot\,\right)[\boldsymbol{\varphi}]$ は関数の形状偏微分 (定義 9.1.3) を表す．

これらの評価関数を用いて，領域変動型の形状最適化問題を次のように定義する．

問題 9.6.3 (領域変動型の形状最適化問題)

$\mathcal{D}$ と $\mathcal{S}$ をそれぞれ式 (9.1.3) と式 (9.5.2) のように定義する．$f_0, \ldots, f_m$ を式 (9.6.1) で定義する．このとき，

$$\min_{(\phi, u-u_{\mathrm{D}}) \in \mathcal{D}\times\mathcal{S}} \{ f_0(\phi, u) \mid f_1(\phi, u) \leq 0, \ldots, f_m(\phi, u) \leq 0, \text{ 問題 9.5.4} \}$$

を満たす $\Omega(\phi)$ を求めよ．

今後，領域変動型の形状最適化問題 (問題 9.6.3) に対して評価関数の Fréchet 微分や KKT 条件についてみていくことにする．その際，いくつかの定義に基づく Lagrange 関数が使われる．ここでは，混乱をきたさないように，それらの関係をまとめておく．領域変動型の形状最適化問題 (問題 9.6.3) に対する Lagrange 関数を

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}\left(\boldsymbol{\phi}, u, v_0, v_1, \ldots, v_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_m\right)\\&\quad=\mathscr{L}_0\left(\boldsymbol{\phi}, u, v_0\right)+\sum_{i\in\{1,\ldots,m\}} \lambda_i \mathscr{L}_i\left(\boldsymbol{\phi}, u, v_i\right)\end{aligned} \tag{9.6.2}$$

とかく．ただし，$\boldsymbol{\lambda}=\{\lambda_1,\ldots,\lambda_m\}^\top\in\mathbb{R}^m$ は $f_1(\boldsymbol{\phi},u)\le 0,\ldots,f_m(\boldsymbol{\phi},u)\le 0$ に対する Lagrange 乗数である．さらに，ある $i\in\{0,1,\ldots,m\}$ の評価関数 f_i

が u の汎関数である場合には，状態決定問題 (問題 9.5.4) が等式制約になることから，

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_i\left(\boldsymbol{\phi}, u, v_i\right) \\
&\quad = f_i\left(\boldsymbol{\phi}, u\right) + \mathscr{L}_{\mathrm{S}}\left(\boldsymbol{\phi}, u, v_i\right) \\
&\quad = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \left(\zeta_i\left(\boldsymbol{\phi}, u, \boldsymbol{\nabla} u\right) - \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v_i + b v_i\right) \mathrm{d}x \\
&\qquad + \int_{\Gamma_{\eta i}(\boldsymbol{\phi})} \eta_{\mathrm{N}i}\left(\boldsymbol{\phi}, u\right) \mathrm{d}\gamma + \int_{\Gamma_p(\boldsymbol{\phi})} p_{\mathrm{N}} v_i \,\mathrm{d}\gamma \\
&\qquad + \int_{\Gamma_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{\phi})} \left\{\left(u - u_{\mathrm{D}}\right) \partial_\nu v_i + v_i \partial_\nu u - \eta_{\mathrm{D}i}\left(\boldsymbol{\phi}, \partial_\nu u\right)\right\} \mathrm{d}\gamma - c_i
\end{aligned}
\tag{9.6.3}
$$

を $f_i(\phi, u)$ の Lagrange 関数という．ここで，$\mathscr{L}_{\mathrm{S}}$ は式 (9.5.3) で定義された状態決定問題の Lagrange 関数である．また，v_i は f_i のために用意された状態決定問題に対する Lagrange 乗数で，$\tilde{v}_i = v_i - \eta_{\mathrm{D}i\partial_\nu u}$ が $\mathcal{S}$ の要素であると仮定する．u と同様，$\tilde{v}_i$ の変動 $\hat{v}_i$ を考えるときには $\hat{v}_i \in U$ を仮定する．

9.7 最適解の存在

問題 9.6.3 に対する解の存在は，第 8 章と同様，第 7 章の定理 7.4.4 によって保証される．そのためには，補題 7.4.2 ($\mathcal{F}$ のコンパクト性) と仮定 7.4.3 (f_0 の連続性) が成り立つことを示す必要がある．$\mathcal{F}$ は，

$$\mathcal{F} = \{(\phi, \tilde{u}(\phi)) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S} \mid \text{問題 } 9.5.4\} \tag{9.7.1}$$

のように定義される．ここでは，$\tilde{u} = u - u_{\mathrm{D}} \in U$ とかくことにする．

前者の補題は，次の補題に置き換えられる [30, Lemma 2.5, p. 27, Lemma 2.15, p. 55, Lemma 2.20, p. 63].

補題 9.7.1 ($\mathcal{F}$ のコンパクト性)

仮定 9.5.1 と仮定 9.5.3 が満たされているとする．さらに，$\tilde{\Gamma}_0 = \Gamma_{p0} \cup \Gamma_{\eta 00} \cup \Gamma_{\eta 10} \cup \cdots \cup \Gamma_{\eta m0}$ は (区分的ではなく) $H^3 \cap C^{1,1}$ 級とする．このとき，$\mathcal{D}$ において一様収束する X 上の任意の Cauchy 列 $\phi_n \to \phi$ とそれらに対する問題 9.5.4 の解 $\tilde{u}_n = \tilde{u}(\phi_n) \in U$ $(n \to \infty)$ に対して，

$$\tilde{u}_n \to \tilde{u} \quad \text{strongly in } U$$

が成り立ち，$\tilde{u} = \tilde{u}(\phi) \in U$ は問題 9.5.4 の解である．

証明　ϕ_n に対する問題 9.5.4 の解 $\tilde{u}_n$ に対して，

$$\alpha_n \|\tilde{u}_n\|_U^2 \leq a(\phi_n)(\tilde{u}_n, \tilde{u}_n) = \hat{l}(\phi_n)(\tilde{u}_n) \leq \left\|\hat{l}(\phi_n)\right\|_{U'} \|\tilde{u}_n\|_U$$

が成り立つ．ただし，$a(\phi_n)$ と $\hat{l}(\phi_n)$ は 式 (9.5.4) で定義される．α_n は $a(\phi_n)$ の強圧性の定義で使われる正定数とする (例題 5.2.5 の解答 (1))．ここで，$\phi_n \to \phi$ が $\mathcal{D}$ において一様収束するとき，α_n は n に依存しない正定数 α に置き換えられる．$\left\|\hat{l}(\phi_n)\right\|_{U'} = \|l(\phi_n) + a(\phi_n)(u_{\mathrm{D}}, \cdot)\|_{U'}$ ($l(\phi_n)$ は 式 (9.5.4) に従う) が有界となることは，例題 5.2.5 の解答 (3) において，$\hat{l}(v)$ を $\hat{l}(\phi_n)(v)$ とみなし，Ω を $\Omega(\phi_n)$ に置き換えることで示される．そこで，$\tilde{u}_n \to \tilde{u}$ weakly in U なる部分列が存在することになる．

次に，この $\tilde{u}$ が ϕ に対する問題 9.5.4 の解になることを示す．問題 9.5.4 の定義より，任意の $v \in U$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} a\left(\phi_n\right)\left(\tilde{u}_n, v\right) = \lim_{n\to\infty} \hat{l}\left(\phi_n\right)(v) \tag{9.7.2}$$

が成り立つ．式 (9.7.2) の右辺は，仮定 9.5.2 より，

$$\lim_{n\to\infty} \hat{l}\left(\phi_n\right)(v) = \hat{l}(\phi)(v) \tag{9.7.3}$$

となる．実際，

$$\left|\hat{l}\left(\phi_n\right)(v) - \hat{l}(\phi)(v)\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left| \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi}_n)} b\left(\boldsymbol{\phi}_n\right) v \, \mathrm{d}x - \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} b\left(\boldsymbol{\phi}\right) v \, \mathrm{d}x \right| \\
&\quad + \left| \int_{\Gamma_p(\boldsymbol{\phi}_n)} p_{\mathrm{N}}\left(\boldsymbol{\phi}_n\right) v \, \mathrm{d}\gamma - \int_{\Gamma_p(\boldsymbol{\phi})} p_{\mathrm{N}}\left(\boldsymbol{\phi}\right) v \, \mathrm{d}\gamma \right| \\
&\quad + \left| \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi}_n)} \boldsymbol{\nabla} u_{\mathrm{D}}\left(\boldsymbol{\phi}_n\right) \cdot \boldsymbol{\nabla} v \, \mathrm{d}x - \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \boldsymbol{\nabla} u_{\mathrm{D}}\left(\boldsymbol{\phi}\right) \cdot \boldsymbol{\nabla} v \, \mathrm{d}x \right| \qquad (9.7.4)
\end{aligned}
$$

の右辺各項は次のように評価される．第 1 項は，

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_D \left(\chi_{\Omega(\boldsymbol{\phi}_n)} b\left(\boldsymbol{\phi}_n\right) - \chi_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} b\left(\boldsymbol{\phi}\right)\right) v \, \mathrm{d}x \right| \\
&\quad \leq \left| \int_D \chi_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \left(b\left(\boldsymbol{\phi}_n\right) - b\left(\boldsymbol{\phi}\right)\right) v \, \mathrm{d}x \right| + \left| \int_D \left(\chi_{\Omega(\boldsymbol{\phi}_n)} - \chi_{\Omega(\boldsymbol{\phi})}\right) b\left(\boldsymbol{\phi}_n\right) v \, \mathrm{d}x \right|
\end{aligned}
$$

となる．ただし，χ_Ω は特性関数 $\chi_\Omega : D \to \mathbb{R}$ $\left(\chi_\Omega(\Omega) = 1,\ \chi_\Omega\left(D \setminus \bar{\Omega}\right) = 0\right)$ を表す．ここで，仮定 9.5.1 において $b \in C^1_{\mathrm{S}'}(B; C^{0,1}(D; \mathbb{R}))$ が仮定され，特性関数に関して，

$$\chi_{\Omega(\phi_n)} \to \chi_{\Omega(\phi)} \quad \text{in } L^\infty(D; \mathbb{R})\text{-weak}^* \tag{9.7.5}$$

が成り立つ [35, Proposition 2.2.28, p. 45] ことから，式 (9.7.4) の右辺第 1 項はゼロに収束する．式 (9.7.4) の右辺第 3 項も，$u_{\mathrm{D}} \in C^1_{\mathrm{S}'}(B; W^{2,4}(D; \mathbb{R}))$ と式 (9.7.5) より，ゼロに収束することが示される．

式 (9.7.4) の右辺第 2 項のゼロへの収束は，次のように確認される．ここで，式 (9.1.3) で示された $\mathcal{D}$ における $\Gamma_p(\phi_n)$ に対する条件 ($H^3 \cap C^{1,1}$ 級) を次

のように修正する．$\Gamma_p(\phi_n)$ は，媒介変数 $\boldsymbol{\xi} \in \Xi = (0,1)^{d-1}$ の関数 $\boldsymbol{\sigma}(\phi_n)(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{\xi})$ を用いて，

$$
\begin{aligned}
\Gamma_p(\phi_n) &= \tilde{\Gamma}_p(\boldsymbol{\sigma}_n) \\
&= \left\{ \boldsymbol{\sigma}_n \in H^3 \cap C^{1,1}\left(\Xi; \mathbb{R}^d\right) \;\middle|\; \|\boldsymbol{\sigma}_n\|_{\mathbb{R}^d} \le c_0,\ c_1 \le \left\|\boldsymbol{\nabla}_\xi \boldsymbol{\sigma}_n^\top\right\|_{\mathbb{R}^{(d-1)\times d}} \le c_2, \right. \\
&\qquad \left. \left\|\boldsymbol{\nabla}_\xi^{|\boldsymbol{\beta}|} \boldsymbol{\sigma}_n^\top\right\|_{\mathbb{R}^{(d-1)^2\times d}} \le c_3 \ \ (|\boldsymbol{\beta}| = 2) \text{ a.e. in } \Xi \right\}
\end{aligned}
\tag{9.7.6}
$$

のようにかけるものとする．ただし，$\boldsymbol{\nabla}_\xi = (\partial/\partial \xi_i)_i$, c_0, ..., c_3 は正定数とする．これ以降，$\left\|\boldsymbol{\nabla}_\xi \boldsymbol{\sigma}_n^\top\right\|_{\mathbb{R}^{(d-1)\times d}}$ と $\left\|\boldsymbol{\nabla}_\xi \boldsymbol{\sigma}^\top\right\|_{\mathbb{R}^{(d-1)\times d}}$ をそれぞれ $\omega_{\Xi n}$ と ω_Ξ とかくことにする．また，$\tilde{p}_{\mathrm{N}}(t) = p_{\mathrm{N}}(t\phi_n + (1-t)\phi)$ $(t \in [0,1])$ と表す．この

とき，式 (9.7.4) の右辺第 2 項は，仮定 9.5.1，$\phi_n \to \phi$ ($\mathcal{D}$ において一様収束)，トレース作用素 $\left\|\gamma_{\Gamma_p(\phi)}\right\|$ の有界性 (式 (5.2.4))，文献 [15, Corollary 1] の結果および $p_{\mathrm{N}} \in C^1_{\mathrm{S}'}\left(B; C^{1,1}\left(D; \mathbb{R}\right)\right)$ (仮定 9.5.1) を用いれば，

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\tilde{\Gamma}_p(\boldsymbol{\sigma}_n)} p_{\mathrm{N}}\left(\boldsymbol{\phi}_n\right) v \,\mathrm{d}\gamma - \int_{\tilde{\Gamma}_p(\boldsymbol{\sigma})} p_{\mathrm{N}}\left(\boldsymbol{\phi}\right) v \,\mathrm{d}\gamma\right| \\
&\quad \leq \left|\int_{\Xi} \left\{\left(p_{\mathrm{N}}\left(\boldsymbol{\phi}_n\right) \circ \boldsymbol{\sigma}_n\right)\left(v \circ \boldsymbol{\sigma}_n\right) \omega_{\Xi n} - \left(p_{\mathrm{N}}\left(\boldsymbol{\phi}\right) \circ \boldsymbol{\sigma}\right)\left(v \circ \boldsymbol{\sigma}\right) \omega_{\Xi}\right\} \mathrm{d}\sigma\right| \\
&\quad \leq \left|\int_{\Xi} \left\{\left(p_{\mathrm{N}}\left(\boldsymbol{\phi}_n\right) \circ \boldsymbol{\sigma}_n\right) - \left(p_{\mathrm{N}}\left(\boldsymbol{\phi}_n\right) \circ \boldsymbol{\sigma}\right)\right\}\left(v \circ \boldsymbol{\sigma}_n\right) \omega_{\Xi n} \,\mathrm{d}\sigma\right| \\
&\qquad + \left|\int_{\Xi} \left\{\left(p_{\mathrm{N}}\left(\boldsymbol{\phi}_n\right) \circ \boldsymbol{\sigma}\right) - \left(p_{\mathrm{N}}\left(\boldsymbol{\phi}\right) \circ \boldsymbol{\sigma}\right)\right\}\left(v \circ \boldsymbol{\sigma}_n\right) \omega_{\Xi n} \,\mathrm{d}\sigma\right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \left| \int_{\Xi} \left(p_{\mathrm{N}}\left(\boldsymbol{\phi}\right) \circ \boldsymbol{\sigma}\right) \left(v \circ \boldsymbol{\sigma}_n - v \circ \boldsymbol{\sigma}\right) \omega_{\Xi n} \, \mathrm{d}\sigma \right| \\
&+ \left| \int_{\Xi} \left(p_{\mathrm{N}}\left(\boldsymbol{\phi}\right) \circ \boldsymbol{\sigma}\right) \left(v \circ \boldsymbol{\sigma}\right) \left(\omega_{\Xi n} - \omega_{\Xi}\right) \mathrm{d}\sigma \right| \\
\leq{} & \sqrt{c_2} \left\| v \right\|_{L^2(\Gamma_p(\boldsymbol{\phi}_n);\mathbb{R})} \left\| \left(p_{\mathrm{N}}\left(\boldsymbol{\phi}_n\right) \circ \boldsymbol{\sigma}_n\right) - \left(p_{\mathrm{N}}\left(\boldsymbol{\phi}_n\right) \circ \boldsymbol{\sigma}\right) \right\|_{L^2(\Xi;\mathbb{R})} \\
&+ \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \left\| v \right\|_{L^2(\Gamma_p(\boldsymbol{\phi}_n);\mathbb{R})} \left\| p_{\mathrm{N}}\left(\boldsymbol{\phi}_n\right) - p_{\mathrm{N}}\left(\boldsymbol{\phi}\right) \right\|_{L^2(\Gamma_p(\boldsymbol{\phi});\mathbb{R})} \\
&+ \sqrt{c_2} \left\| p_{\mathrm{N}}\left(\boldsymbol{\phi}\right) \right\|_{L^2(\Gamma_p(\boldsymbol{\phi});\mathbb{R})} \left\| v \circ \boldsymbol{\sigma}_n - v \circ \boldsymbol{\sigma} \right\|_{L^2(\Xi;\mathbb{R})} \\
&+ \frac{1}{c_1} \left\| \omega_{\Xi n} - \omega_{\Xi} \right\|_{H^2 \cap C^{0,1}\left(\Xi;\mathbb{R}^d\right)} \left\| p_{\mathrm{N}}\left(\boldsymbol{\phi}\right) \right\|_{L^2(\Gamma_p(\boldsymbol{\phi});\mathbb{R})} \left\| v \right\|_{L^2(\Gamma_p(\boldsymbol{\phi});\mathbb{R})} \\
\leq{} & \sqrt{c_2} \left\| \gamma_{\Gamma_p(\boldsymbol{\phi})} \right\|^2 \left\| v \right\|_U \left\| p_{\mathrm{N}}\left(\boldsymbol{\phi}_n\right) \right\|_{C^{1,1}(D;\mathbb{R})} \left\| \boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma} \right\|_{H^3 \cap C^{1,1}\left(\Xi;\mathbb{R}^d\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \left\| \gamma_{\Gamma_p(\boldsymbol{\phi})} \right\|^2 \|v\|_U \sup_{t \in [0,1]} \|\tilde{p}'_{\mathrm{N}}(t)\|_{C^{1,1}(D;\mathbb{R})} \|\boldsymbol{\phi}_n - \boldsymbol{\phi}\|_X \\
&+ \sqrt{c_2} \left\| \gamma_{\Gamma_p(\boldsymbol{\phi})} \right\|^2 \|p_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{\phi})\|_{C^{1,1}(D;\mathbb{R})} \|v\|_U \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}\|_{H^3 \cap C^{1,1}\left(\Xi;\mathbb{R}^d\right)} \\
&+ \frac{1}{c_1} \left\| \gamma_{\Gamma_p(\boldsymbol{\phi})} \right\|^2 \|\omega_{\Xi n} - \omega_{\Xi}\|_{H^2 \cap C^{0,1}\left(\Xi;\mathbb{R}^d\right)} \|p_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{\phi})\|_{C^{1,1}(D;\mathbb{R})} \|v\|_U \\
\to{}& 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}
\tag{9.7.7}
$$

となる．式 (9.7.7) の第 3 の不等号において，

$$
\left| \int_{\Xi} (v \circ \boldsymbol{\sigma}) \, \omega_{\Xi} \, \mathrm{d}\sigma \right| \le \sqrt{c_2} \left(\int_{\Xi} (v \circ \boldsymbol{\sigma})^2 \, \omega_{\Xi} \, \mathrm{d}\sigma \right)^{1/2} = \sqrt{c_2} \, \|v\|_{L^2(\Gamma_p(\boldsymbol{\phi}_n);\mathbb{R})} ,
$$

$$
\left| \int_{\Xi} \left\{ (p_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{\phi}_n) \circ \boldsymbol{\sigma}) - (p_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{\phi}) \circ \boldsymbol{\sigma}) \right\} \mathrm{d}\sigma \right|
$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{c_1}} \left(\int_{\Xi} \{ (p_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{\phi}_n) \circ \boldsymbol{\sigma}) - (p_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{\phi}) \circ \boldsymbol{\sigma}) \}^2 \omega_{\Xi} \, \mathrm{d}\sigma \right)^{1/2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{c_1}} \| p_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{\phi}_n) - p_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{\phi}) \|_{L^2(\Gamma_p(\boldsymbol{\phi});\mathbb{R})}$$

が使われた．以上の結果より，式 (9.7.3) が示された．

式 (9.7.2) の左辺は，

$$\lim_{n\to\infty} a(\boldsymbol{\phi}_n)(\tilde{u}_n, v) = a(\boldsymbol{\phi})(\tilde{u}, v) \tag{9.7.8}$$

となる．実際，

$$|a(\boldsymbol{\phi}_n)(\tilde{u}_n, v) - a(\boldsymbol{\phi})(\tilde{u}, v)|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \int_{\Omega(\phi_n)} \boldsymbol{\nabla} \tilde{u}_n \cdot \boldsymbol{\nabla} v \, \mathrm{d}x - \int_{\Omega(\phi)} \boldsymbol{\nabla} \tilde{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} v \, \mathrm{d}x \right| \\
&= \left| \int_D \left(\chi_{\Omega(\phi_n)} \boldsymbol{\nabla} \tilde{u}_n - \chi_{\Omega(\phi)} \boldsymbol{\nabla} \tilde{u} \right) \cdot \boldsymbol{\nabla} v \, \mathrm{d}x \right| \\
&\leq \left| \int_D \chi_{\Omega(\phi)} \left(\boldsymbol{\nabla} \tilde{u}_n - \boldsymbol{\nabla} \tilde{u} \right) \cdot \boldsymbol{\nabla} v \, \mathrm{d}x \right| \\
&\quad + \left| \int_D \left(\chi_{\Omega(\phi_n)} - \chi_{\Omega(\phi)} \right) \boldsymbol{\nabla} \tilde{u}_n \cdot \boldsymbol{\nabla} v \, \mathrm{d}x \right| \qquad (9.7.9)
\end{aligned}
$$

となる．$\tilde{u}_n \to \tilde{u}$ weakly in U と特性関数に関する式 (9.7.5) を式 (9.7.9) の右辺に適用すれば，式 (9.7.8) が得られる．式 (9.7.3) と 式 (9.7.8) を式 (9.7.2) に代入すれば，問題 9.5.4 の弱形式を得る．すなわち，$\tilde{u} = \tilde{u}(\phi) \in U$ は問題 9.5.4 の解である．

$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の u への弱収束が示されているので，強収束は，

$$\|u_n\|_U \to \|u\|_U \quad (n \to \infty) \tag{9.7.10}$$

を示すことで確かめられる．実際，U 上のノルムを，式 (9.5.5) の $a(\phi)$ を用いて，

$$|||v||| = a(\boldsymbol{\phi})(v, v)$$

とおけば，

$$|||u_n||| = a(\boldsymbol{\phi})(u_n, u_n) = \int_D \left(\chi_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} - \chi_{\Omega(\boldsymbol{\phi}_n)}\right) \boldsymbol{\nabla} u_n \cdot \boldsymbol{\nabla} u_n \,\mathrm{d}x + a(\boldsymbol{\phi}_n)(u_n, u_n)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_D \left(\chi_{\Omega(\phi)} - \chi_{\Omega(\phi_n)}\right) \boldsymbol{\nabla} u_n \cdot \boldsymbol{\nabla} u_n \, \mathrm{d}x + l\,(\phi_n)\,(u_n) \\
&\to l\,(\phi)\,(u) = |\!|\!| u |\!|\!| \quad (n \to \infty)
\end{aligned} \tag{9.7.11}
$$

が成り立つ．よって，$u_n \to u$ strongly in U が示された． □

$\tilde{u}\,(\phi)$ が $\mathcal{S}$ に入ることは，仮定 9.5.1 と仮定 9.5.3 を満たすように問題 9.5.4 を設定することによって保証される．

定理 7.4.4 が成り立つための後者の仮定 (f_0 の連続性) は，

$$
S = \left\{ (\phi, \tilde{u}\,(\phi)) \in \mathcal{F} \mid f_1\,(\phi, u\,(\phi)) \le 0, \cdots, f_m\,(\phi, u\,(\phi)) \le 0 \right\} \tag{9.7.12}
$$

上で f_0 が連続であることを示すことである．S は問題設定に依存するが，ここでは，f_i $(i \in \{0, 1, \ldots, m\})$ の連続性を次の補題で示し，S は空集合でないように不等式条件が与えられているという条件を仮定して，f_0 の連続性を示すことにする．

補題 9.7.2 (f_i の連続性)

f_i は，仮定 9.6.1 を満たすように式 (9.6.1) で与えられるとする．$\mathcal{D}$ において一様収束する X 上の任意の Cauchy 列 $\phi_n \to \phi$ に対して，補題 9.7.1 で決定される $u_n \to u$ strongly in U は Γ_{D} 上で $\|\partial_\nu u_n - \partial_\nu u\|_{L^2(\Gamma_{\mathrm{D}};\mathbb{R})} \to 0$ $(n \to \infty)$ を満たすとする．このとき，f_i は $\theta \in \mathcal{D}$ に対して連続である．

証明　$\phi_n \to \phi$ が $\mathcal{D}$ において一様収束するときに，

$$
\begin{aligned}
&\left| f_i(\boldsymbol{\phi}_n, u_n) - f_i(\boldsymbol{\phi}, u) \right| \\
&\quad \leq \left| \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi}_n)} \zeta_i(\boldsymbol{\phi}_n, u_n, \boldsymbol{\nabla} u_n)\,\mathrm{d}x - \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \zeta_i(\boldsymbol{\phi}, u, \boldsymbol{\nabla} u)\,\mathrm{d}x \right| \\
&\qquad + \left| \int_{\Gamma_{\eta i}(\boldsymbol{\phi}_n)} \eta_{\mathrm{N}i}(\boldsymbol{\phi}_n, u_n)\,\mathrm{d}\gamma - \int_{\Gamma_{\eta i}(\boldsymbol{\phi})} \eta_{\mathrm{N}i}(\boldsymbol{\phi}, u)\,\mathrm{d}\gamma \right| \\
&\qquad + \left| \int_{\Gamma_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{\phi}_n)} \eta_{\mathrm{D}i}(\boldsymbol{\phi}_n, \partial_\nu u_n)\,\mathrm{d}\gamma - \int_{\Gamma_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{\phi})} \eta_{\mathrm{D}i}(\boldsymbol{\phi}, \partial_\nu u)\,\mathrm{d}\gamma \right| \\
&\quad = e_\Omega + e_{\Gamma_\eta} + e_{\Gamma_{\mathrm{D}}} \to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}
\tag{9.7.13}
$$

を示せば証明は完了する．e_Ω に対して，

$$
\begin{aligned}
e_\Omega &\leq \left| \int_D \left(\chi_{\Omega(\boldsymbol{\phi}_n)} - \chi_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \right) \zeta_i \left(\boldsymbol{\phi}_n, u_n, \boldsymbol{\nabla} u_n \right) \mathrm{d}x \right| \\
&\quad + \left| \int_D \chi_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \left(\zeta_i \left(\boldsymbol{\phi}_n, u_n, \boldsymbol{\nabla} u_n \right) - \zeta_i \left(\boldsymbol{\phi}, u, \boldsymbol{\nabla} u \right) \right) \mathrm{d}x \right| \\
&= e_{\Omega 1} + e_{\Omega 2}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．$e_{\Omega 1}$ は，式 (9.7.5) より，ゼロに収束する．$e_{\Omega 2}$ は，$\tilde{u}_n \to \tilde{u}$ weakly in U と ζ_i が仮定 9.6.1 を満たすように与えられていれば，

$\tilde{\zeta}_i(t) = \zeta_i(t\boldsymbol{\phi}_n + (1-t)\boldsymbol{\phi}, tu_n + (1-t)n, t\boldsymbol{\nabla}u_n + (1-t)\boldsymbol{\nabla}u)$ $(t \in [0,1])$ とかくとき，$\zeta_i \in C^1\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}\right)$ (仮定　9.6.1) を用いれば，

$$\begin{aligned}
e_{\Omega 2} \leq{}& \sup_{t\in[0,1]} \left| \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \tilde{\zeta}_{i\boldsymbol{\phi}'}(t) [\boldsymbol{\phi}_n - \boldsymbol{\phi}] \,\mathrm{d}x \right| + \sup_{t\in[0,1]} \left| \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \tilde{\zeta}_{iu}(t) [u_n - u] \,\mathrm{d}x \right| \\
&+ \sup_{t\in[0,1]} \left| \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \tilde{\zeta}_{i\boldsymbol{\nabla}u}(t) [\boldsymbol{\nabla}u_n - \boldsymbol{\nabla}u] \,\mathrm{d}x \right| \\
\leq{}& \sup_{t\in[0,1]} \left\| \tilde{\zeta}_{i\boldsymbol{\phi}'}(t) \right\|_{H^1 \cap L^\infty(D;\mathbb{R})} \|\boldsymbol{\phi}_n - \boldsymbol{\phi}\|_X \\
&+ \sup_{t\in[0,1]} \left\| \tilde{\zeta}_{iu}(t) \right\|_{L^4(D;\mathbb{R})} \|u_n - u\|_U \\
&+ \sup_{t\in[0,1]} \left\| \tilde{\zeta}_{i\boldsymbol{\nabla}u}(t) \right\|_{W^{1,4}(D;\mathbb{R})} \|\boldsymbol{\nabla}u_n - \boldsymbol{\nabla}u\|_{L^2(D;\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

$$\to 0 \quad (n \to \infty)$$

となる．e_{Γ_η} のゼロへの収束は，次のように示される．$\Gamma_{\eta i}(\phi_n)$ に対して式 (9.7.6) と同様の条件を仮定して，$\Gamma_{\eta i}(\phi_n)$ は $\boldsymbol{\sigma}(\phi_n)(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{\xi})$ ($\boldsymbol{\xi} \in \Xi = (0,1)^{d-1}$) による媒介変数表示 $\tilde{\Gamma}_{\eta i}(\boldsymbol{\sigma}_n)$ ができるものとする．また，$\tilde{\eta}_{\mathrm{N}i}(t) = \eta_{\mathrm{N}i}(t\boldsymbol{\phi}_n + (1-t)\boldsymbol{\phi}, tu_n + (1-t)u)$ ($t \in [0,1]$) と表す．$\tilde{u}_n \to \tilde{u}$ weakly in U，レース作用素の有界性，文献 [15, Corollary 1] の結果および $\eta_{\mathrm{N}i} \in W^{2,q_{\mathrm{R}}}(D;\mathbb{R})$ (仮定 9.6.1) を用いれば，

$$\begin{aligned}
e_{\Gamma_\eta} &= \left| \int_{\tilde{\Gamma}_{\eta i}(\boldsymbol{\sigma}_n)} \eta_{\mathrm{N}i}(\boldsymbol{\phi}_n, u_n)\,\mathrm{d}\gamma - \int_{\tilde{\Gamma}_{\eta i}(\boldsymbol{\sigma})} \eta_{\mathrm{N}i}(\boldsymbol{\phi}, u)\,\mathrm{d}\gamma \right| \\
&\le \left| \int_{\Xi} \left\{ (\eta_{\mathrm{N}i}(\boldsymbol{\phi}_n, u_n) \circ \boldsymbol{\sigma}_n)\,\omega_{\Xi n} - (\eta_{\mathrm{N}i}(\boldsymbol{\phi}, u) \circ \boldsymbol{\sigma})\,\omega_{\Xi} \right\} \mathrm{d}\sigma \right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left| \int_{\Xi} \left\{ \left(\eta_{\mathrm{N}i} \left(\boldsymbol{\phi}_n, u_n \right) \circ \boldsymbol{\sigma}_n \right) - \left(\eta_{\mathrm{N}i} \left(\boldsymbol{\phi}_n, u_n \right) \circ \boldsymbol{\sigma} \right) \right\} \omega_{\Xi n} \, \mathrm{d}\sigma \right| \\
&\quad + \left| \int_{\Xi} \left\{ \left(\eta_{\mathrm{N}i} \left(\boldsymbol{\phi}_n, u_n \right) \circ \boldsymbol{\sigma} \right) - \left(\eta_{\mathrm{N}i} \left(\boldsymbol{\phi}, u_n \right) \circ \boldsymbol{\sigma} \right) \right\} \omega_{\Xi n} \, \mathrm{d}\sigma \right| \\
&\quad + \left| \int_{\Xi} \left\{ \left(\eta_{\mathrm{N}i} \left(\boldsymbol{\phi}, u_n \right) \circ \boldsymbol{\sigma} \right) - \left(\eta_{\mathrm{N}i} \left(\boldsymbol{\phi}, u \right) \circ \boldsymbol{\sigma} \right) \right\} \omega_{\Xi n} \, \mathrm{d}\sigma \right| \\
&\quad + \left| \int_{\Xi} \left(\eta_{\mathrm{N}i} \left(\boldsymbol{\phi}, u \right) \circ \boldsymbol{\sigma} \right) \left(\omega_{\Xi n} - \omega_{\Xi} \right) \mathrm{d}\sigma \right| \\
&\leq \sqrt{c_2} \left\| \left(\eta_{\mathrm{N}i} \left(\boldsymbol{\phi}_n, u_n \right) \circ \boldsymbol{\sigma}_n \right) - \left(\eta_{\mathrm{N}i} \left(\boldsymbol{\phi}_n, u_n \right) \circ \boldsymbol{\sigma} \right) \right\|_{L^2(\Xi;\mathbb{R})} \\
&\quad + \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \left\| \eta_{\mathrm{N}i} \left(\boldsymbol{\phi}_n, u_n \right) - \eta_{\mathrm{N}i} \left(\boldsymbol{\phi}, u \right) \right\|_{L^2(\Gamma_{\eta i}(\boldsymbol{\phi});\mathbb{R})}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \left\| \eta_{\mathrm{N}i} \left(\boldsymbol{\phi}_n, u_n\right) - \eta_{\mathrm{N}i} \left(\boldsymbol{\phi}, u\right) \right\|_{L^2(\Gamma_{\eta i}(\boldsymbol{\phi});\mathbb{R})} \\
&+ \frac{1}{c_1} \left\| \omega_{\Xi n} - \omega_{\Xi} \right\|_{H^2 \cap C^{0,1}\left(\Xi;\mathbb{R}^d\right)} \left\| \eta_{\mathrm{N}i} \left(\boldsymbol{\phi}, u\right) \right\|_{L^2(\Gamma_{\eta i}(\boldsymbol{\phi});\mathbb{R})} \\
\leq\ & \sqrt{c_2} \left\| \gamma_{\Gamma_{\eta i}(\boldsymbol{\phi})} \right\| \left\| \eta_{\mathrm{N}i} \left(\boldsymbol{\phi}_n, u_n\right) \right\|_{W^{2,q_{\mathrm{R}}}(D;\mathbb{R})} \left\| \boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma} \right\|_{C^{1,1}\left(\Xi;\mathbb{R}^d\right)} \\
&+ \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \left\| \gamma_{\Gamma_{\eta i}(\boldsymbol{\phi})} \right\| \sup_{t \in [0,1]} \left\| \tilde{\eta}_{\mathrm{N}i\boldsymbol{\phi}} \left(t\right) \right\|_{W^{2,q_{\mathrm{R}}}(D;\mathbb{R})} \left\| \boldsymbol{\phi}_n - \boldsymbol{\phi} \right\|_X \\
&+ \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \left\| \gamma_{\Gamma_{\eta i}(\boldsymbol{\phi})} \right\| \sup_{t \in [0,1]} \left\| \tilde{\eta}_{\mathrm{N}iu} \left(t\right) \right\|_{W^{2,4}(D;\mathbb{R})} \left\| u_n - u \right\|_U \\
&+ \frac{1}{c_1} \left\| \gamma_{\Gamma_{\eta i}(\boldsymbol{\phi})} \right\| \left\| \omega_{\Xi n} - \omega_{\Xi} \right\|_{H^2 \cap C^{0,1}\left(\Xi;\mathbb{R}^d\right)} \left\| \eta_{\mathrm{N}i} \left(\boldsymbol{\phi}, u\right) \right\|_{W^{2,q_{\mathrm{R}}}(D;\mathbb{R})} \\
\to\ & 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}
\tag{9.7.14}
$$

が成り立つ．ただし，c_1, c_2 は式 (9.7.6) を $\Gamma_{\eta i}(\phi_n)$ に対してかきかえたときの正定数とする．$e_{\Gamma_{\mathrm{D}}} \to 0 \ (n \to \infty)$ も $\|\partial_\nu u_n - \partial_\nu u\|_{L^2(\Gamma_{\mathrm{D}};\mathbb{R})} \to 0 \ (n \to \infty)$ を用いて同様に示される．よって，式 (9.7.13) が示された． □

抽象的最適設計問題の解の存在に対する定理 7.4.4 における最初の仮定 ($\mathcal{F}$ のコンパクト性) は補題 9.7.1 によって確認された．もう一つの仮定 (f_0 の連続性) は，補題 9.7.2 と S が空でない条件が満たされたときに確認される．そのときに，問題 9.6.3 に対する解は存在する．

なお，ここでも，第 8 章で示した注意 8.4.3 と同様のことに留意する必要がある．すなわち，式 (9.1.3) で定義された $\mathcal{D}$ では，側面制約 $\|\phi\|_{H^2 \cap C^{0,1}(D;\mathbb{R}^d)} \le \beta$ が課されていた．この条件が有効になった場合には不等

式制約の一つとして考慮されなければならない．問題設定によっては，Lipschitz 境界ではないような尖った形状に収束する場合が考えられる．このような場合には，側面制約を有効にすることによって，収束形状が得られることになる．また，X と $\mathcal{D}$ の選択方法について，注意 8.4.4 と同様のことがいえる．

9.8 評価関数の微分

本章では，領域変動型の形状最適化問題 (問題 9.6.3) を勾配法あるいは Newton 法で解くことを考える．勾配法を使うためには，評価関数の形状微分が必要となる．また，Newton 法を使うためには，評価関数の 2 階形状微分 (Hesse 形式) が必要となる．ここでは，評価関数 f_i の形状微分と 2 階形状微分を，それぞれ 7.5.2 項で示された Lagrange 乗数法と 7.5.3 項で示された方法で求めてみよう．その際，9.3 節で示された関数の形状微分公式を用いた方法と関数の形状偏微分公式を用いた方法に分けてみていくことにする．ただし，2 階形状微分に関しては，関数の形状微分公式を用いた方法による結果のみを示すことにする．

§9.8.1　関数の形状微分公式による形状微分

最初に，関数の形状微分公式 (9.3.1 項) を使って $\mathscr{L}_i$ の Fréchet 微分を求め，その停留条件を使って f_i の形状微分を求めてみよう．

$\mathscr{L}_i(\boldsymbol{\phi}, u, v_i)$ の Fréchet 微分は，任意の $(\boldsymbol{\varphi}, \hat{u}, \hat{v}_i) \in X \times U \times U$ に対して，

$$\begin{aligned} & \mathscr{L}_i'(\boldsymbol{\phi}, u, v_i)[\boldsymbol{\varphi}, \hat{u}, \hat{v}_i] \\ & \quad = \mathscr{L}_{i\boldsymbol{\phi}'}(\boldsymbol{\phi}, u, v_i)[\boldsymbol{\varphi}] + \mathscr{L}_{iu}(\boldsymbol{\phi}, u, v_i)[\hat{u}] + \mathscr{L}_{iv_i}(\boldsymbol{\phi}, u, v_i)[\hat{v}_i] \end{aligned} \tag{9.8.1}$$

のようにかかれる．ただし，式 (9.3.5) と式 (9.3.15) の表記法に従うものとする．式 (9.3.5) と式 (9.3.15) で使われていた定義 9.1.1 に従う u' が，ここでは任意の $\hat{u} \in X$ に置き換えられている．その理由は，Lagrange 関数の定義においては，u は問題 9.5.4 の解とはかぎらないと仮定されていたためである．

以下で各項について詳細にみていこう．

式 (9.8.1) の右辺第 3 項は，

$$\mathscr{L}_{iv_i}(\boldsymbol{\phi}, u, v_i)[\hat{v}_i] = \mathscr{L}_{\mathrm{S}v_i}(\boldsymbol{\phi}, u, v_i)[\hat{v}_i] = \mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{\phi}, u, \hat{v}_i) \tag{9.8.2}$$

となる．式 (9.8.2) は状態決定問題 (問題 9.5.4) の Lagrage 関数になっている．そこで，u が状態決定問題の弱解ならば，その項はゼロとなる．

また，式 (9.8.1) の右辺第 2 項は，

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{iu}(\boldsymbol{\phi}, u, v_i)[\hat{u}] \\
&\quad = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \bigl(-\boldsymbol{\nabla}\hat{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}v_i + \zeta_{iu}(\boldsymbol{\phi}, u, \boldsymbol{\nabla}u)\,\hat{u} + \zeta_{i(\boldsymbol{\nabla}u)^\top}(\boldsymbol{\phi}, u, \boldsymbol{\nabla}u)\,\boldsymbol{\nabla}\hat{u}\bigr)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{\Gamma_{\eta i}(\boldsymbol{\phi})} \eta_{\mathrm{N}iu}(\boldsymbol{\phi}, u)\, \hat{u} \mathrm{d}\gamma \\
&+\int_{\Gamma_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{\phi})} \left\{\hat{u} \partial_\nu v_i + \left(v_i - \eta_{\mathrm{D}i\partial_\nu u}(\boldsymbol{\phi}, \partial_\nu u)\right) \partial_\nu \hat{u}\right\} \mathrm{d}\gamma
\end{aligned} \tag{9.8.3}
$$

となる．ここで，v_i が，任意の $\hat{u} \in U$ に対して，式 (9.8.3) がゼロとなるように決定できれば，式 (9.8.1) の右辺第 2 項もゼロとなる．その強形式は，$v_i \in W^{2,4}(D; \mathbb{R})$ を仮定すれば，

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \left(\zeta_{i(\boldsymbol{\nabla} u)^\top}(u, \boldsymbol{\nabla} u)\, \boldsymbol{\nabla} \hat{u} - \boldsymbol{\nabla} \hat{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} v_i\right) \mathrm{d}x \\
&\quad = \int_{\partial\Omega(\boldsymbol{\phi})} \hat{u} \left(\zeta_{i(\boldsymbol{\nabla} u)^\top} - \boldsymbol{\nabla} v_i\right) \cdot \boldsymbol{\nu}\, \mathrm{d}\gamma - \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \hat{u} \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\zeta_{i(\boldsymbol{\nabla} u)^\top} - \boldsymbol{\nabla} v_i\right) \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

とかけることから，次のようになる．

問題 9.8.1 (f_i に対する随伴問題)

$\phi \in \mathcal{D}$ に対して問題 9.5.4 の解 u が与えられたとき，

$$
\begin{aligned}
-\Delta v_i &= \zeta_{iu}(\boldsymbol{\phi}, u, \boldsymbol{\nabla} u) - \boldsymbol{\nabla} \cdot \zeta_{i(\boldsymbol{\nabla} u)^\top}(\boldsymbol{\phi}, u, \boldsymbol{\nabla} u) \quad \text{in } \Omega(\boldsymbol{\phi}), \\
\partial_\nu v_i &= \eta_{\mathrm{N}iu}(\boldsymbol{\phi}, u) + \zeta_{i(\boldsymbol{\nabla} u)^\top}(\boldsymbol{\phi}, u, \boldsymbol{\nabla} u) \cdot \boldsymbol{\nu} \quad \text{on } \Gamma_{\eta i}(\boldsymbol{\phi}), \\
\partial_\nu v_i &= \zeta_{i(\boldsymbol{\nabla} u)^\top}(\boldsymbol{\phi}, u, \boldsymbol{\nabla} u) \cdot \boldsymbol{\nu} \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{\phi}) \setminus \bar{\Gamma}_{\eta i}(\boldsymbol{\phi}), \\
v_i &= \eta_{\mathrm{D}i\partial_\nu u}(\boldsymbol{\phi}, \partial_\nu u) \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{\phi})
\end{aligned}
$$

を満たす $v_i : \Omega(\boldsymbol{\phi}) \to \mathbb{R}$ を求めよ．

なお，$v_i - \eta_{\mathrm{D}i\partial_\nu u}$ に対する許容集合 (随伴変数の許容集合) は，のちに示される領域変動型の形状最適化問題に対する解法により正則な解を得るために，$\mathcal{S}$ である必要がある．仮定 9.6.1 における ζ_{iu}, $\zeta_{i(\boldsymbol{\nabla} u)^\top}$, $\eta_{\mathrm{N}iu}$, $\eta_{\mathrm{D}i\partial_\nu u}$ の正則性に関する条件は，その結果を得るために与えられた．

さらに，式 (9.8.1) の右辺第 1 項は，命題 9.3.4 の結果を表した式 (9.3.5) と，命題 9.3.7 の結果を表した式 (9.3.15) の公式より，

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{i\phi'}(\boldsymbol{\phi}, u, v_i)[\boldsymbol{\varphi}] \\
&= \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \Big[\boldsymbol{\nabla} u \cdot \left\{ \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}^\top \right) \boldsymbol{\nabla} v_i \right\} + \boldsymbol{\nabla} v_i \cdot \left\{ \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}^\top \right) \boldsymbol{\nabla} u \right\} \\
&\qquad - \zeta_{i(\boldsymbol{\nabla} u)^\top} \cdot \left\{ \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}^\top \right) \boldsymbol{\nabla} u \right\} + \left(\zeta_i - \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v_i + b v_i \right) \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \left(\zeta_{i\boldsymbol{\phi}'} + v_i b'\right) \cdot \boldsymbol{\varphi}\Big] \mathrm{d}x \\
&+ \int_{\Gamma_{\eta i}(\boldsymbol{\phi})} \left(\kappa \eta_{\mathrm{N}i} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\nabla}_{\tau} \eta_{\mathrm{N}i} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\tau} + \eta_{\mathrm{N}i\boldsymbol{\phi}'} \cdot \boldsymbol{\varphi}\right) \mathrm{d}\gamma \\
&+ \int_{\partial\Gamma_{\eta i}(\boldsymbol{\phi}) \cup \Theta_{\eta i}(\boldsymbol{\phi})} \eta_{\mathrm{N}i} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\varsigma \\
&+ \int_{\Gamma_{p}(\boldsymbol{\phi})} \left\{\kappa p_{\mathrm{N}} v_i \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\nabla}_{\tau} \left(p_{\mathrm{N}} v_i\right) \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\tau} + v_i p_{\mathrm{N}}' \cdot \boldsymbol{\varphi}\right\} \mathrm{d}\gamma \\
&+ \int_{\partial\Gamma_{p}(\boldsymbol{\phi}) \cup \Theta_{p}(\boldsymbol{\phi})} p_{\mathrm{N}} v_i \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varphi} \mathrm{d}\varsigma \\
&+ \int_{\Gamma_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{\phi})} \Big[\left\{\left(u - u_{\mathrm{D}}\right) w\left(\boldsymbol{\varphi}, v_i\right) + \left(v_i - \eta_{\mathrm{D}i\partial_{\nu} u}\right) w\left(\boldsymbol{\varphi}, u\right)\right\}
\end{aligned}
$$

$$+\left\{(u-u_{\mathrm{D}})\,\partial_\nu v_i + v_i\partial_\nu u - \eta_{\mathrm{D}i}\left(\boldsymbol{\phi},\partial_\nu u\right)\right\}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}\right)_\tau + \eta_{\mathrm{D}i\boldsymbol{\phi}'}\cdot\boldsymbol{\varphi}\Big]\,\mathrm{d}\gamma \tag{9.8.4}$$

となる．ここで，$w\left(\boldsymbol{\varphi},u\right)$ と $\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}\right)_\tau$ はそれぞれ式 (9.3.12) と式 (9.2.6) に従う．また，$\Gamma_p\left(\boldsymbol{\phi}\right)$ と $\Gamma_{\eta i}\left(\boldsymbol{\phi}\right)$ が区分的に $H^3\cap C^{1,1}$ 級であること ($\mathcal{D}$ の定義において仮定された) を用いて，$\Gamma_p\left(\boldsymbol{\phi}\right)$ と $\Gamma_{\eta i}\left(\boldsymbol{\phi}\right)$ 上の積分が得られた．

以上の結果をふまえて，u と v_i がそれぞれ問題 9.5.4 と問題 9.8.1 の弱解であるとき，それらの Dirichlet 条件と仮定 9.6.1 の $\eta_{\mathrm{D}i}$ に対する条件が成り立つとき，式 (9.8.4) における $\Gamma_{\mathrm{D}}\left(\boldsymbol{\phi}\right)$ 上の積分は $\eta_{\mathrm{D}i\boldsymbol{\phi}'}\cdot\boldsymbol{\varphi}$ の項を除いてゼロとなる．そこで，$\tilde{f}_i$ に対して式 (7.5.15) の表記を用いて

$$\tilde{f}_i'\left(\boldsymbol{\phi}\right)[\boldsymbol{\varphi}] = \mathscr{L}_{i\boldsymbol{\phi}'}\left(\boldsymbol{\phi},u,v_i\right)[\boldsymbol{\varphi}] = \langle\boldsymbol{g}_i,\boldsymbol{\varphi}\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \left\{ \boldsymbol{G}_{\Omega i} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}^{\top} \right) + g_{\Omega i} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{g}_{\zeta b i} \cdot \boldsymbol{\varphi} \right\} \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\Gamma_p(\boldsymbol{\phi})} \boldsymbol{g}_{p i} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\gamma + \int_{\partial \Gamma_p(\boldsymbol{\phi}) \cup \Theta_p(\boldsymbol{\phi})} \boldsymbol{g}_{\partial p i} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\varsigma \\
&\quad + \int_{\Gamma_{\eta i}(\boldsymbol{\phi})} \boldsymbol{g}_{\eta i} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\gamma + \int_{\partial \Gamma_{\eta i}(\boldsymbol{\phi}) \cup \Theta_{\eta i}(\boldsymbol{\phi})} \boldsymbol{g}_{\partial \eta i} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\varsigma \\
&\quad + \int_{\Gamma_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{\phi})} \boldsymbol{g}_{\mathrm{D} i} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\gamma
\end{aligned} \tag{9.8.5}
$$

のようにかかれる．ここで，

$$
\boldsymbol{G}_{\Omega i} = \boldsymbol{\nabla} u \left(\boldsymbol{\nabla} v_i \right)^{\top} + \boldsymbol{\nabla} v_i \left(\boldsymbol{\nabla} u \right)^{\top} - \zeta_{i (\boldsymbol{\nabla} u)^{\top}} \left(\boldsymbol{\nabla} u \right)^{\top}, \tag{9.8.6}
$$

$$
g_{\Omega i} = \zeta_i - \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v_i + b v_i, \tag{9.8.7}
$$

$$\boldsymbol{g}_{\zeta b i} = \zeta_{i\boldsymbol{\phi}'} + v_i b', \tag{9.8.8}$$

$$\boldsymbol{g}_{p i} = \kappa p_{\mathrm{N}} v_i \boldsymbol{\nu} - \sum_{j\in\{1,\dots,d-1\}} \left\{\boldsymbol{\tau}_j \cdot \boldsymbol{\nabla}\left(p_{\mathrm{N}} v_i\right)\right\} \boldsymbol{\tau}_j + v_i p_{\mathrm{N}}', \tag{9.8.9}$$

$$\boldsymbol{g}_{\partial p i} = p_{\mathrm{N}} v_i \boldsymbol{\tau}, \tag{9.8.10}$$

$$\boldsymbol{g}_{\eta i} = \kappa \eta_{\mathrm{N}i} \boldsymbol{\nu} - \sum_{j\in\{1,\dots,d-1\}} \left(\boldsymbol{\tau}_j \cdot \boldsymbol{\nabla} \eta_{\mathrm{N}i}\right) \boldsymbol{\tau}_j + \eta_{\mathrm{N}i\boldsymbol{\phi}'}, \tag{9.8.11}$$

$$\boldsymbol{g}_{\partial \eta i} = \eta_{\mathrm{N}i} \boldsymbol{\tau}, \tag{9.8.12}$$

$$\boldsymbol{g}_{\mathrm{D}i} = \eta_{\mathrm{D}i\boldsymbol{\phi}'} \tag{9.8.13}$$

となる．なお，本書では $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ と $\boldsymbol{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ のスカラー積 $\sum_{(i,j)\in\{1,\dots,d\}^2} a_{ij}b_{ij}$ を $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ とかくことにする．また，式 (9.8.5) を導く際に，$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ および $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^d$ に対する恒等式

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{B}\boldsymbol{c}) = \left(\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{a}\right)\cdot\boldsymbol{c} = \left(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}^\top\right)\cdot\boldsymbol{B} \tag{9.8.14}$$

が使われた．今後，これらの関係はことわらずに使うことにする．

以上の結果に基づいて，式 (9.8.5) の g_i の正則性について，次の結果を得る．

定理 9.8.2 (f_i の形状微分 g_i)

$\phi \in \mathcal{D}$ に対して，b, p_{N}, u_{D}, ζ_i, $\eta_{\mathrm{N}i}$ および $\eta_{\mathrm{D}i}$ は仮定 9.5.1 および仮定 9.6.1 のように与えられているとする．また，u と v_i はそれぞれ状態決定問題 (問題 9.5.4) と f_i に対する随伴問題 (問題 9.8.1) の弱解で，式 (9.5.2) の $\mathcal{S}$ に入るとする．このとき，f_i の形状微分は式 (9.8.5) となる．また，$\boldsymbol{g}_{\partial p i} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$ および $\boldsymbol{g}_{\partial \eta i} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$ のとき，$\boldsymbol{g}_i$ は X' に入り，

定理 9.8.2 (f_i の形状微分 g_i)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{G}_{\Omega i} &\in H^1 \cap L^\infty \left(\Omega(\boldsymbol{\phi}); \mathbb{R}^{d\times d}\right), \\
g_{\Omega i} &\in H^1 \cap L^\infty \left(\Omega(\boldsymbol{\phi}); \mathbb{R}\right), \\
\boldsymbol{g}_{\zeta b i} &\in H^1 \cap L^\infty \left(\Omega(\boldsymbol{\phi}); \mathbb{R}^{d}\right), \\
\boldsymbol{g}_{p i} &\in H^{1/2} \cap L^\infty \left(\Gamma_p(\boldsymbol{\phi}); \mathbb{R}^{d}\right), \\
\boldsymbol{g}_{\eta i} &\in H^{1/2} \cap L^\infty \left(\Gamma_{\eta i}(\boldsymbol{\phi}); \mathbb{R}^{d}\right), \\
\boldsymbol{g}_{\mathrm{D} i} &\in H^{1/2} \cap L^\infty \left(\Gamma_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{\phi}); \mathbb{R}^{d}\right)
\end{aligned}
$$

となる．

証明　f_i の形状微分が式 (9.8.5) の g_i となることは上でみてきたとおりである．$\boldsymbol{g}_i$ の正則性に関しては次のことが成り立つ．$G_{\Omega i}$ の第 1 項に対して，Hölder の不等式 (定理 A.9.1) と Poincaré の不等式の系 (系 A.9.4) より，

$$
\begin{aligned}
&\left\| \left\{ \boldsymbol{\nabla} u \left(\boldsymbol{\nabla} v_i \right)^{\top} \right\} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}^{\top} \right) \right\|_{L^1(\Omega(\phi);\mathbb{R})} \\
&\quad \leq \left\| \boldsymbol{\nabla} u \left(\boldsymbol{\nabla} v_i \right)^{\top} \right\|_{L^2\left(\Omega(\phi);\mathbb{R}^{d\times d}\right)} \left\| \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}^{\top} \right\|_{L^2\left(\Omega(\phi);\mathbb{R}^{d\times d}\right)} \\
&\quad \leq \left\| \boldsymbol{\nabla} u \right\|_{L^4\left(\Omega(\phi);\mathbb{R}^{d}\right)} \left\| \boldsymbol{\nabla} v_i \right\|_{L^4\left(\Omega(\phi);\mathbb{R}^{d}\right)} \left\| \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}^{\top} \right\|_{L^2\left(\Omega(\phi);\mathbb{R}^{d\times d}\right)} \\
&\quad \leq \left\| u \right\|_{W^{1,4}(D;\mathbb{R})} \left\| v_i \right\|_{W^{1,4}(D;\mathbb{R})} \left\| \boldsymbol{\varphi} \right\|_{X} \\
&\quad \leq \left\| u \right\|_{W^{2,4}(D;\mathbb{R})} \left\| v_i \right\|_{W^{2,4}(D;\mathbb{R})} \left\| \boldsymbol{\varphi} \right\|_{X}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．仮定より，上式の右辺は有界である．そこで，$\boldsymbol{\nabla} u\left(\boldsymbol{\nabla} v_i\right)^{\top}$ は X' に入る．また，上式の関係から $\boldsymbol{\nabla} u\left(\boldsymbol{\nabla} v_i\right)^{\top}$ は $H^1 \cap L^{\infty}\left(\Omega\left(\boldsymbol{\phi}\right);\mathbb{R}^{d\times d}\right)$ にも入る．$G_{\Omega i}$ の他の項についても同様の結果が得られる．$g_{\Omega i}$ についても同様の結果が得られる．$\boldsymbol{g}_{\zeta bi}$ の結果は，仮定 9.5.1 と仮定 9.6.1 より明らかである．

また，$\boldsymbol{g}_{pi}$ の正則性は v_i と p_{N} の正則性に加えて，$\boldsymbol{\nu}$ と κ の正則性にも依存する．式 (9.8.9) の右辺第 1 項に対して，Hölder の不等式 (定理 A.9.1) とトレース定理 (定理 4.4.2) より，

$$
\begin{aligned}
&\left\|\kappa p_{\mathrm{N}} v_i \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\varphi}\right\|_{L^1(\Gamma_p(\boldsymbol{\phi});\mathbb{R})}\\
&\quad\leq \left\|\kappa p_{\mathrm{N}} v_i \boldsymbol{\nu}\right\|_{L^2\left(\Gamma_p(\boldsymbol{\phi});\mathbb{R}^d\right)}\left\|\boldsymbol{\varphi}\right\|_{L^2\left(\Gamma_p(\boldsymbol{\phi});\mathbb{R}^d\right)}\\
&\quad\leq \left\|\kappa\right\|_{H^{1/2}\cap L^{\infty}(\Gamma_p(\boldsymbol{\phi});\mathbb{R})}\left\|p_{\mathrm{N}}\right\|_{L^4(\Gamma_p(\boldsymbol{\phi});\mathbb{R})}\left\|v_i\right\|_{L^4(\Gamma_p(\boldsymbol{\phi});\mathbb{R})}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad \times \|\boldsymbol{\nu}\|_{H^{3/2}\cap C^{0,1}\left(\Gamma_p(\boldsymbol{\phi});\mathbb{R}^d\right)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2\left(\Gamma_p(\boldsymbol{\phi});\mathbb{R}^d\right)} \\
&\leq \|\gamma_{\partial\Omega}\|^3 \|p_{\mathrm{N}}\|_{W^{1,4}(\Omega(\boldsymbol{\phi});\mathbb{R})} \|v_i\|_{W^{1,4}(\Omega(\boldsymbol{\phi});\mathbb{R})} \\
&\quad \times \|\kappa\|_{H^{1/2}\cap L^\infty(\Gamma_p(\boldsymbol{\phi});\mathbb{R})} \|\boldsymbol{\nu}\|_{H^{3/2}\cap C^{0,1}\left(\Gamma_p(\boldsymbol{\phi});\mathbb{R}^d\right)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_X \\
&\leq \|\gamma_{\partial\Omega}\|^3 \|p_{\mathrm{N}}\|_{C^{1,1}(\Omega(\boldsymbol{\phi});\mathbb{R})} \|v_i\|_{W^{2,4}(\Omega(\boldsymbol{\phi});\mathbb{R})} \\
&\quad \times \|\kappa\|_{H^{1/2}\cap L^\infty(\Gamma_p(\boldsymbol{\phi});\mathbb{R})} \|\boldsymbol{\nu}\|_{H^{3/2}\cap C^{0,1}\left(\Gamma_p(\boldsymbol{\phi});\mathbb{R}^d\right)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_X
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで，

$$
\gamma_{\partial\Omega} : H^1\left(\Omega\left(\boldsymbol{\phi}\right);\mathbb{R}^d\right) \to H^{1/2}\left(\partial\Omega\left(\boldsymbol{\phi}\right);\mathbb{R}^d\right)
$$

はトレース作用素であり，$\partial\Omega(\phi)$ は Lipschitz 境界を仮定していることから，作用素ノルム $\|\gamma_{\partial\Omega}\|$ は有界である．また，$\Gamma_p(\phi)$ は，式 (9.1.3) の $\mathcal{D}$ で区分的に $H^3 \cap C^{1,1}$ 級と定義された．そこで，$\Gamma_p(\phi)$ 上で，$\boldsymbol{\nu}$ は $H^{3/2} \cap C^{0,1}$ 級，κ は $H^{1/2} \cap L^{\infty}$ 級となる．よって，$\kappa p_{\mathrm{N}} v_i \boldsymbol{\nu}$ は X' の要素で $H^{1/2} \cap L^{\infty}\left(\Gamma_p(\phi);\mathbb{R}^d\right)$ に入る．式 (9.8.9) の右辺第 2 項は，$\boldsymbol{\tau}_1(\phi)$, $\ldots, \boldsymbol{\tau}_{d-1}(\phi)$ は $\Gamma_p(\phi)$ 上で $H^{3/2} \cap C^{0,1}$ 級となり，$p_{\mathrm{N}} \in W^{2,4}(D;\mathbb{R})$ (仮定 9.5.1) と $v_i \in W^{2,4}(D;\mathbb{R})$ より，$H^{1/2} \cap L^{\infty}\left(\Gamma_p(\phi);\mathbb{R}^d\right)$ に入る (演習問題 **9.1**)．式 (9.8.9) の右辺第 3 項は，$v_i p_{\mathrm{N}}' \in H^2(D;\mathbb{R})$ となる．よって，$\boldsymbol{g}_{pi} \in H^{1/2} \cap L^{\infty}\left(\Gamma_p(\phi);\mathbb{R}^d\right)$ が示された．

$\boldsymbol{g}_{\eta i}$ の正則性についても，$\boldsymbol{\nabla}\eta_{\mathrm{N}i} \in W^{1,q_{\mathrm{R}}}(D;\mathbb{R})$ を用いて，$\boldsymbol{g}_{pi}$ と同じ理由により，定理の結果が得られる．また，$\boldsymbol{g}_{\mathrm{D}i}$ の結果は仮定 9.6.1 より明らかである．

なお，$\boldsymbol{g}_{\partial pi} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d}$ と仮定したのは，$\varphi \in X$ の $\partial\Gamma_p(\phi) \cup \Theta_p(\phi)$ へのトレースが定義できないためである．$\boldsymbol{g}_{\partial \eta i} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d}$ に関しても同様である． □

さらに，7.5.3 項で示された方法にしたがって，評価関数の 2 階形状微分を求めてみよう．ここでは，関数の形状微分公式を用いることにする．

$\tilde{f}_i$ の 2 階形状微分を得るために，次の仮定を設ける．

仮定 9.8.3 ($\tilde{f}_i$ の 2 階形状微分)

状態決定問題 (問題 9.5.4) と式 (9.6.1) で定義された評価関数 f_i に対して，それぞれ

1. $b = 0$
2. ζ_i は ϕ と u の関数ではなく，∇u の 2 次形式
3. 式 (9.8.9) から式 (9.8.13) がゼロ，あるいは式 (9.1.1) において $\tilde{\Gamma}_0 = \Gamma_{p0} \cup \Gamma_{\eta i0} \in \bar{\Omega}_{\mathrm{C0}}$

と仮定する．

f_i の Lagrange 関数 $\mathscr{L}_i$ は式 (9.6.3) によって定義されている．(ϕ, u) を設計変数とみなし，その許容集合と許容方向集合を

$$
\begin{aligned}
S &= \left\{ (\boldsymbol{\phi}, u) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S} \mid \mathscr{L}_{\mathrm{S}} (\boldsymbol{\phi}, u, v) = 0 \text{ for all } v \in U \right\}, \\
T_S (\boldsymbol{\phi}, u) &= \left\{ (\boldsymbol{\varphi}, \hat{v}) \in X \times U \mid \mathscr{L}_{\mathrm{S}\boldsymbol{\phi} u} (\boldsymbol{\phi}, u, v) [\boldsymbol{\varphi}, \hat{v}] = 0 \text{ for all } v \in U \right\}
\end{aligned}
$$

とおく．このとき，$(\phi, u) \in S$ の任意変動 $(\boldsymbol{\varphi}_1, \hat{v}_1), (\boldsymbol{\varphi}_2, \hat{v}_2) \in T_S (\phi, u)$ に対する $\mathscr{L}_i$ の 2 階 Fréchet 偏微分は，式 (7.5.21) と同様，式 (9.1.6) を考慮して，

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{i(\boldsymbol{\phi}', u)(\boldsymbol{\phi}', u)} (\boldsymbol{\phi}, u, v_i) [(\boldsymbol{\varphi}_1, \hat{v}_1), (\boldsymbol{\varphi}_2, \hat{v}_2)] \\
&\quad = \left(\mathscr{L}_{0(\boldsymbol{\phi}', u)} \right)_{(\boldsymbol{\phi}', u)} (\boldsymbol{\phi}, u, v_i) [(\boldsymbol{\varphi}_1, \hat{v}_1), (\boldsymbol{\varphi}_2, \hat{v}_2)] + \langle \boldsymbol{g}_0 (\boldsymbol{\phi}), \boldsymbol{t} (\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2) \rangle \\
&\quad = \left(\mathscr{L}_{i\boldsymbol{\phi}'} (\boldsymbol{\phi}, u, v_i) [\boldsymbol{\varphi}_1] + \mathscr{L}_{iu} (\boldsymbol{\phi}, u, v_i) [\hat{v}_1] \right)_{\boldsymbol{\phi}'} [\boldsymbol{\varphi}_2]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \left(\mathscr{L}_{i\boldsymbol{\phi}'}\left(\boldsymbol{\phi}, u, v_i\right)\left[\boldsymbol{\varphi}_1\right] + \mathscr{L}_{iu}\left(\boldsymbol{\phi}, u, v_i\right)\left[\hat{v}_1\right]\right)_u\left[\hat{v}_2\right] \\
&\quad + \left\langle \boldsymbol{g}_0\left(\boldsymbol{\phi}\right), \boldsymbol{t}\left(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2\right)\right\rangle \\
&= \left(\mathscr{L}_{i\boldsymbol{\phi}'}\right)_{\boldsymbol{\phi}'}\left(\boldsymbol{\phi}, u, v_i\right)\left[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2\right] + \mathscr{L}_{i\boldsymbol{\phi}'u}\left(\boldsymbol{\phi}, u, v_i\right)\left[\boldsymbol{\varphi}_1, \hat{v}_2\right] \\
&\quad + \mathscr{L}_{i\boldsymbol{\phi}'u}\left(\boldsymbol{\phi}, u, v_i\right)\left[\boldsymbol{\varphi}_2, \hat{v}_1\right] + \mathscr{L}_{iuu}\left(\boldsymbol{\phi}, u, v_i\right)\left[\hat{v}_1, \hat{v}_2\right] \\
&\quad + \left\langle \boldsymbol{g}_0\left(\boldsymbol{\phi}\right), \boldsymbol{t}\left(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2\right)\right\rangle
\end{aligned} \tag{9.8.15}
$$

となる．ただし，$\left\langle \boldsymbol{g}_0\left(\boldsymbol{\phi}\right), \boldsymbol{t}\left(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2\right)\right\rangle$ は式 (9.1.8) (あるいは式 (9.3.10)) の定義に従う．

式 (9.8.15) の右辺第 1 項と第 5 項は，式 (9.8.4) の右辺第 1 項と式 (9.3.11) を用いて，

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathscr{L}_{i\boldsymbol{\phi}'}\right)_{\boldsymbol{\phi}'}(\boldsymbol{\phi}, u, v_i)\left[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2\right] + \left\langle \boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{\phi}), \boldsymbol{t}(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2)\right\rangle \\
&\quad = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \Big[\left\{ \boldsymbol{\nabla} u \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla} v_i \right) \right\}_{\boldsymbol{\phi}'} [\boldsymbol{\varphi}_2] \\
&\qquad + \left\{ \boldsymbol{\nabla} v_i \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla} u \right) \right\}_{\boldsymbol{\phi}'} [\boldsymbol{\varphi}_2] - \left\{ \zeta_{i(\boldsymbol{\nabla} u)^\top} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla} u \right) \right\}_{\boldsymbol{\phi}'} [\boldsymbol{\varphi}_2] \\
&\qquad + \left(\zeta_i - \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v_i \right) \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \right)_{\boldsymbol{\phi}'} [\boldsymbol{\varphi}_2] \\
&\qquad + \left\{ \boldsymbol{\nabla} u \left(\boldsymbol{\nabla} v_i \right)^\top + \boldsymbol{\nabla} v_i \left(\boldsymbol{\nabla} u \right)^\top - \zeta_{i(\boldsymbol{\nabla} u)^\top} \left(\boldsymbol{\nabla} u \right)^\top \right\} \\
&\qquad\quad \cdot \left\{ \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top - \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 \right) \right\}
\end{aligned}
$$

$$
+ (\zeta_i - \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v_i) \left\{ \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \right)^\top \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top - (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2) (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1) \right\} \Bigg] \mathrm{d}x
\tag{9.8.16}
$$

となる．式 (9.8.16) 右辺被積分関数の第 1 項は，

$$
\begin{aligned}
&\left\{ \boldsymbol{\nabla} u \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla} v_i \right) \right\}_{\phi'} [\boldsymbol{\varphi}_2] \\
&\quad = - \left\{ \boldsymbol{\nabla} u \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla} v_i \right) \right\}_{\boldsymbol{\nabla} u} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \boldsymbol{\nabla} u \right) \\
&\qquad - \left\{ \boldsymbol{\nabla} u \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla} v_i \right) \right\}_{\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \right) \\
&\qquad - \left\{ \boldsymbol{\nabla} u \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla} v_i \right) \right\}_{\boldsymbol{\nabla} v_i} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \boldsymbol{\nabla} v_i \right) \\
&\qquad + \left\{ \boldsymbol{\nabla} u \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla} v_i \right) \right\} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2) \\
&\quad = - \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \boldsymbol{\nabla} u \right) \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla} v_i \right) - \boldsymbol{\nabla} u \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla} v_i \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - \boldsymbol{\nabla} u \cdot \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top \boldsymbol{\nabla} v_i\right) + \left\{\boldsymbol{\nabla} u \cdot \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla} v_i\right)\right\} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 \\
&= - \left\{\boldsymbol{\nabla} u \left(\boldsymbol{\nabla} v_i\right)^\top\right\} \cdot \left\{\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top\right)^\top \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top\right\} - \left\{\boldsymbol{\nabla} u \left(\boldsymbol{\nabla} v_i\right)^\top\right\} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top\right) \\
&\quad - \left\{\boldsymbol{\nabla} u \left(\boldsymbol{\nabla} v_i\right)^\top\right\} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top\right) + \left\{\boldsymbol{\nabla} u \left(\boldsymbol{\nabla} v_i\right)^\top\right\} \cdot \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2\right)
\end{aligned}
\tag{9.8.17}
$$

となる．式 (9.8.17) では，式 (9.8.14) および $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ および $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ に対する恒等式

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}) = \left(\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{A}\right) \cdot \boldsymbol{C} = \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^\top\right) \cdot \boldsymbol{B}, \\
&(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} \cdot \left(\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{C}\right) = \boldsymbol{A} \cdot \left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^\top\right)
\end{aligned}
\tag{9.8.18}
$$

が使われた．今後，これらの関係は頻繁に使われることになる．

同様に，式 (9.8.16) 右辺被積分関数の第 2 項は，式 (9.8.17) において u と v_i をいれかえたものとなる．また，式 (9.8.16) 右辺被積分関数の第 3 項は，式 (9.8.17) において u と v_i をいれかえ，さらに v_i と $\zeta_{i(\boldsymbol{\nabla}u)^\top}$ をいれかえたものとなる．さらに，式 (9.8.16) 右辺被積分関数の第 4 項は，

$$
\begin{aligned}
&\left(\zeta_i - \boldsymbol{\nabla}u \cdot \boldsymbol{\nabla}v_i\right)\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_1\right)_{\boldsymbol{\phi}'}[\boldsymbol{\varphi}_2] \\
&\quad = \left(\zeta_i - \boldsymbol{\nabla}u \cdot \boldsymbol{\nabla}v_i\right)\left\{-\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top\right)^\top \cdot \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top + \left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_2\right)\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_1\right)\right\}
\end{aligned}
$$

となる．そこで，式 (9.8.16) は，

$$
\left(\mathscr{L}_{i\boldsymbol{\phi}'}\right)_{\boldsymbol{\phi}'}\left(\boldsymbol{\phi}, u, v_i\right)[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2] + \left\langle \boldsymbol{g}_0\left(\boldsymbol{\phi}\right), \boldsymbol{t}\left(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2\right)\right\rangle
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\Omega(\phi)} \left[- \left\{ \boldsymbol{\nabla} u \left(\boldsymbol{\nabla} v_i \right)^\top + \boldsymbol{\nabla} v_i \left(\boldsymbol{\nabla} u \right)^\top - \zeta_{i(\boldsymbol{\nabla} u)^\top} \left(\boldsymbol{\nabla} u \right)^\top \right\} \right. \\
&\qquad \left. \cdot \left\{ \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top + \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \right)^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \right\} \right] \mathrm{d}x \qquad (9.8.19)
\end{aligned}
$$

となる．

次に，式 (9.8.15) の右辺第 2 項を考える．式 (9.8.4) の右辺第 1 項を用いれば，

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{i\boldsymbol{\phi}' u} \left(\boldsymbol{\phi}, u, v_i \right) \left[\boldsymbol{\varphi}_1, \hat{v}_2 \right] \\
&= \int_{\Omega(\phi)} \left\{ \boldsymbol{\nabla} \hat{v}_2 \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla} v_i \right) + \left(\boldsymbol{\nabla} v_i - \zeta_{i(\boldsymbol{\nabla} u)^\top} \right) \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla} \hat{v}_2 \right) \right. \\
&\qquad \left. - \left(\boldsymbol{\nabla} \hat{v}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla} v_i \right) \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \right\} \mathrm{d}x \qquad (9.8.20)
\end{aligned}
$$

となる．

一方，$j \in \{1, 2\}$ を用いて，任意の領域変動 $\boldsymbol{\varphi}_j \in X$ に対する状態決定問題を満たす u の変動を $\hat{v}_j = v'(\phi)[\boldsymbol{\varphi}_j]$ とかくことにする．式 (9.5.3) で定義された状態決定問題の Lagrange 関数 $\mathscr{L}_{\mathrm{S}}$ の Fréchet 偏微分をとれば，任意の $\boldsymbol{v} \in U$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{\mathrm{S}\boldsymbol{\phi}' u}(\boldsymbol{\phi}, u, v)[\boldsymbol{\varphi}_j, \hat{v}_j] \\
&\quad = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \bigl\{ \boldsymbol{\nabla} u \cdot \bigl(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_j^{\top} \boldsymbol{\nabla} v \bigr) + \boldsymbol{\nabla} v \cdot \bigl(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_j^{\top} \boldsymbol{\nabla} u \bigr) \\
&\qquad\quad - (\boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v)\, \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_j - \boldsymbol{\nabla} \hat{v}_j \cdot \boldsymbol{\nabla} v \bigr\} \mathrm{d}x \\
&\quad = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \Bigl[\Bigl\{ \Bigl(\bigl(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_j^{\top} \bigr)^{\top} + \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_j^{\top} - \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_j \Bigr) \boldsymbol{\nabla} u - \boldsymbol{\nabla} \hat{v}_j \Bigr\} \cdot \boldsymbol{\nabla} v \Bigr] \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$= 0 \tag{9.8.21}$$

となる．ここで，仮定 9.8.3 および v と $\hat{v}_j$ が Γ_{D} 上で 0 が使われた．
式 (9.8.21) より，

$$\boldsymbol{\nabla}\hat{v}_j = \left\{\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_j^{\top}\right)^{\top} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_j^{\top} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_j\right\}\boldsymbol{\nabla}u \tag{9.8.22}$$

が成り立つ．そこで，式 (9.8.22) の $\hat{v}_2$ を式 (9.8.20) の $\hat{v}_2$ に代入すれば，
式 (9.8.15) の右辺第 2 項は，

$$\mathscr{L}_{i\boldsymbol{\phi}'u}\left(\boldsymbol{\phi}, u, v_i\right)\left[\boldsymbol{\varphi}_1, \hat{v}_2\right]$$
$$= \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})}\left[\left\{\left(\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^{\top}\right)^{\top} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^{\top} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_2\right)\boldsymbol{\nabla}u\left(\boldsymbol{\nabla}v_i\right)^{\top}\right.\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\boldsymbol{\nabla} v_i-\zeta_{i(\boldsymbol{\nabla} u)^\top}\right)(\boldsymbol{\nabla} u)^\top\left(\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top\right)^\top+\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_2\right)\Big\}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top\\
&-\left\{\left(\left(\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top\right)^\top+\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_2\right)\boldsymbol{\nabla} u\right)\cdot\boldsymbol{\nabla} v_i\right\}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_1\Big]\mathrm{d}x\\
=\int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})}&\Big[\left\{\boldsymbol{\nabla} u\,(\boldsymbol{\nabla} v_i)^\top+\boldsymbol{\nabla} v_i\,(\boldsymbol{\nabla} u)^\top-\zeta_{i(\boldsymbol{\nabla} u)^\top}\,(\boldsymbol{\nabla} u)^\top\right\}\\
&\quad\cdot\left\{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top+\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top\right)^\top-\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_2)\right\}\\
&-\left\{\boldsymbol{\nabla} u\,(\boldsymbol{\nabla} v_i)^\top\right\}\cdot\left\{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_1)+\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top\right)^\top(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_1)\right\}\\
&+\boldsymbol{\nabla} u\cdot\boldsymbol{\nabla} v_i\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_1)\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_2)\Big]\mathrm{d}x \qquad (9.8.23)
\end{aligned}
$$

となる．同様に，式 (9.8.15) の右辺第 3 項は，$\mathscr{L}_{iu\boldsymbol{\phi}'}(\boldsymbol{\phi}, u, v_i)[\boldsymbol{\varphi}_2, \boldsymbol{\nabla}\hat{v}_1]$ となり，式 (9.8.23) において $\boldsymbol{\varphi}_1$ と $\boldsymbol{\varphi}_2$ をいれかえたものとなる．式 (9.8.15) の右辺第 4 項はゼロとなる．

以上の結果をまとめれば，$\tilde{f}_i$ の 2 階形状微分は，

$$
\begin{aligned}
&h_i(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2] \\
&= \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \Big[2\boldsymbol{\nabla}u \cdot \boldsymbol{\nabla}v_i(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_2)(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_1) \\
&\qquad + \Big\{ \boldsymbol{\nabla}u(\boldsymbol{\nabla}v_i)^\top + \boldsymbol{\nabla}v_i(\boldsymbol{\nabla}u)^\top - \zeta_{i(\boldsymbol{\nabla}u)^\top}(\boldsymbol{\nabla}u)^\top \Big\} \\
&\qquad\quad \cdot \Big\{ \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top\right)^\top + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top - \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_1) \Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \left\{ \boldsymbol{\nabla} u \left(\boldsymbol{\nabla} v_i \right)^\top \right\} \\
&\quad \cdot \left\{ \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \right) + \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \right)^\top \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \right) \right. \\
&\quad\quad \left. + \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 \right) + \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \right)^\top \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 \right) \right\} \Big] \mathrm{d}x \qquad (9.8.24)
\end{aligned}
$$

となる．

§9.8.3 Lagrange 乗数法による評価関数の 2 階形状微分

Lagrange 乗数法を用いて評価関数の 2 階形状微分を求める場合には，7.5.4 項で示された方法に従えば，次のようになる．式 (9.8.5) の $\tilde{f}_i'(\phi)[\varphi_1] = \langle \boldsymbol{g}_i, \varphi_1 \rangle$ に対する Lagrange 関数を

$$\mathscr{L}_{\mathrm{I}i}(\phi, u, v_i, w_i, z_i) = \langle \boldsymbol{g}_i, \varphi_1 \rangle + \mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\phi, u, w_i) + \mathscr{L}_{\mathrm{A}i}(\phi, v_i, z_i) \tag{9.8.25}$$

とおく．ここで，$\mathscr{L}_{\mathrm{S}}$ は式 (9.5.3) で与えられる．また，

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{\mathrm{A}i}(\phi, v_i, z_i) \\
&\quad = \int_{\Omega(\phi)} \left(-\boldsymbol{\nabla} v_i \cdot \boldsymbol{\nabla} z_i + \zeta_{iu} z_i + \zeta_{i(\boldsymbol{\nabla} u)^{\top}} \cdot \boldsymbol{\nabla} z_i \right) \mathrm{d}x \\
&\qquad + \int_{\Gamma_{\eta i}(\phi)} \eta_{\mathrm{N}iu} z_i \mathrm{d}\gamma + \int_{\Gamma_{\mathrm{D}}(\phi)} \{ z_i \partial_\nu v_i + (v_i - \eta_{\mathrm{D}i\partial_\nu u}) \partial_\nu z_i \} \mathrm{d}\gamma
\end{aligned} \tag{9.8.26}$$

は，f_i に対する随伴問題 (問題 9.8.1) の Lagrange 関数である．$w_i \in U$ と $z_i \in U$ は，$\boldsymbol{g}_i$ が u と v_i の関数であるために用意された随伴変数である．$\boldsymbol{\varphi}_1$ は $\mathscr{L}_{\mathrm{I}i}$ においては定ベクトルとみなす．

$(\boldsymbol{\phi}, u, v_i, w_i, z_i)$ の任意変動 $(\boldsymbol{\varphi}_2, \hat{u}, \hat{v}_i, \hat{w}_i, \hat{z}_i) \in \mathcal{D} \times U^4$ に対する $\mathscr{L}_{\mathrm{I}i}$ の Fréchet 微分は，式 (9.1.6) を考慮して，

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}'_{\mathrm{I}i}(\boldsymbol{\phi}, u, v_i, w_i, z_i)[\boldsymbol{\varphi}_2, \hat{u}, \hat{v}_i, \hat{w}_i, \hat{z}_i] \\
&\quad = \mathscr{L}_{\mathrm{I}i\boldsymbol{\phi}'}(\boldsymbol{\phi}, u, v_i, w_i, z_i)[\boldsymbol{\varphi}_2] + \langle \boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{\phi}), \boldsymbol{t}(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2) \rangle \\
&\qquad + \mathscr{L}_{\mathrm{I}iu}(\boldsymbol{\phi}, u, v_i, w_i, z_i)[\hat{u}] + \mathscr{L}_{\mathrm{I}iv_i}(\boldsymbol{\phi}, u, v_i, w_i, z_i)[\hat{v}_i] \\
&\qquad + \mathscr{L}_{\mathrm{I}iw_i}(\boldsymbol{\phi}, u, v_i, w_i, z_i)[\hat{w}_i] + \mathscr{L}_{\mathrm{I}iz_i}(\boldsymbol{\phi}, u, v_i, w_i, z_i)[\hat{z}_i]
\end{aligned}
\tag{9.8.27}
$$

となる．式 (9.8.27) の右辺第 5 項は，u が状態決定問題の解ならばゼロとなる．また，式 (9.8.27) の右辺第 6 項は，v_i が随伴問題の解のときゼロとなる．

また，式 (9.8.27) の右辺第 3 項は，

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{\mathrm{I}iu}\left(\boldsymbol{\phi}, u, v_i, w_i, z_i\right)[\hat{u}] \\
&= \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \Biggl[\biggl\{ \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^{\top} + \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^{\top} \right)^{\top} \right) \boldsymbol{\nabla} v_i - \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^{\top} \right)^{\top} \zeta_{i(\boldsymbol{\nabla} u)^{\top}} \\
&\qquad - \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \right) \boldsymbol{\nabla} v_i \biggr\} \cdot \boldsymbol{\nabla} \hat{u} \\
&\qquad - \left\{ \left(\left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}^{\top} \right)^{\top} \zeta_{i(\boldsymbol{\nabla} u)^{\top} u} \right) \cdot \boldsymbol{\nabla} u + \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \right) \zeta_{iu} \right\} \hat{u} - \boldsymbol{\nabla} w_i \cdot \boldsymbol{\nabla} \hat{u} \Biggr] \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\Gamma_{\eta i}(\boldsymbol{\phi})} \eta_{\mathrm{N}iu} \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \right)_{\tau} \hat{u} \, \mathrm{d}\gamma
\end{aligned} \tag{9.8.28}$$

となる．ただし，命題 9.3.7 を用いた．そこで，任意の $\hat{u} \in U$ に対して式 (9.8.28) がゼロとなる条件は， w_i を次の随伴問題の解とおくことと同値である．

問題 9.8.4 ($\langle g_i, \varphi_1 \rangle$ に対する w_i の随伴問題)

問題 9.6.3 の仮定のもとで，$\varphi_1 \in Y$ が与えられたとき，

問題 9.8.4 ($\langle g_i, \varphi_1 \rangle$ に対する w_i の随伴問題)

$$
\begin{aligned}
-\Delta w_i &= -\boldsymbol{\nabla}^\top \Big\{ \Big(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top + \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \right)^\top \Big) \boldsymbol{\nabla} v_i - \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \right)^\top \zeta_{i(\boldsymbol{\nabla} u)^\top} \\
&\qquad - \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \right) \boldsymbol{\nabla} v_i \Big\} \\
&\quad - \Big(\left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}^\top \right)^\top \zeta_{i(\boldsymbol{\nabla} u)^\top u} \Big) \cdot \boldsymbol{\nabla} u - \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \right) \zeta_{iu} \quad \text{in } \Omega(\phi), \\
\partial_\nu w_i &= \eta_{\mathrm{N}iu} \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \right)_\tau + \Big\{ \Big(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top + \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \right)^\top \Big) \boldsymbol{\nabla} v_i - \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \right)^\top \zeta_{i(\boldsymbol{\nabla} u)^\top} \\
&\qquad - \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \right) \boldsymbol{\nabla} v_i \Big\} \cdot \boldsymbol{\nu} \quad \text{on } \Gamma_{\eta i}(\phi), \\
\partial_\nu w_i &= 0 \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{N}}(\phi) \setminus \bar{\Gamma}_{\eta i}(\phi), \\
w_i &= 0 \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{D}}(\phi)
\end{aligned}
$$

を満たす $w_i = w_i(\boldsymbol{\varphi}_1) \in U$ を求めよ.

式 (9.8.27) の右辺第 4 項は，

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{\mathrm{I}iv_i}\left(\boldsymbol{\phi}, u, v_i, w_i, z_i\right)\left[\hat{v}_i\right] \\
&\quad = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \left[\left\{ \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^{\top} + \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^{\top} \right)^{\top} \right) \boldsymbol{\nabla} u - \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \right) \boldsymbol{\nabla} u \right\} \cdot \boldsymbol{\nabla} \hat{v}_i \right. \\
&\qquad \left. + b \hat{v}_i - \boldsymbol{\nabla} z_i \cdot \boldsymbol{\nabla} \hat{v}_i \right] \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_p(\boldsymbol{\phi})} p_{\mathrm{N}} \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \right)_{\tau} \hat{v}_i \, \mathrm{d}\gamma
\end{aligned}
\tag{9.8.29}
$$

となる．任意の $\hat{v}_i \in U$ に対して式 (9.8.29) がゼロとなる条件は， z_i を次の随伴問題の解とおくことと同値である．

問題 9.8.5 ($\langle g_i, \varphi_1 \rangle$ に対する z_i の随伴問題)

問題 9.6.3 の仮定のもとで，$\varphi_1 \in Y$ が与えられたとき，

$$
\begin{aligned}
-\Delta z_i &= b - \boldsymbol{\nabla}^\top \left\{ \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top + \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \right)^\top \right) \boldsymbol{\nabla} u - \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \right) \boldsymbol{\nabla} u \right\} \quad \text{in } \Omega(\phi), \\
\partial_\nu z_i &= p_{\mathrm{N}} \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \right)_\tau \\
&\quad + \left\{ \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top + \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \right)^\top \right) \boldsymbol{\nabla} u - \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \right) \boldsymbol{\nabla} u \right\} \cdot \boldsymbol{\nu} \quad \text{on } \Gamma_p(\phi), \\
\partial_\nu z_i &= 0 \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{N}}(\phi) \setminus \bar{\Gamma}_p(\phi), \\
z_i &= 0 \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{D}}
\end{aligned}
$$

を満たす $z_i = z_i(\boldsymbol{\varphi}_1) \in U$ を求めよ．

さらに，式 (9.8.27) の右辺第 1 項と第 2 項は，任意の $\varphi_1 \in Y$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{\mathrm{I}i\phi'}\left(\boldsymbol{\phi}, u, v_i, w_i\left(\boldsymbol{\varphi}_1\right), z_i\left(\boldsymbol{\varphi}_1\right)\right)\left[\boldsymbol{\varphi}_2\right] + \left\langle \boldsymbol{g}_0\left(\boldsymbol{\phi}\right), \boldsymbol{t}\left(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2\right)\right\rangle \\
&\quad = \mathscr{L}_{i\phi'\phi'}\left(\boldsymbol{\phi}, u, v_i\right)\left[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2\right] + \left\langle \boldsymbol{g}_0\left(\boldsymbol{\phi}\right), \boldsymbol{t}\left(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2\right)\right\rangle \\
&\qquad + \mathscr{L}_{\mathrm{S}\phi'}\left(\boldsymbol{\phi}, u, w_i\right)\left[\boldsymbol{\varphi}_2\right] + \mathscr{L}_{\mathrm{A}i\phi'}\left(\boldsymbol{\phi}, v_i, z_i\right)\left[\boldsymbol{\varphi}_2\right]
\end{aligned}
\tag{9.8.30}
$$

となる．式 (9.8.30) の右辺第 1 項と第 2 項は，式 (9.8.19) で与えられる．第 3 項と第 4 項は，

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{\mathrm{S}\phi'}\left(\boldsymbol{\phi}, u, w_i\right)\left[\boldsymbol{\varphi}_2\right] \\
&\quad = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \Big[\boldsymbol{\nabla} u \cdot \left\{\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^{\top}\right) \boldsymbol{\nabla} w_i\left(\boldsymbol{\varphi}_1\right)\right\} + \boldsymbol{\nabla} w_i\left(\boldsymbol{\varphi}_1\right) \cdot \left\{\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^{\top}\right) \boldsymbol{\nabla} u\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \left(b w_i\left(\boldsymbol{\varphi}_1\right) - \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} w_i\left(\boldsymbol{\varphi}_1\right)\right) \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 \Big] \mathrm{d}x \\
&+ \int_{\Gamma_{\eta i}(\boldsymbol{\phi})} \eta_{\mathrm{N}i} \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1\right)_\tau \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2\right)_\tau \mathrm{d}\gamma \\
&+ \int_{\Gamma_p(\boldsymbol{\phi})} p_{\mathrm{N}} w_i\left(\boldsymbol{\varphi}_1\right) \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2\right)_\tau \mathrm{d}\gamma,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{\mathrm{A}i\boldsymbol{\phi}'}\left(\boldsymbol{\phi}, v_i, z_i\right)\left[\boldsymbol{\varphi}_2\right] \\
&= \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \Big[\left(\boldsymbol{\nabla} v_i - \zeta_{i(\boldsymbol{\nabla} u)^\top}\right) \cdot \left\{\left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top\right) \boldsymbol{\nabla} z_i\left(\boldsymbol{\varphi}_1\right)\right\} \\
&\quad + \boldsymbol{\nabla} z_i\left(\boldsymbol{\varphi}_1\right) \cdot \left\{\left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top\right) \boldsymbol{\nabla} v_i\right\} \\
&\quad + \left(\zeta_{iu} z_i\left(\boldsymbol{\varphi}_1\right) - \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} z_i\left(\boldsymbol{\varphi}_1\right)\right) \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 \Big] \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$
+ \int_{\Gamma_{\eta i}(\phi)} \eta_{\mathrm{N}iu} z_i(\boldsymbol{\varphi}_1)(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2)_\tau \, \mathrm{d}\gamma
$$

$$
+ \int_{\Gamma_p(\phi)} p_{\mathrm{N}} v_i (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1)_\tau (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2)_\tau \, \mathrm{d}\gamma
$$

となる．

そこで，u, v_i, $w_i(\boldsymbol{\varphi}_1)$ および $z_i(\boldsymbol{\varphi}_1)$ がそれぞれ問題 9.5.4，問題 9.8.1, 問題 9.8.4 および問題 9.8.5 の弱解とする．このときの $f_i(\phi, u)$ を $\tilde{f}_i(\phi)$ とかくことにすれば，

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{\mathrm{I}i\boldsymbol{\phi}'}(\boldsymbol{\phi}, u, v_i, w_i(\boldsymbol{\varphi}_1), z_i(\boldsymbol{\varphi}_1))[\boldsymbol{\varphi}_2] + \langle \boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{\phi}), \boldsymbol{t}(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2) \rangle \\
&\quad = \tilde{f}_i''(\boldsymbol{\phi})[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2] = \langle \boldsymbol{g}_{\mathrm{H}i}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\varphi}_1), \boldsymbol{\varphi}_2 \rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \Big[& -\left\{ \boldsymbol{\nabla} u \left(\boldsymbol{\nabla} v_i \right)^\top + \boldsymbol{\nabla} v_i \left(\boldsymbol{\nabla} u \right)^\top - \zeta_{i(\boldsymbol{\nabla} u)^\top} \left(\boldsymbol{\nabla} u \right)^\top \right\} \\
& \quad \cdot \left\{ \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top + \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \right)^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \right\} \\
& + \left\{ \boldsymbol{\nabla} u \left(\boldsymbol{\nabla} w_i \left(\boldsymbol{\varphi}_1 \right) \right)^\top + \boldsymbol{\nabla} w_i \left(\boldsymbol{\varphi}_1 \right) \left(\boldsymbol{\nabla} u \right)^\top \right. \\
& \quad \left. + \left(\boldsymbol{\nabla} v_i - \zeta_{i(\boldsymbol{\nabla} u)^\top} \right) \left(\boldsymbol{\nabla} z_i \left(\boldsymbol{\varphi}_1 \right) \right)^\top \right\} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \\
& + \left(b w_i \left(\boldsymbol{\varphi}_1 \right) + \zeta_{iu} z_i \left(\boldsymbol{\varphi}_1 \right) - \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} w_i \left(\boldsymbol{\varphi}_1 \right) - \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} z_i \left(\boldsymbol{\varphi}_1 \right) \right) \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 \\
& + \zeta_{i\boldsymbol{\phi}'\boldsymbol{\phi}'} \left(\boldsymbol{\phi}, u, \boldsymbol{\nabla} u \right) \left[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2 \right] + u b'' \left(\boldsymbol{\phi} \right) \left[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2 \right] \Big] \mathrm{d}x \\
+ \int_{\Gamma_{\eta i}(\boldsymbol{\phi})} & \left[\left\{ \eta_{\mathrm{N}i} \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \right)_\tau + \eta_{\mathrm{N}iu} z_i \left(\boldsymbol{\varphi}_1 \right) \right\} \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 \right)_\tau \right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \eta_{\mathrm{N}i\boldsymbol{\phi}'\boldsymbol{\phi}'}(\boldsymbol{\phi}, u)[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2]\big]\,\mathrm{d}\gamma \\
&+ \int_{\Gamma_p(\boldsymbol{\phi})} \left[\{p_{\mathrm{N}} v_i (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1)_\tau + p_{\mathrm{N}} w_i (\boldsymbol{\varphi}_1)\} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2)_\tau + p''(\boldsymbol{\phi})[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2]\right] \mathrm{d}\gamma \\
&+ \int_{\Gamma_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{\phi})} \eta_{\mathrm{D}i\boldsymbol{\phi}'\boldsymbol{\phi}'}(\boldsymbol{\phi}, \partial_\nu u)[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2]\,\mathrm{d}\gamma
\end{aligned}
\tag{9.8.31}
$$

となる．ここで，$\boldsymbol{g}_{\mathrm{H}i}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\varphi}_1)$ は f_i の Hesse 勾配である．

§9.8.4　関数の形状偏微分公式を用いた評価法

次に，9.3.2 項で示された関数の形状偏微分公式を用いて $\mathscr{L}_i$ の形状微分を求め，その結果を使って f_i の形状微分を求めてみよう．

ここでは，u と v_i はそれぞれ $u - u_{\mathrm{D}}$ と $v_i - \eta_{\mathrm{D}i\partial_\nu u}$ が $U(\phi) \cap W^{2,2q_{\mathrm{R}}}(D;\mathbb{R})$ ($q_{\mathrm{R}} > d$) に入るような条件が満たされていると仮定する．仮定 9.5.2 と仮定 9.6.2 はそのための条件を与えている．

これらの仮定の下で，$\mathscr{L}_i(\phi, u, v_i)$ の Fréchet 微分は，任意の $(\boldsymbol{\varphi}, \hat{u}, \hat{v}_i) \in X \times U \times U$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}_i'(\phi, u, v_i)[\boldsymbol{\varphi}, \hat{u}, \hat{v}_i] \\
&\quad = \mathscr{L}_{i\phi^*}(\phi, u, v_i)[\boldsymbol{\varphi}] + \mathscr{L}_{iu}(\phi, u, v_i)[\hat{u}] + \mathscr{L}_{iv_i}(\phi, u, v_i)[\hat{v}_i] \qquad (9.8.32)
\end{aligned}$$

とかくことができる．ただし，式 (9.3.21) と式 (9.3.27) の表記法に従うものとする．9.8.1 項とは異なり，ここでは，式 (9.3.21) と式 (9.3.27) が使われた．そのために，ここでは，u^* が任意の $\hat{u} \in X$ に置き換えられている． 以下で各項について詳細にみていこう．

式 (9.8.32) の右辺第 3 項は，

$$\mathscr{L}_{iv_i}(\phi, u, v_i)[\hat{v}_i] = \mathscr{L}_{\mathrm{S}v_i}(\phi, u, v_i)[\hat{v}_i] = \mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\phi, u, \hat{v}_i) \tag{9.8.33}$$

となる．式 (9.8.33) は状態決定問題 (問題 9.5.4) の Lagrage 関数になっている．そこで，u が状態決定問題の弱解ならば，その項はゼロとなる．

また，式 (9.8.32) の右辺第 2 項は，式 (9.8.3) と同じ式となる．そこで，v_i が，任意の $\hat{u} \in U$ に対して，式 (9.8.3) がゼロとなるように決定されれば，式 (9.8.32) の右辺第 2 項もゼロとなる．この関係は，v_i が f_i に対する随伴問題 (問題 9.8.1) の弱解のときに成り立つ．仮定 9.6.2 において，ζ_{iu}, $\zeta_{i(\boldsymbol{\nabla} u)^{\top}}$, $\eta_{\mathrm{N}iu}$, $\eta_{\mathrm{D}i\partial_\nu u}$ の正則性は，$v_i - \eta_{\mathrm{D}i\partial_\nu u}$ が $U(\boldsymbol{\phi}) \cap W^{2,2q_{\mathrm{R}}}(D;\mathbb{R})$ $(q_{\mathrm{R}} > d)$ に入るための条件を与えている．

さらに，式 (9.8.32) の右辺第 1 項は，命題 9.3.10 の結果を表した式 (9.3.21) と，命題 9.3.13 の結果を表した式 (9.3.27) の公式より，

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{i\boldsymbol{\phi}^*}(\boldsymbol{\phi}, u, v_i)[\boldsymbol{\varphi}] \\
&\quad = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} (\zeta_{i\boldsymbol{\phi}^*} + v_i b^*) \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \int_{\partial\Omega(\boldsymbol{\phi})} \left(\zeta_i \left(u, \boldsymbol{\nabla} u\right) - \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v_i + b v_i\right) \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\gamma \\
&+ \int_{\Gamma_{\eta i}(\boldsymbol{\phi})} \left\{ \left(\partial_\nu + \kappa\right) \eta_{\mathrm{N}i} \left(u\right) \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \eta_{\mathrm{N}i\boldsymbol{\phi}^*} \cdot \boldsymbol{\varphi} \right\} \mathrm{d}\gamma \\
&+ \int_{\partial\Gamma_{\eta i}(\boldsymbol{\phi}) \cup \Theta_{\eta i}(\boldsymbol{\phi})} \eta_{\mathrm{N}i} \left(u\right) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\varsigma \\
&+ \int_{\Gamma_p(\boldsymbol{\phi})} \left\{ \left(\partial_\nu + \kappa\right) \left(p_{\mathrm{N}} v_i\right) \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} + v_i p_{\mathrm{N}}^* \cdot \boldsymbol{\varphi} \right\} \mathrm{d}\gamma \\
&+ \int_{\partial\Gamma_p(\boldsymbol{\phi}) \cup \Theta_p(\boldsymbol{\phi})} p_{\mathrm{N}} v_i \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\varsigma \\
&+ \int_{\Gamma_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{\phi})} \left[\left\{ \left(u - u_{\mathrm{D}}\right) \bar{w} \left(\boldsymbol{\varphi}, v_i\right) + \left(v_i - \eta_{\mathrm{D}i\partial_\nu u}\right) \bar{w} \left(\boldsymbol{\varphi}, u\right) \right\} \right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ (\partial_\nu + \kappa) \{(u - u_{\mathrm{D}}) \partial_\nu v_i + v_i \partial_\nu u - \eta_{\mathrm{D}i}\} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \eta_{\mathrm{D}i\boldsymbol{\phi}^*} \cdot \boldsymbol{\varphi} \Big] \mathrm{d}\gamma \\
&+ \int_{\partial\Gamma_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{\phi}) \cup \Theta_{\mathrm{D}}} \{(u - u_{\mathrm{D}}) \partial_\nu v_i + v_i \partial_\nu u - \eta_{\mathrm{D}i}\} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\varsigma \qquad (9.8.34)
\end{aligned}
$$

となる．ここで，$\bar{w}(\boldsymbol{\varphi}, u)$ と $(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi})_\tau$ はそれぞれ式 (9.3.24) と式 (9.2.6) に従う．

以上の結果をふまえて，u と v_i はそれぞれ問題 9.5.4 と問題 9.8.1 の弱解であるとする．さらに，仮定 9.6.2 の $\eta_{\mathrm{D}i}$ に対する条件が成り立つとする．このとき，$\tilde{f}_i$ に対して式 (7.5.15) の表記を用いて

$$
\tilde{f}_i'(\boldsymbol{\phi})[\boldsymbol{\varphi}] = \mathscr{L}_{i\boldsymbol{\phi}^*}(\boldsymbol{\phi}, u, v_i)[\boldsymbol{\varphi}] = \langle \bar{\boldsymbol{g}}_i, \boldsymbol{\varphi} \rangle
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \bar{\boldsymbol{g}}_{\zeta bi} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega(\boldsymbol{\phi})} \bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\Omega i} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\gamma + \int_{\Gamma_p(\boldsymbol{\phi})} \bar{\boldsymbol{g}}_{pi} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\gamma \\
&\quad + \int_{\partial\Gamma_p(\boldsymbol{\phi}) \cup \Theta_p(\boldsymbol{\phi})} \bar{\boldsymbol{g}}_{\partial pi} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\varsigma + \int_{\Gamma_{\eta i}(\boldsymbol{\phi})} \bar{\boldsymbol{g}}_{\eta i} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\gamma \\
&\quad + \int_{\partial\Gamma_{\eta i}(\boldsymbol{\phi}) \cup \Theta_{\eta i}(\boldsymbol{\phi})} \bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\eta i} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\varsigma + \int_{\Gamma_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{\phi})} \bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{D}i} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\gamma
\end{aligned}
\tag{9.8.35}
$$

とかくことができる．ここで，

$$
\bar{\boldsymbol{g}}_{\zeta bi} = \zeta_{i\boldsymbol{\phi}^*} + v_i b^*, \tag{9.8.36}
$$

$$
\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\Omega i} = \left(\zeta_i - \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v_i + b v_i\right) \boldsymbol{\nu}, \tag{9.8.37}
$$

$$
\bar{\boldsymbol{g}}_{pi} = \left\{\partial_\nu \left(p_{\mathrm{N}} v_i\right) + \kappa p_{\mathrm{N}} v_i\right\} \boldsymbol{\nu} + v_i p_{\mathrm{N}}^*, \tag{9.8.38}
$$

$$\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial p i} = p_{\mathrm{N}} v_i \boldsymbol{\tau}, \tag{9.8.39}$$

$$\bar{\boldsymbol{g}}_{\eta i} = \left(\partial_\nu \eta_{\mathrm{N}i} + \kappa \eta_{\mathrm{N}i}\right) \boldsymbol{\nu} + \eta_{\mathrm{N}i\phi^*}, \tag{9.8.40}$$

$$\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial \eta i} = \eta_{\mathrm{N}i} \boldsymbol{\tau}, \tag{9.8.41}$$

$$\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{D}i} = \left\{\partial_\nu \left(u - u_{\mathrm{D}}\right) \partial_\nu v_i + \partial_\nu \left(v_i - v_{\mathrm{D}i}\right) \partial_\nu u\right\} \boldsymbol{\nu} + \eta_{\mathrm{D}i\phi^*} \tag{9.8.42}$$

となる．

式 (9.8.5) の $\boldsymbol{g}_i$ と式 (9.8.35) の $\bar{\boldsymbol{g}}_i$ を比較すれば，$\eta_{\mathrm{D}i\phi'} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$ のとき，$\bar{\boldsymbol{g}}_i$ には $\Gamma_{\mathrm{D}}(\phi)$ 上に式 (9.8.42) のような $\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{D}}$ が現れるが，$\boldsymbol{g}_i$ にはそのような成分が現れない．この結果は，$\Gamma_{\mathrm{D}}(\phi)$ が変動すると仮定された場合には，$\boldsymbol{g}_i$ を使った方が評価が簡便になることを意味する．

以上の結果に基づけば，式 (9.8.35) の $\bar{g}_i$ が入る関数空間について，次の結果が得られる．

定理 9.8.6 (f_i の形状微分 $\bar{g}_i$)

$\phi \in \mathcal{D}$ に対して，b, p_{N}, u_{D}, ζ_i, $\eta_{\mathrm{N}i}$ および $\eta_{\mathrm{D}i}$ は空間固定の関数として，仮定 9.5.2 および仮定 9.6.2 を満たし，$\partial\Omega\,(\phi)$ は $H^3 \cap C^{1,1}$ 級とする．また，u と v_i はそれぞれ $u - u_{\mathrm{D}}$ と $v_i - \eta_{\mathrm{D}i\partial_\nu u}$ が $U\,(\phi) \cap W^{2,2q_{\mathrm{R}}}\,(D;\mathbb{R})$ ($q_{\mathrm{R}} > d$) に入るような状態決定問題 (問題 9.5.4) と f_i に対する随伴問題 (問題 9.8.1) の弱解とする．式 (9.8.39) と式 (9.8.41) のそれぞれ $\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial pi}$ と $\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial \eta i}$ がゼロのとき，f_i の形状微分は式 (9.8.35) となり，$\bar{g}_i$ は X' に入る．さらに，

定理 9.8.6 (f_i の形状微分 $\bar{g}_i$)

$$
\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{g}}_{\zeta b i} &\in H^1 \cap L^\infty \left(\Omega\left(\boldsymbol{\phi}\right);\mathbb{R}^d\right),\\
\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\Omega i} &\in H^{1/2} \cap L^\infty \left(\partial\Omega\left(\boldsymbol{\phi}\right);\mathbb{R}^d\right),\\
\bar{\boldsymbol{g}}_{p i} &\in H^{1/2} \cap L^\infty \left(\Gamma_p\left(\boldsymbol{\phi}\right);\mathbb{R}^d\right),\\
\bar{\boldsymbol{g}}_{\eta i} &\in H^{1/2} \cap L^\infty \left(\Gamma_{\eta i}\left(\boldsymbol{\phi}\right);\mathbb{R}^d\right),\\
\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{D}} &\in H^{1/2} \cap L^\infty \left(\Gamma_{\mathrm{D}}\left(\boldsymbol{\phi}\right);\mathbb{R}^d\right)
\end{aligned}
$$

となる．

証明　f_i の形状微分が式 (9.8.35) になることは上でみてきたとおりである．$\bar{g}_i$ の正則性に関しては，u と v_i が $W^{2,2q_{\mathrm{R}}}(D;\mathbb{R})$ に入ることと仮定 9.6.2 を用いて，定理 9.8.2 の証明と同様の関係を用いることによって示される． □

定理 9.8.2 と定理 9.8.6 の結果から，形状最適化問題の正則性について次のことがいえる．

注意 9.8.7 (形状最適化問題の不正則性)

定理 9.8.2 と定理 9.8.6 より，式 (9.1.1) で定義された X に対して，$\boldsymbol{g}_i$ と $\bar{\boldsymbol{g}}_i$ はともに X' に入ることが確認された．すなわち，評価関数の領域変動に対する Fréchet 微分を定義することはできたことになる．しかし，$\boldsymbol{g}_i$ と $\bar{\boldsymbol{g}}_i$ は，ともに設計変数の許容集合が入る線形空間 $H^2 \cap C^{0,1}\left(D;\mathbb{R}^d\right)$ に入るとは限らない．この結果は，$-\boldsymbol{g}_i$ を $\boldsymbol{\varphi}$ に代入する勾配法で得られる $\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\varphi}$ は $H^2 \cap C^{0,1}\left(D;\mathbb{R}^d\right)$ の元となることが保証されないことを意味する．このことは，本章の冒頭で説明された波打ち現象などの数値不安定現象が発生する一因になっていると考えられる．

9.9 評価関数の降下方向

注意 9.8.7 で領域変動型形状最適化問題の不正則性が指摘された．そこで，評価関数の形状微分を正則化する機能をもつ設計変数の線形空間 X 上の勾配法と Newton 法について，抽象的勾配法と抽象的 Newton 法の枠組みに沿って考えてみよう．ここでは，$i \in \{0, \dots, m\}$ 番目の評価関数 f_i に対して，式 (9.8.5) の勾配 $\boldsymbol{g}_i \in X'$ あるいは式 (9.8.35) の勾配 $\bar{\boldsymbol{g}}_i \in X'$ と式 (9.8.24) の Hesse 形式 $h_i \in \mathcal{L}^2(X \times X; \mathbb{R})$ が与えられたと仮定して，f_i の降下方向を設計変数の線形空間 X 上の勾配法と Newton 法によって求める方法について考えよう．

評価関数 $f_i(\phi, u)$ ($i \in \{0, \dots, m\}$) を選び，$\phi \in \mathcal{D}^\circ$ における形状微分 $\boldsymbol{g}_i \in X'$ あるいは $\bar{\boldsymbol{g}}_i \in X'$ が与えられたと仮定する．これ以降は，$\tilde{f}_i(\phi) = f_i(\phi, u(\phi))$ を $f_i(\phi)$ とかくことにする．f_i が減少する方向ベクトル (領域変動) を次の問題の解 $\varphi_{gi} \in X$ によって求める方法を，**領域変動型 H^1 勾配法**とよぶことにする．

問題 9.9.1 (領域変動型 H^1 勾配法)

X を式 (9.1.1) で定義する．X 上の有界かつ強圧的な双 1 次形式 $a_X : X \times X \to \mathbb{R}$ を選ぶ．すなわち，任意の $\varphi \in X$ と $\psi \in X$ に対して，

$$a_X(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}) \geq \alpha_X \|\boldsymbol{\varphi}\|_X^2, \quad |a_X(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi})| \leq \beta_X \|\boldsymbol{\varphi}\|_X \|\boldsymbol{\psi}\|_X \tag{9.9.1}$$

が成り立つような正定数 α_X と β_X が存在するとする．また，$\phi \in \mathcal{D}^\circ$ において $\boldsymbol{g}_i \in X'$ が与えられているとする．このとき，任意の $\psi \in X$ に対して

$$a_X(\boldsymbol{\varphi}_{gi}, \boldsymbol{\psi}) = -\langle \boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{\psi} \rangle \tag{9.9.2}$$

を満たす $\varphi_{gi} \in X$ を求めよ．

問題 9.9.1 で仮定された $a_X : X \times X \to \mathbb{R}$ の選び方には任意性がある．以下の項では，いくつかの具体例を示すことにする．

密度変動型 H^1 勾配法 のときと同様に，実 Hilbert 空間 X 上の内積を用いた方法を考える．ここでは，式 (9.1.1) において $\bar{\Omega}_{\mathrm{C0}} = \emptyset$ を仮定してもよいことにする．

$X = H^1\left(D; \mathbb{R}^d\right)$ 上の内積は，任意の $\varphi \in X$ と $\psi \in X$ に対して，

$$(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi})_X = \int_{\Omega(\phi)} \left\{ \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}^\top\right) \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\psi}^\top\right) + \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\psi} \right\} \mathrm{d}x$$

で定義される．そこで，c_Ω を $L^\infty(D; \mathbb{R})$ に入るある正値関数として，

$$a_X(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}) = \int_{\Omega(\phi)} \left\{ \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}^\top\right) \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\psi}^\top\right) + c_\Omega \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\psi} \right\} \mathrm{d}x \tag{9.9.3}$$

は X 上の有界かつ強圧的な双 1 次形式となる．ここで，c_Ω は被積分関数の第 1 項と第 2 項の重みを調整する働きをする．c_Ω を小さくとり，第 1 項を支配的にすれば平滑化の機能が優先される．ただし，$c_\Omega = 0$ とすることは，強圧性を失うことになり，H^1 勾配法で要求される条件を満たさないことになる．また，$\boldsymbol{\nabla}\varphi^\top$ の対称成分を

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varphi}) = (e_{ij}(\boldsymbol{\varphi}))_{ij} = \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^\top + \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^\top\right)^\top\right\}$$

とかくことにすれば，

$$a_X(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}) = \int_{\Omega(\phi)} (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varphi}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\psi}) + c_\Omega \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\psi})\,\mathrm{d}x \tag{9.9.4}$$

も X 上の有界かつ強圧的な双 1 次形式となる．$\nabla\varphi^\top$ の反対称成分を除外することは変形を生じない回転運動を除外することを意味する．

さらに，$\boldsymbol{C} = \left(c_{ijkl}\right)_{ijkl} \in L^\infty\left(D; \mathbb{R}^{d\times d\times d\times d}\right)$ を線形弾性問題で使われる剛性テンソルとする．すなわち，任意の対称テンソル $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ と $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ に対して

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}) \geq \alpha_X \|\boldsymbol{A}\|^2, \quad |\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{C}\boldsymbol{B})| \leq \beta_X \|\boldsymbol{A}\| \|\boldsymbol{B}\| \tag{9.9.5}$$

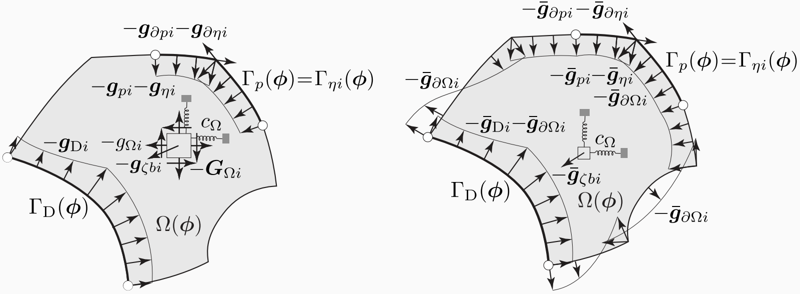
が成り立つような正定数 α_X と β_X が存在し，かつ対称性 $c_{ijkl} = c_{klij}$ をもつと仮定する．これを用いて，応力テンソルを

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varphi}) = \left(\sum_{(k,l)\in\{1,\ldots,d\}^2} c_{ijkl} e_{kl}(\boldsymbol{\varphi})\right)_{ij} \tag{9.9.6}$$

とおく．このとき，

$$a_X(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}) = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} (\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\varphi}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\psi}) + c_\Omega \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\psi}) \, \mathrm{d}x \tag{9.9.7}$$

は X 上の有界かつ強圧的な双 1 次形式となる．式 (9.9.7) の $a_X(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi})$ は，$\boldsymbol{\varphi}$ と $\boldsymbol{\psi}$ を変位とその変分とみなしたときの，線形弾性問題におけるひずみエネルギーの変分を与える双 1 次形式となる．このとき，c_Ω は $\mathbb{R}^d$ 上に配置された分布ばねのばね定数の意味をもつ．図 9.13 はこのときの問題 9.9.1 のイメージを示す．



(a) $\boldsymbol{g}_i$ を用いた場合 (b) $\bar{\boldsymbol{g}}_i$ を用いた場合

図 9.13: $H^1\left(D;\mathbb{R}^d\right)$ の内積を用いた H^1 勾配法

図 9.13 (a) は，f_i の形状微分として式 (9.8.5) の $\boldsymbol{g}_i$ を用いた場合を表している．このときの問題 9.9.1 は弱形式で与えられている．あえてこの問題を強形式で表そうとするならば，次のようになる．u と v_i は $W^{2,2q_{\mathrm{R}}}$ 級であると仮定して，式 (9.8.5) の右辺第 1 項を

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \left\{\boldsymbol{G}_{\Omega i} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{\top}\right) + g_{\Omega i}\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{g}_{\zeta b i} \cdot \boldsymbol{\varphi}\right\} \mathrm{d}x \\
&\quad = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \Big\{\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{G}_{\Omega i}\boldsymbol{\varphi}) - \left(\boldsymbol{\nabla}^{\top}\boldsymbol{G}_{\Omega i}\right)^{\top} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (g_{\Omega i}\boldsymbol{\varphi}) \\
&\qquad\quad - (\boldsymbol{\nabla} g_{\Omega i}) \cdot \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{g}_{\zeta b i} \cdot \boldsymbol{\varphi}\Big\} \mathrm{d}x \\
&\quad = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \tilde{\boldsymbol{g}}_{\Omega i} \cdot \boldsymbol{\varphi} \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega(\boldsymbol{\phi})} \tilde{\boldsymbol{g}}_{\partial\Omega i} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\gamma
\end{aligned}
\tag{9.9.8}
$$

とかく．ただし，

$$\tilde{\boldsymbol{g}}_{\Omega i} = -\left(\boldsymbol{\nabla}^{\top} \boldsymbol{G}_{\Omega i}\right)^{\top} - \boldsymbol{\nabla} g_{\Omega i} + \boldsymbol{g}_{\zeta b i} \tag{9.9.9}$$

$$\tilde{\boldsymbol{g}}_{\partial\Omega i} = \left(\boldsymbol{G}_{\Omega i} + g_{\Omega i}\right) \boldsymbol{\nu} \tag{9.9.10}$$

とおく．また，$\chi_{\Gamma_p(\boldsymbol{\phi})} : \partial\Omega(\boldsymbol{\phi}) \to \mathbb{R}$ は $\Gamma_p(\boldsymbol{\phi}) \subset \partial\Omega(\boldsymbol{\phi})$ 上で 1 をとり，$\partial\Omega(\boldsymbol{\phi}) \setminus \bar{\Gamma}_p(\boldsymbol{\phi})$ 上で 0 をとる特性関数を表すことにする．このとき，$a_X(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi})$ に式 (9.9.7) を用いたときの問題 9.9.1 の強形式は次のようになる．

問題 9.9.2 (H^1 内積を用いた H^1 勾配法 (g_i の場合))

$\phi \in \mathcal{D}^\circ$ において，式 (9.8.5) の $\boldsymbol{g}_{pi}$，$\boldsymbol{g}_{\partial pi}$，$\boldsymbol{g}_{\eta i}$，$\boldsymbol{g}_{\partial \eta i}$，$\boldsymbol{g}_{\mathrm{D}i}$ および式 (9.9.9) と式 (9.9.10) のそれぞれ $\tilde{\boldsymbol{g}}_{\Omega i}$ と $\tilde{\boldsymbol{g}}_{\partial\Omega i}$ が与えられたとき，

$$-\boldsymbol{\nabla}^\top \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{\varphi}_{gi}\right) + c_\Omega \boldsymbol{\varphi}_{gi}^\top = -\tilde{\boldsymbol{g}}_{\Omega i}^\top \quad \text{in } \Omega\left(\boldsymbol{\phi}\right), \tag{9.9.11}$$

$$\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{\varphi}_{gi}\right)\boldsymbol{\nu} = -\chi_{\Gamma_p(\boldsymbol{\phi})}\boldsymbol{g}_{pi} - \chi_{\Gamma_{\eta i}(\boldsymbol{\phi})}\boldsymbol{g}_{\eta i} - \chi_{\Gamma_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{\phi})}\boldsymbol{g}_{\mathrm{D}i} - \tilde{\boldsymbol{g}}_{\partial\Omega i} \quad \text{on } \partial\Omega\left(\boldsymbol{\phi}\right), \tag{9.9.12}$$

$$\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{\varphi}_{gi}\right)\boldsymbol{\tau} = -\chi_{\partial\Gamma_p(\boldsymbol{\phi})\cup\Theta_p(\boldsymbol{\phi})}\boldsymbol{g}_{\partial pi} - \chi_{\partial\Gamma_{\eta i}(\boldsymbol{\phi})\cup\Theta_{\eta i}(\boldsymbol{\phi})}\boldsymbol{g}_{\partial\eta i} \quad \text{on } \partial\Omega\left(\boldsymbol{\phi}\right) \tag{9.9.13}$$

を満たす $\varphi_{gi} : \Omega\left(\boldsymbol{\phi}\right) \to \mathbb{R}$ を求めよ．

また，図 9.13 (b) は，f_i の形状勾配が式 (9.8.35) の $\bar{g}_i$ で与えられた場合を示している．このときの強形式は次のようになる．

問題 9.9.3 (H^1 内積を用いた H^1 勾配法 ($\bar{g}_i$ の場合))

$\phi \in \mathcal{D}^{\circ}$ において，式 (9.8.35) の $\bar{\boldsymbol{g}}_{\zeta bi}$，$\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\Omega i}$，$\bar{\boldsymbol{g}}_{pi}$，$\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial pi}$，$\bar{\boldsymbol{g}}_{\eta i}$，$\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\eta i}$ および $\bar{g}_{\mathrm{D}i}$ が与えられたとき，

$$
\begin{aligned}
-\boldsymbol{\nabla}^{\top}\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{\varphi}_{gi}\right)+c_{\Omega}\boldsymbol{\varphi}_{gi}^{\top} &= -\bar{\boldsymbol{g}}_{\zeta bi}^{\top} \quad \text{in } \Omega\left(\phi\right),\\
\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{\varphi}_{gi}\right)\boldsymbol{\nu} &= -\chi_{\Gamma_p(\phi)}\bar{\boldsymbol{g}}_{pi}-\chi_{\Gamma_{\eta i}(\phi)}\bar{\boldsymbol{g}}_{\eta i}-\chi_{\Gamma_{\mathrm{D}}(\phi)}\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{D}i}-\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\Omega i}\\
&\quad \text{on } \partial\Omega\left(\phi\right),\\
\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{\varphi}_{gi}\right)\boldsymbol{\tau} &= -\chi_{\partial\Gamma_p(\phi)\cup\Theta_p(\phi)}\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial pi}-\chi_{\partial\Gamma_{\eta i}(\phi)\cup\Theta_{\eta i}(\phi)}\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\eta i}\\
&\quad \text{on } \partial\Omega\left(\phi\right)
\end{aligned}
$$

を満たす φ_{gi} を求めよ．

また，密度変動型 H^1 勾配法 のときと同様に，境界条件を追加することで双 1 次形式 $a_X : X \times X \to \mathbb{R}$ に強圧性をもたせることができる．

最初に，Dirichlet 境界条件を用いることを考える．式 (9.1.1) において，設計上の制約で領域変動を固定する閉領域あるいは境界として $\bar{\Omega}_{\mathrm{C0}} \subset \bar{\Omega}_0$ が定義された．ここでは，$\left|\bar{\Omega}_{\mathrm{C0}}\right| > 0$ と仮定する．このとき，

$$a_X(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}) = \int_{\Omega(\phi)\setminus\bar{\Omega}_{\mathrm{C0}}} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\varphi}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\psi})\,\mathrm{d}x \tag{9.9.14}$$

は X 上の有界かつ強圧的な双 1 次形式となる．なぜならば，$\bar{\Omega}_{\mathrm{C0}}$ の測度が正で，$\bar{\Omega}_{\mathrm{C0}}$ 上で $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d}$ のとき，Korn の不等式の系より，

$$a_X(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}) \geq \alpha_X \left\|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varphi})\right\|^2_{L^2\left(\Omega(\phi)\setminus\bar{\Omega}_{\mathrm{C0}};\mathbb{R}^{d\times d}\right)} \geq c\left\|\boldsymbol{\varphi}\right\|^2_{H^1\left(\Omega(\phi)\setminus\bar{\Omega}_{\mathrm{C0}};\mathbb{R}^d\right)}$$

を満たす $\Omega(\phi) \setminus \bar{\Omega}_{\mathrm{C0}}$ だけに依存する正定数 c が存在するためである．ただし，α_X は式 (9.9.5) を満たす正定数である．このときの強形式は次のようになる．ここでは，f_i の形状勾配が式 (9.8.35) の $\bar{g}_i$ で与えられた場合だけを示す．

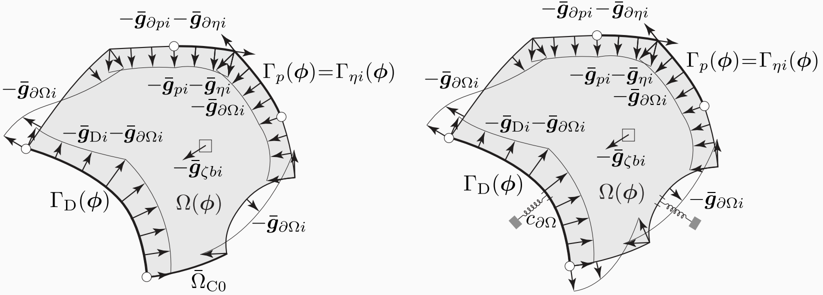
問題 9.9.4 (Dirichlet 条件を用いた H^1 勾配法 ($\bar{g}_i$ の場合))

$\phi \in \mathcal{D}^\circ$ において，式 (9.8.35) の $\bar{\boldsymbol{g}}_{\zeta b i}$，$\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\Omega i}$，$\bar{\boldsymbol{g}}_{p i}$，$\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial p i}$，$\bar{\boldsymbol{g}}_{\eta i}$，$\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\eta i}$ および $\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{D} i}$ が与えられたとき，

$$
\begin{aligned}
-\boldsymbol{\nabla}^\top \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{\varphi}_{gi}\right) + c_\Omega \boldsymbol{\varphi}_{gi}^\top &= -\bar{\boldsymbol{g}}_{\zeta b i}^\top \quad \text{in } \Omega\left(\phi\right) \setminus \bar{\Omega}_{\mathrm{C}0}, \\
\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{\varphi}_{gi}\right)\boldsymbol{\nu} &= -\chi_{\Gamma_p(\phi)}\bar{\boldsymbol{g}}_{pi} - \chi_{\Gamma_{\eta i}(\phi)}\bar{\boldsymbol{g}}_{\eta i} - \chi_{\Gamma_{\mathrm{D}}(\phi)}\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{D}i} - \bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\Omega i} \\
&\qquad \text{on } \partial\Omega\left(\phi\right) \setminus \bar{\Omega}_{\mathrm{C}0}, \\
\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{\varphi}_{gi}\right)\boldsymbol{\tau} &= -\chi_{\partial\Gamma_p(\phi)\cup\Theta_p(\phi)}\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial p i} - \chi_{\partial\Gamma_{\eta i}(\phi)\cup\Theta_{\eta i}(\phi)}\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\eta i} \\
&\qquad \text{on } \partial\Omega\left(\phi\right) \setminus \bar{\Omega}_{\mathrm{C}0}, \\
\boldsymbol{\varphi}_{gi} &= \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{on } \bar{\Omega}_{\mathrm{C}0}
\end{aligned}
$$

を満たす $\boldsymbol{\varphi}_{gi} : \Omega\left(\phi\right) \setminus \bar{\Omega}_{\mathrm{C}0} \to \mathbb{R}^d$ を求めよ．

図 9.14 (a) は問題 9.9.4 のイメージを示す．この問題は，$\Omega(\phi)$ を線形弾性体と仮定して，$\bar{\Omega}_{\mathrm{C0}}$ を固定して残りの境界に境界力 $-\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\Omega i}$，$-\bar{\boldsymbol{g}}_{pi}$，$-\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial pi}$，$\bar{\boldsymbol{g}}_{\eta i}$，$-\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\eta i}$ および $-\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{D}i}$ を作用させ，さらに体積力 $-\bar{\boldsymbol{g}}_{\zeta bi}$ を作用させたときの変位 φ_{gi} を求める問題になっている．このような解釈から，問題 9.9.4 は力法とよばれてきた [2]．



(a) Dirichlet 条件　　(b) Robin 条件

図 9.14: 境界条件を用いた H^1 勾配法 ($\Gamma_p(\phi) = \Gamma_{\eta i}(\phi)$ のとき)

さらに，Robin 条件を用いれば，式 (9.1.1) において $\bar{\Omega}_{\mathrm{C0}} = \emptyset$ を仮定しても $a_X(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi})$ の強圧性が得られる．ある正値関数 $c_{\partial\Omega} \in L^{\infty}(\partial\Omega(\boldsymbol{\phi}); \mathbb{R})$ を選び，

$$a_X(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}) = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\varphi}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\psi}) \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega(\boldsymbol{\phi})} c_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\nu}) (\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\nu}) \, \mathrm{d}\gamma \tag{9.9.15}$$

とおく．このときの強形式は次のようになる．ここでも，f_i の形状勾配が式 (9.8.35) の $\bar{\boldsymbol{g}}_i$ で与えられた場合だけを示すことにしよう．

問題 9.9.5 (Robin 条件を用いた H^1 勾配法 ($\bar{g}_i$ の場合))

$\phi \in \mathcal{D}^\circ$ において，式 (9.8.35) の $\bar{\boldsymbol{g}}_{\zeta b i}$，$\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\Omega i}$，$\bar{\boldsymbol{g}}_{p i}$，$\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial p i}$，$\bar{\boldsymbol{g}}_{\eta i}$，$\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\eta i}$ および $\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{D} i}$ が与えられたとき，

$$
\begin{aligned}
-\boldsymbol{\nabla}^{\top} \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{\varphi}_{g i}\right) &= -\bar{\boldsymbol{g}}_{\zeta b i}^{\top} \quad \text{in } \Omega\left(\phi\right), \\
\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{\varphi}_{g i}\right)\boldsymbol{\nu} + c_{\partial\Omega}\left(\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)\boldsymbol{\nu} &= -\chi_{\Gamma_p(\phi)}\bar{\boldsymbol{g}}_{p i} - \chi_{\Gamma_{\eta i}(\phi)}\bar{\boldsymbol{g}}_{\eta i} \\
&\quad - \chi_{\Gamma_{\mathrm{D}}(\phi)}\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{D} i} - \bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\Omega i} \quad \text{on } \partial\Omega\left(\phi\right), \\
\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{\varphi}_{g i}\right)\boldsymbol{\tau} &= -\chi_{\partial\Gamma_p(\phi)\cup\Theta_p(\phi)}\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial p i} - \chi_{\partial\Gamma_{\eta i}(\phi)\cup\Theta_{\eta i}(\phi)}\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\eta i} \\
&\quad \text{on } \partial\Omega\left(\phi\right)
\end{aligned}
$$

を満たす $\boldsymbol{\varphi}_{g i}$ を求めよ．

図 9.14 (b) は問題 9.9.5 のイメージを示す．この問題は，$\Omega(\phi)$ を線形弾性体と仮定して，$\partial\Omega(\phi)$ にばね定数 $c_{\partial\Omega}$ の分布ばねが配置された下で，境界に境界力 $-\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\Omega i}$，$-\bar{\boldsymbol{g}}_{pi}$，$-\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial pi}$，$\bar{\boldsymbol{g}}_{\eta i}$，$-\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\eta i}$ および $-\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{D}i}$ を作用させ，さらに体積力 $-\bar{\boldsymbol{g}}_{\zeta bi}$ を作用させたときの変位 φ_{gi} を求める問題になっている．このような解釈から，問題 9.9.5 はばねつき力法，あるいは Robin 型力法とよばれてきた [7]．

問題 9.9.1 とその具体例としてあげた問題 9.9.3 から問題 9.9.5 の弱解に対して，次の結果が得られる．ここでは，u が $\mathcal{S}$ (あるいは，定理 9.8.6 の $\bar{\boldsymbol{g}}_i$ を用いるときは $U(\phi) \cap W^{2,2q_{\mathrm{R}}}(D;\mathbb{R})$) に入らない境界上の点あるいは辺 (仮定 9.5.3 参照) の近傍を特異点近傍とよび，$B(\phi)$ とかくことにする．また，u が問題 9.5.4 の解であるときの $f_i(\phi, u)$ を $\tilde{f}_i(\phi)$ とかくことにする．

定理 9.9.6 (H^1 勾配法の正則性)

定理 9.8.2 の $\boldsymbol{g}_i$ あるいは定理 9.8.6 の $\bar{\boldsymbol{g}}_i$ を用いたときの問題 9.9.2 から問題 9.9.5 の弱解 $\boldsymbol{\varphi}_{gi} \in X$ は一意に存在する．$\boldsymbol{\varphi}_{gi}$ は $\Omega(\phi) \setminus \bar{B}(\phi)$ 上で $H^2 \cap C^{0,1}$ 級となる．また，$\boldsymbol{\varphi}_{gi}$ は $\tilde{f}_i(\phi)$ を減少させる領域の変動方向を向いている．

証明　問題 9.9.2 の弱解 φ_{gi} について考えよう．問題 9.9.2 は，定理 9.8.2 より，領域においては $\boldsymbol{G}_{\Omega i}$ と $g_{\Omega i}$ が $H^1 \cap L^\infty$ 級で与えられ，境界においては $H^{1/2} \cap L^\infty$ 級の $\boldsymbol{g}_{pi}$，$\boldsymbol{g}_{\partial pi}$，$\boldsymbol{g}_{\eta i}$ および $\boldsymbol{g}_{\partial \eta i}$ が Neumann 境界条件として与えられたときの楕円型偏微分方程式になっている．そこで，Lax-Milgram の定理より $\varphi_{gi} \in X$ は一意に存在する．また，φ_{gi} の正則性に関して，$\Omega(\phi) \setminus \bar{B}(\phi)$ 上では，φ_{gi} は $H^2 \cap C^{0,1}$ 級となる．なぜならば，式 (9.9.11) において，$\boldsymbol{G}_{\Omega i}$ と $\boldsymbol{S}(\varphi_{gi})$ は同じ正則性をもつ．そこで，$\boldsymbol{G}_{\Omega i}$ が $H^1 \cap L^\infty$ 級ならば，φ_{gi} は $H^2 \cap C^{0,1}$ 級となる．式 (9.9.12) と式 (9.9.13) においても φ_{gi} は $H^2 \cap C^{0,1}$ 級が得られる．

同様に，問題 9.9.3 の弱解 φ_{gi} は，定理 9.8.6 より，$H^{1/2}\cap L^{\infty}$ 級の $\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\Omega i}$，$\bar{\boldsymbol{g}}_{pi}$，$\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial pi}$，$\bar{\boldsymbol{g}}_{\eta i}$，$\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\eta i}$ および $\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{D}i}$ を Neumann 境界条件とする楕円型偏微分方程式を満たす．そこで，Lax-Milgram の定理より，弱解 $\varphi_{gi}\in X$ は一意に存在し，$\Omega(\phi)\setminus\bar{B}(\phi)$ 上で $H^2\cap C^{0,1}$ 級となる．問題 9.9.4 と問題 9.9.5 の弱解 φ_{gi} についても同様の結果が得られる．

さらに，問題 9.9.3 から問題 9.9.5 の弱解 φ_{gi} に対して，正の定数 $\bar{\epsilon}$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}_i(\boldsymbol{\phi}+\bar{\epsilon}\boldsymbol{\varphi}_{gi})-\tilde{f}_i(\boldsymbol{\phi}) &= \bar{\epsilon}\left\langle \boldsymbol{g}_i,\boldsymbol{\varphi}_{gi}\right\rangle + o(|\bar{\epsilon}|)\\
&= -\bar{\epsilon}a_X(\boldsymbol{\varphi}_{gi},\boldsymbol{\varphi}_{gi}) + o(|\bar{\epsilon}|) \le -\bar{\epsilon}\alpha_X\left\|\boldsymbol{\varphi}_{gi}\right\|_X^2 + o(|\bar{\epsilon}|)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．そこで，$\left\|\boldsymbol{\varphi}_{gi}\right\|_X$ を十分小さくとれば，$\tilde{f}_i(\phi)$ は減少する． □

定理 9.9.6 の結果と式 (9.1.3) で定義された領域写像の許容集合 $\mathcal{D}$ との関係について，次のことがいえる．

注意 9.9.7 (形状最適化問題に対する H^1 勾配法)

定理 9.9.6 より，形状最適化問題に対する H^1 勾配法によって得られる領域変動 φ_{gi} は，設計変数の許容集合 $\mathcal{D}$ を含む線形空間 $H^2 \cap C^{0,1}\left(D;\mathbb{R}^d\right)$ に特異点近傍を除いて入ることが確かめられた．これにより，特異点近傍を除いて，連続写像により領域が動かせることになる．しかしながら，$\phi + \varphi_{gi}$ の逆写像が全単射 (1 対 1 写像) になるための十分条件 $|\phi + \varphi_{gi}|_{C^{0,1}\left(D;\mathbb{R}^d\right)} \le \sigma$ を満たすことや $\tilde{\Gamma}\left(\phi + \varphi_{gi}\right)$ ($\tilde{\Gamma}_0 = \Gamma_{p0} \cup \Gamma_{\eta 00} \cup \Gamma_{\eta 10} \cup \cdots \cup \Gamma_{\eta m0} \setminus \bar{\Omega}_{\mathrm{C}0}$) が $H^3 \cap C^{1,1}$ 級になることは保証されない．さらに，$\Omega\left(\phi + \varphi_{gi}\right)$ が Lipschitz 領域 (A.5 節) であるためには，境界近傍の局所座標系でグラフがとれることが要請される．これらの条件を満たさないことに起因する数値不安定現象などが発生した場合には，これらの条件が満たされるようにする追加の処置を考える必要がある．

境界の正則性を高める方法の一つとして，H^1 勾配法を繰返す方法が考えられる．その方法は次のようなアルゴリズムである．

アルゴリズム 9.9.8 (H^1 勾配法の反復法)

領域 $\Omega(\phi)$ が与えられたとき，領域変動を次のようにして求める．

1. 形状勾配 g_i (あるいは $\bar{g}_i$) を計算する．
2. 初回の H^1 勾配法により，$-\boldsymbol{g}_i$ (あるいは $-\bar{\boldsymbol{g}}_i$) から $\boldsymbol{\varphi}_{gi} = \boldsymbol{\varphi}_{gi1}$ を求める．このとき，$\boldsymbol{\varphi}_{gi1}$ を用いて領域を変動させない．
3. 初回の H^1 勾配法による解 $\boldsymbol{\varphi}_{gi1}$ の $\partial\Omega(\phi)$ 上トレース $\boldsymbol{\varphi}_{gi1}|_{\partial\Omega(\phi)}$ を $-\bar{\boldsymbol{g}}_i$ の代わりに用いた 2 回目の H^1 勾配法により，$\boldsymbol{\varphi}_{gi2}$ を求める．この $\boldsymbol{\varphi}_{gi2}$ を用いて領域を変動させる．

このようにして得られた新領域 $\Omega\left(\phi+\varphi_{gi2}\right)$ の境界は，$\Omega\left(\phi+\varphi_{gi1}\right)$ の境界よりも微分可能性の階数が一つ向上することが期待される．

さらに，評価関数 f_i の 2 階微分 (Hesse 形式) $h_i \in \mathcal{L}^2(X \times X; \mathbb{R})$ が計算可能であれば，$X = H^1\left(D; \mathbb{R}^d\right)$ 上の Newton 法が考えられる．その方法を**領域変動型 H^1 Newton 法**とよぶことにする．

問題 9.9.9 (領域変動型 H^1 Newton 法)

X と $\mathcal{D}$ をそれぞれ式 (9.1.1) と式 (9.1.3) とする．極小点ではない $\phi_k \in \mathcal{D}^\circ$ における f_i の形状微分と 2 階形状微分をそれぞれ $\boldsymbol{g}_i(\phi_k) \in X'$ および $h_i(\boldsymbol{\phi}_k) \in \mathcal{L}^2(X \times X; \mathbb{R})$ とする．また，$a_X : X \times X \to \mathbb{R}$ を $h_i(\boldsymbol{\phi}_k)$ の X 上における強圧性と正則性を補うための双 1 次形式とする．このとき，任意の $\psi \in X$ に対して

$$h_i(\boldsymbol{\phi}_k)[\boldsymbol{\varphi}_{gi}, \boldsymbol{\psi}] + a_X(\boldsymbol{\varphi}_{gi}, \boldsymbol{\psi}) = -\langle \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{\phi}_k), \boldsymbol{\psi} \rangle \tag{9.9.16}$$

を満たす $\varphi_{gi} \in X$ を求めよ．

問題 9.9.9 において，式 (9.9.16) の左辺を h_i のみにおいた Newton 法を考えた場合，h_i の X 上の強圧性が得られない場合がある．実際，式 (9.8.24) で計算された h_i では，負の項が含まれている．そこで，問題 9.9.9 では，X 上の強圧的かつ有界な双 1 次形式 a_X を式 (9.9.16) の左辺に追加することで，それを補うことにした．たとえば，X 上の内積を用いた式 (9.9.3) をもとにする場合には，

$$a_X(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}) = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \left\{ c_{\Omega 1} \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{\top}\right) \cdot \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\psi}^{\top}\right) + c_{\Omega 0}\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\psi} \right\} \mathrm{d}x \tag{9.9.17}$$

のようにおく．ここで，$c_{\Omega 0}$ と $c_{\Omega 1}$ はそれぞれ a_X の強圧性と式 (9.9.16) における $\boldsymbol{\varphi}_{gi}$ の正則性を確保するための正の定数である．$c_{\Omega 0}$ の意味は，第 8 章の式 (8.6.3) のあとで説明された内容と同じである．

さらに，$f_i(\phi)$ の 2 階形状微分が Hesse 勾配によって与えられる場合は，問題 9.9.9 が次の問題に置き換えられる．

問題 9.9.10 (Hesse 勾配を用いた領域変動型 Newton 法)

問題 9.9.9 の仮定のもとで，極小点ではない $\phi_k \in \mathcal{D}^\circ$ における f_i の形状微分の勾配，探索ベクトルおよび Hesse 勾配をそれぞれ $\boldsymbol{g}_i(\phi_k) \in X'$, $\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{gi} \in X$ および $\boldsymbol{g}_{\mathrm{H}i}(\phi_k, \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{gi}) \in X'$ とするとき，任意の $\boldsymbol{\psi} \in X$ に対して

$$a_X(\boldsymbol{\varphi}_{gi}, \boldsymbol{\psi}) = -\langle (\boldsymbol{g}_i(\phi_k) + \boldsymbol{g}_{\mathrm{H}i}(\phi_k, \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{gi})), \boldsymbol{\psi} \rangle \tag{9.9.18}$$

を満たす $\boldsymbol{\varphi}_{gi} \in X$ を求めよ．

9.10 領域変動型形状最適化問題の解法

表 9.1: 抽象的最適設計問題と領域変動型形状最適化問題の対応

	抽象的最適設計問題	領域変動型形状最適化問題
設計変数	$\phi \in X$	$\boldsymbol{\phi} \in X = H^1\left(D;\mathbb{R}^d\right)$
状態変数	$u \in U$	$u \in U = H^1\left(D;\mathbb{R}\right)$
f_i の Fréchet 微分	$g_i \in X'$	$\boldsymbol{g}_i \in X' = H^{1\prime}\left(D;\mathbb{R}^d\right)$
勾配法の解	$\varphi_{gi} \in X$	$\boldsymbol{\varphi}_{gi} \in X = H^1\left(D;\mathbb{R}^d\right)$

領域変動型形状最適化問題 (問題 9.6.3) は，抽象的最適設計問題と表 9.1 のような対応になる．したがって，第 8 章で示された内容と同様に，7.7.1 項 (3.7 節) と 7.7.2 項 (3.8 節) で示された制約つき問題に対する勾配法と制約つき問題に対する Newton 法を適用することができる．

§9.10.1　制約つき問題に対する勾配法

制約つき問題に対する勾配法は，次のような変更により，3.7.1 項で示された簡単なアルゴリズム 3.7.2 が利用可能となる．

1. 設計変数 x とその変動 y をそれぞれ ϕ と φ におきかえる．
2. 勾配法を与える式 (3.7.10) を，任意の $\psi \in X$ に対して

$$c_a a_X\left(\boldsymbol{\varphi}_{gi}, \boldsymbol{\psi}\right) = -\left\langle \boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{\psi}\right\rangle \tag{9.10.1}$$

が成り立つ条件におきかえる．ただし，$a_X\left(\boldsymbol{\varphi}_{gi}, \boldsymbol{\psi}\right)$ は，問題 9.9.2 から問題 9.9.5 の弱形式で使われた X 上の双 1 次形式とする．
3. 探索ベクトルを求める式 (3.7.11) を

$$\boldsymbol{\varphi}_g = \boldsymbol{\varphi}_{g0} + \sum_{i \in I_{\mathrm{A}}} \lambda_i \boldsymbol{\varphi}_{gi} \tag{9.10.2}$$

におきかえる．

4. Lagrange 乗数を求める式 (3.7.12) を

$$\left(\langle \boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{\varphi}_{gj} \rangle\right)_{(i,j)\in I_{\mathrm{A}}^2} \left(\lambda_j\right)_{j\in I_{\mathrm{A}}} = -\left(f_i + \langle \boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{\varphi}_{g0} \rangle\right)_{i\in I_{\mathrm{A}}} \tag{9.10.3}$$

におきかえる．

さらに，複雑なアルゴリズム 3.7.6 を使う場合には，上記 (1) から (4) に加えて，次の変更も追加する．

5. Armijo の規準式 (3.7.26) を，$\xi \in (0,1)$ に対して

$$\mathscr{L}\left(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}_g, \boldsymbol{\lambda}_{k+1}\right) - \mathscr{L}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\lambda}\right) \leq \xi \left\langle \boldsymbol{g}_0 + \sum_{i\in I_{\mathrm{A}}} \lambda_i \boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{\varphi}_g \right\rangle \tag{9.10.4}$$

におきかえる．

6. Wolfe の規準式 (3.7.27) を，μ $(0 < \xi < \mu < 1)$ に対して

$$\mu \left\langle \boldsymbol{g}_0 + \sum_{i \in I_{\mathrm{A}}} \lambda_i \boldsymbol{g}_i , \boldsymbol{\varphi}_g \right\rangle \leq \left\langle \boldsymbol{g}_0 \left(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}_g \right) + \sum_{i \in I_{\mathrm{A}}} \lambda_{i\,k+1} \boldsymbol{g}_i \left(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}_g \right) , \boldsymbol{\varphi}_g \right\rangle \tag{9.10.5}$$

におきかえる．

7. 式 (3.7.21) で与えられた Newton-Raphson 法による $\boldsymbol{\lambda}$ の更新式を

$$\left(\delta \lambda_j \right)_{j \in I_{\mathrm{A}}} = - \left(\left\langle \boldsymbol{g}_i \left(\boldsymbol{\lambda} \right) , \boldsymbol{\varphi}_{gj} \right\rangle \right)^{-1}_{(i,j) \in I_{\mathrm{A}}^2} \left(f_i \left(\boldsymbol{\lambda} \right) \right)_{i \in I_{\mathrm{A}}} \tag{9.10.6}$$

におきかえる．

§9.10.2 制約つき問題に対する Newton 法

評価関数の形状微分に加えて，評価関数の 2 階形状微分が計算可能ならば，制約つき問題に対する勾配法を制約つき問題に対する Newton 法に変更することができる．ただし，式 (9.9.16) の $h_i(\phi_k)[\varphi_{gi}, \psi]$ を，形状最適化問題 (問題 9.6.3) に対する Lagrange 関数 $\mathscr{L}$ の Hesse 形式

$$h_{\mathscr{L}}(\phi_k)[\varphi_{gi}, \psi] = h_0(\phi_k)[\varphi_{gi}, \psi] + \sum_{i \in I_{\mathrm{A}}(\phi_k)} \lambda_{ik} h_i(\phi_k)[\varphi_{gi}, \psi] \tag{9.10.7}$$

におきかえる．すなわち，式 (9.9.16) を

$$c_h h_{\mathscr{L}}(\phi_k)[\varphi_{gi}, \psi] + a_X(\varphi_{gi}, \psi) = -\langle \boldsymbol{g}_i(\phi_k), \psi \rangle \tag{9.10.8}$$

とする．ただし，a_X は式 (9.10.8) で与えられ，c_h，$c_{\Omega 0}$，$c_{\Omega 1}$ はステップサイズを制御するための定数とする．このとき，3.8.1 項で示された簡単なアルゴリズム 3.8.4 が次のおきかえによって利用可能となる．

1. 設計変数 x とその変動 y をそれぞれ ϕ と φ におきかえる．
2. 式 (3.7.10) を式 (9.10.8) の解におきかえる．
3. 式 (3.7.11) を式 (9.10.2) におきかえる．
4. 式 (3.7.12) を式 (9.10.3) におきかえる．

評価関数の 2 階形状微分が Hesse 勾配で与えられる場合には，式 (9.10.7) と式 (9.10.8) はそれぞれ

$$\boldsymbol{g}_{\mathrm{H}\mathscr{L}}\left(\boldsymbol{\phi}_k, \bar{\boldsymbol{\varphi}}_g\right) = \boldsymbol{g}_{\mathrm{H}0}\left(\boldsymbol{\phi}_k, \bar{\boldsymbol{\varphi}}_g\right) + \sum_{i \in I_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{\phi}_k)} \lambda_{ik} \boldsymbol{g}_{\mathrm{H}i}\left(\boldsymbol{\phi}_k, \bar{\boldsymbol{\varphi}}_g\right) \tag{9.10.9}$$

$$a_X\left(\boldsymbol{\varphi}_{gi}, \boldsymbol{\psi}\right) = -\left\langle\left(\boldsymbol{g}_i\left(\boldsymbol{\phi}_k\right) + c_h \boldsymbol{g}_{\mathrm{H}\mathscr{L}}\left(\boldsymbol{\phi}_k, \bar{\boldsymbol{\varphi}}_g\right)\right), \boldsymbol{\psi}\right\rangle \tag{9.10.10}$$

に置き換えられる．そのうえで，次のように変更される．

5. 式 (3.8.11) を式 (9.10.10) におきかえる．

さらに，3.8.2 項に示された複雑なアルゴリズムを考える場合には，第 8 章のときと同様に，問題の性質や追加される機能に応じたさまざまな工夫が必要となる．

9.11 誤差評価

9.10 節で示されたようなアルゴリズムで領域変動型形状最適化問題 (問題 9.6.3) を解く場合，探索ベクトル φ_g は式 (9.10.2) で求められることになる．そのためには，状態決定問題 (問題 9.5.4) の解 u，$f_0, f_{i_1}, \ldots, f_{i_{|I_A|}}$ に対する随伴問題 (問題 9.8.1) の解 $v_0, v_{i_1}, \ldots, v_{i_{|I_A|}}$ および H^1 勾配法 (問題 9.9.1) の解 $\varphi_0, \varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_{|I_A|}}$ に対する数値解を求める必要がある．Lagrange 乗数 $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_{|I_A|}}$ は，それらの数値解を使って計算される．第 8 章と同様に，ここでも三つの境界値問題に対する数値解を有限要素法で求めることを仮定して，6.6 節でみてきた有限要素法の数値解に対する誤差評価の結果を用いて探索ベクトル φ_g の誤差評価をおこなってみよう [67, 68]．

　領域変動型形状最適化問題の場合，境界値問題の定義域が動くことになる．ここでは，$\Omega(\phi)$ が与えられていると仮定して，$\Omega(\phi+\varphi)$ を求める場面を考えることにする．表記を簡単にするために，本節では，$\Omega(\phi)$ を Ω とかくことにする．同様に，$(\,\cdot\,)(\phi)$ を $(\,\cdot\,)$ とかくことにする．このとき，Ω は多面体 (6.6.1 項) と仮定して，Ω に対する正則な有限要素分割 $\mathcal{T}=\{\Omega_i\}_{i\in\mathcal{E}}$ を考える．また，有限要素の直径 h を式 (6.6.2) の $h(\mathcal{T})$ で定義して，有限要素分割列 $\{\mathcal{T}_h\}_{h\to 0}$ を考える．以下では，次のような記号法を用いることにする．

1. 状態決定問題 (問題 9.5.4) と f_i に対する随伴問題 (問題 9.8.1) の厳密解を u と $v_0, v_{i_1}, \ldots, v_{i_{|I_\mathrm{A}|}}$ とかき，有限要素法によるそれらの数値解を，$i \in I_\mathrm{A} \cup \{0\}$ に対して

$$u_h = u + \delta u_h, \tag{9.11.1}$$

$$v_{ih} = v_i + \delta v_{ih} \tag{9.11.2}$$

とかく．

2. $f_0, f_{i_1}, \ldots, f_{i_{|I_\mathrm{A}|}}$ の形状微分について，関数の形状微分公式を用いた式 (9.8.5) の $\boldsymbol{g}_i$ の数値解を，$i \in I_\mathrm{A} \cup \{0\}$ に対して

$$\boldsymbol{g}_{ih} = \boldsymbol{g}_i + \delta \boldsymbol{g}_{ih} \tag{9.11.3}$$

とかく．また，関数の形状偏微分公式を用いた式 (9.8.35) の $\bar{\boldsymbol{g}}_i$ の数値解を，$i \in I_\mathrm{A} \cup \{0\}$ に対して

$$\bar{\boldsymbol{g}}_{ih} = \bar{\boldsymbol{g}}_i + \delta \bar{\boldsymbol{g}}_{ih} \tag{9.11.4}$$

とかく．ここで，$\boldsymbol{g}_i$ と $\bar{\boldsymbol{g}}_i$ は $u, v_0, v_{i_1}, \ldots, v_{i_{|I_\mathrm{A}|}}$ の関数であり，$\boldsymbol{g}_{ih}$ と $\bar{\boldsymbol{g}}_{ih}$ は $u_h, v_{0h}, v_{i_1 h}, \ldots, v_{i_{|I_\mathrm{A}|} h}$ の関数である．

3. $\boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{g}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{g}_{i_{|I_{\mathrm{A}}|}}$ を用いて計算された H^1 勾配法 (たとえば，問題 9.9.3) の厳密解を $\boldsymbol{\varphi}_{g0}, \boldsymbol{\varphi}_{gi_1}, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_{gi_{|I_{\mathrm{A}}|}}$ とかく．また，$\boldsymbol{g}_{0h}, \boldsymbol{g}_{i_1 h}, \ldots, \boldsymbol{g}_{i_{|I_{\mathrm{A}}|}h}$ を用いて計算された H^1 勾配法の厳密解を，$i \in I_{\mathrm{A}} \cup \{0\}$ に対して

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{gi} = \boldsymbol{\varphi}_{gi} + \delta\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{gi} \tag{9.11.5}$$

とかく．(2) と同様に，関数の形状偏微分公式を用いて得られる厳密解と数値解には $(\bar{\cdot})$ をつけることにして，このときの H^1 勾配法の厳密解を

$$\hat{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}_{gi} = \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{gi} + \delta\hat{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}_{gi} \tag{9.11.6}$$

とかく．

4. $\boldsymbol{g}_{0h}$, $\boldsymbol{g}_{i_1 h}$, ..., $\boldsymbol{g}_{i_{|I_{\mathrm{A}}|}h}$ を用いて計算された H^1 勾配法の数値解を，$i \in I_{\mathrm{A}} \cup \{0\}$ に対して

$$\boldsymbol{\varphi}_{gih} = \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{gi} + \delta\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{gih} = \boldsymbol{\varphi}_{gi} + \delta\boldsymbol{\varphi}_{gih} \tag{9.11.7}$$

とかく．また，関数の形状偏微分公式を用いて得られる H^1 勾配法の数値解を

$$\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{gih} = \hat{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}_{gi} + \delta\hat{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}_{gih} = \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{gi} + \delta\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{gih} \tag{9.11.8}$$

とかく．

5. $\boldsymbol{g}_0$, $\boldsymbol{g}_{i_1}$, ... , $\boldsymbol{g}_{i_{|I_\mathrm{A}|}}$ と φ_{g0}, φ_{gi_1}, ... , $\varphi_{gi_{|I_\mathrm{A}|}}$ を用いて構成された式 (9.10.3) の係数行列 $\left(\langle \boldsymbol{g}_i, \varphi_{gj} \rangle\right)_{(i,j)\in I_\mathrm{A}^2}$ を $\boldsymbol{A}$ とかく．また，$\boldsymbol{g}_{0h}$, $\boldsymbol{g}_{i_1h}$, ... , $\boldsymbol{g}_{i_{|I_\mathrm{A}|}h}$ と φ_{g0h}, φ_{gi_1h}, ... , $\varphi_{gi_{|I_\mathrm{A}|}h}$ を用いて構成された式 (9.10.3) の係数行列 $\left(\langle \boldsymbol{g}_{ih}, \varphi_{gjh} \rangle\right)_{(i,j)\in I_\mathrm{A}^2}$ を $\boldsymbol{A}_h = \boldsymbol{A} + \delta \boldsymbol{A}_h$ とかく．さらに，$i \in I_\mathrm{A}$ に対して $f_i = 0$ を仮定し，$-\left(\langle \boldsymbol{g}_i, \varphi_{g0} \rangle\right)_{i\in I_\mathrm{A}}$ を $\boldsymbol{b}$ とかく．また，$-\left(\langle \boldsymbol{g}_{ih}, \varphi_{g0h} \rangle\right)_{i\in I_\mathrm{A}}$ を $\boldsymbol{b}_h = \boldsymbol{b} + \delta \boldsymbol{b}_h$ とかく．さらに，Lagrange 乗数の厳密解を $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ とかく．また，その数値解を

$$\boldsymbol{\lambda}_h = (\lambda_{ih})_{i\in I_\mathrm{A}} = \boldsymbol{A}_h^{-1}\boldsymbol{b}_h = \boldsymbol{\lambda} + \delta\boldsymbol{\lambda}_h \tag{9.11.9}$$

とかく．また，関数の形状偏微分公式を用いて得られる厳密解と数値解には $\bar{(\cdot)}$ をつけることにして，このときの Lagrange 乗数の数値解を

$$\bar{\boldsymbol{\lambda}}_h = \left(\bar{\lambda}_{ih}\right)_{i \in I_\mathrm{A}} = \bar{\boldsymbol{A}}_h^{-1} \bar{\boldsymbol{b}}_h = \bar{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \bar{\boldsymbol{\lambda}}_h \tag{9.11.10}$$

とかく．

6. $\boldsymbol{\varphi}_{g0h}, \boldsymbol{\varphi}_{gi_1 h}, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_{gi_{|I_\mathrm{A}|}h}$ と $\lambda_{i_1 h}, \ldots, \lambda_{i_{|I_\mathrm{A}|}h}$ で構成された式 (9.10.2) を

$$\boldsymbol{\varphi}_{gh} = \boldsymbol{\varphi}_{g0h} + \sum_{i \in I_\mathrm{A}} \lambda_{ih} \boldsymbol{\varphi}_{gih} = \boldsymbol{\varphi}_g + \delta \boldsymbol{\varphi}_{gh} \tag{9.11.11}$$

とかく．また，関数の形状偏微分公式を用いて得られる式 (9.10.2) を

$$\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{gh} = \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{g0h} + \sum_{i \in I_\mathrm{A}} \bar{\lambda}_{ih} \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{gih} = \bar{\boldsymbol{\varphi}}_g + \delta \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{gh} \tag{9.11.12}$$

とかく．

上記の定義において，探索ベクトルの誤差は式 (9.11.11) と式 (9.11.12) のそれぞれ $\delta\varphi_{gh}$ と $\delta\bar{\varphi}_{gh}$ によって与えられる．そこで，本節の目標は，それらのノルムに対する h のオーダー評価をおこなうことである．その結果が得られれば，探索ベクトルに対する数値解の厳密解への収束が保証されるような基底関数の次数の選び方が明らかになる．ここでは，次の仮定を設けることにする．

仮定 9.11.1 (φ_g と $\bar{\varphi}_g$ の誤差評価)

$q_{\mathrm{R}} > d$ および $k_1, k_2, j \in \{1, 2, \ldots\}$ に対して次のことを仮定する．

1. 状態決定問題と f_0, f_{i_1}, ... , $f_{i_{|I_{\mathrm{A}}|}}$ に対する随伴問題の厳密解 u と v_0, v_{i_1}, ... , $v_{i_{|I_{\mathrm{A}}|}}$ の同次形は，

$$\mathcal{S} = U \cap W^{\max\{k_1,k_2\}+1, 2q_{\mathrm{R}}}(D; \mathbb{R}) \tag{9.11.13}$$

の要素とする．この仮定が成り立つように，仮定 9.5.1, 仮定 9.6.1, 仮定 9.5.2, 仮定 9.6.2 および仮定 9.5.3 を修正する．また，$\partial\Omega$ は $H^2 \cap C^{0,1}$ 級 ($\tilde{\Gamma}_0 = \Gamma_{p0} \cup \Gamma_{\eta 00} \cup \Gamma_{\eta 10} \cup \cdots \cup \Gamma_{\eta m0}$ は区分的に $H^3 \cap C^{1,1}$ 級) として，ϕ の線形空間を $X_1 = X \cap W^{1,q_{\mathrm{R}}}\left(D; \mathbb{R}^d\right)$ とおく．

2. 関数の形状微分公式を用いたとき，評価関数 f_i の被積分関数は，$i \in I_{\mathrm{A}} \cup \{0\}$ に対して

$$\zeta_{iu\boldsymbol{\nabla} u} \in C^0 \left(\mathcal{D} \times \mathcal{S} \times \mathcal{G}; L^\infty \left(D; \mathbb{R}^d\right)\right), \tag{9.11.14}$$

$$\zeta_{i\boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{\nabla} u)^\top} \in C^0 \left(\mathcal{D} \times \mathcal{S} \times \mathcal{G}; L^\infty \left(D; \mathbb{R}^{d\times d}\right)\right) \tag{9.11.15}$$

とする．

3. $i \in I_{\mathrm{A}} \cup \{0\}$ に対して

$$\left\|\delta u_h\right\|_{W^{j,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})} \leq c_1 h^{k_1+1-j} \left|u\right|_{W^{k_1+1,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})}, \tag{9.11.16}$$

$$\left\|\delta v_{ih}\right\|_{W^{j,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})} \leq c_2 h^{k_1+1-j} \left|v_i\right|_{W^{k_1+1,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})}, \tag{9.11.17}$$

$$\left\|\delta \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{gih}\right\|_{W^{j,2q_{\mathrm{R}}}\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)} \leq c_3 h^{k_2+1-j} \left|\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{gi}\right|_{W^{k_2+1,2q_{\mathrm{R}}}\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)}, \tag{9.11.18}$$

$$\left\|\delta \hat{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}_{gih}\right\|_{W^{j,2q_{\mathrm{R}}}\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)} \leq \bar{c}_3 h^{k_2+1-j} \left|\hat{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}_{gi}\right|_{W^{k_2+1,2q_{\mathrm{R}}}\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)} \tag{9.11.19}$$

を満たす h に依存しない正定数 c_1, c_2, c_3, $\bar{c}_3$ が存在する.

4. 式 (9.11.9) と式 (9.11.10) の係数行列 $\boldsymbol{A}_h$ と $\bar{\boldsymbol{A}}_h$ に対して，それぞれ

$$\left\|\boldsymbol{A}_h^{-1}\right\|_{\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_{\mathrm{A}}|\times|\mathcal{I}_{\mathrm{A}}|}} \leq c_4, \tag{9.11.20}$$

$$\left\|\bar{\boldsymbol{A}}_h^{-1}\right\|_{\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_{\mathrm{A}}|\times|\mathcal{I}_{\mathrm{A}}|}} \leq \bar{c}_4 \tag{9.11.21}$$

を満たす正定数 c_4 と $\bar{c}_4$ が存在する．ただし，$\|\cdot\|_{\mathbb{R}^{|\mathcal{I}_{\mathrm{A}}|\times|\mathcal{I}_{\mathrm{A}}|}}$ は行列のノルム (式 (4.4.3) 参照) を表す．

仮定 9.11.1 の (1) は，$k_1 \in \{1, 2, \ldots\}$ なので，式 (9.5.2) で定義された $\mathcal{S}$ よりも強い条件になっている．その理由は，仮定 9.11.1 の (3) において，式 (9.11.16) と式 (9.11.17) の右辺で u と v_0, v_{i_1}, . . . , $v_{i_{|I_{\mathrm{A}}|}}$ が $W^{k_1+1,2q_{\mathrm{R}}}$ 級に入ることを必要とするためである．仮定 9.11.1 の (3) は系 6.6.4 に基づいている．仮定 9.11.1 の (4) は $\boldsymbol{g}_{i_1}$, . . . , $\boldsymbol{g}_{i_{|I_{\mathrm{A}}|}}$ が 1 次独立のときに成り立つ条件になっている．

このとき，のちに示される定理 9.11.5 の結果が得られる．この結果を示すために，次の四つの補題が使われる．

補題 9.11.2 (g_i と $\bar{g}_i$ の誤差評価)

仮定 9.11.1 の (1), (2) および式 (9.11.16) と式 (9.11.17) が満たされているとき，任意の $\varphi \in X_1$ に対して，

$$\langle \delta \boldsymbol{g}_{ih}, \boldsymbol{\varphi} \rangle \leq c_5 h^{k_1 - 1} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{X_1}, \tag{9.11.22}$$

$$\langle \delta \bar{\boldsymbol{g}}_{ih}, \boldsymbol{\varphi} \rangle \leq \bar{c}_5 h^{k_1 - 1} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{X_1} \tag{9.11.23}$$

を満たす h に依存しない正定数 c_5 と $\bar{c}_5$ が存在する．ただし，$\delta \boldsymbol{g}_{ih}$ と $\delta \bar{\boldsymbol{g}}_{ih}$ はそれぞれ 式 (9.11.3) と式 (9.11.4) で定義される．さらに，仮定 9.8.3 の (3) が満たされているとき，

$$\langle \delta \boldsymbol{g}_{ih}, \boldsymbol{\varphi} \rangle \leq c_5 h^{k_1} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{X_1} \tag{9.11.24}$$

が成り立つ．

証明　関数の形状微分公式を用いた $\boldsymbol{g}_i$ の数値誤差 $\delta\boldsymbol{g}_{ih}$ は，δu_h と δv_{ih} による数値誤差である．そこで，式 (9.8.5) より，

$$|\langle\delta\boldsymbol{g}_{ih},\boldsymbol{\varphi}\rangle| \leq \left|\mathscr{L}_{i\boldsymbol{\phi}'uv_i}\left(\boldsymbol{\phi},u,v_i\right)\left[\boldsymbol{\varphi},\delta u_h,\delta v_{ih}\right]\right| \tag{9.11.25}$$

が成り立つ．式 (9.11.25) の右辺に対して Hölder の不等式 (定理 A.9.1)，Poincaré の不等式の系 (系 A.9.4) およびトレース定理 (定理 4.4.2) を用いれば，

$$\begin{aligned}&\left|\mathscr{L}_{i\boldsymbol{\phi}'uv_i}\left(\boldsymbol{\phi},u,v_i\right)\left[\boldsymbol{\varphi},\delta u_h,\delta v_{ih}\right]\right|\\&\quad\leq\left\|\delta\boldsymbol{G}_{\Omega ih}\right\|_{L^{q_{\mathrm{R}}}\left(\Omega;\mathbb{R}^{d\times d}\right)}\left\|\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{\top}\right\|_{L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^{d\times d}\right)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \left\|\delta g_{\Omega ih}\right\|_{L^{q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})} \left\|\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}\right\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R})} \\
&+ \left\|\delta \boldsymbol{g}_{\zeta bih}\right\|_{L^{q_{\mathrm{R}}}\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)} \left\|\boldsymbol{\varphi}\right\|_{L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)} \\
&+ \left\|\delta \boldsymbol{g}_{pih}\right\|_{L^\infty\left(\Gamma_p;\mathbb{R}^d\right)} \left\|\boldsymbol{\varphi}\right\|_{L^2\left(\Gamma_p;\mathbb{R}^d\right)} \\
&+ \left\|\delta \boldsymbol{g}_{\partial pih}\right\|_{L^\infty\left(\partial\Gamma_p\cup\Theta_p;\mathbb{R}^d\right)} \left\|\boldsymbol{\varphi}\right\|_{L^2\left(\partial\Gamma_p\cup\Theta_p;\mathbb{R}^d\right)} \\
&+ \left\|\delta \boldsymbol{g}_{\eta ih}\right\|_{L^\infty\left(\Gamma_{\eta i};\mathbb{R}^d\right)} \left\|\boldsymbol{\varphi}\right\|_{L^2\left(\Gamma_{\eta i};\mathbb{R}^d\right)} \\
&+ \left\|\delta \boldsymbol{g}_{\partial\eta ih}\right\|_{L^\infty\left(\partial\Gamma_{\eta i}\cup\Theta_{\eta i};\mathbb{R}^d\right)} \left\|\boldsymbol{\varphi}\right\|_{L^2\left(\partial\Gamma_{\eta i}\cup\Theta_{\eta i};\mathbb{R}^d\right)} \\
\leq &\Big\{ \left\|\delta \boldsymbol{G}_{\Omega ih}\right\|_{L^\infty\left(\Omega;\mathbb{R}^{d\times d}\right)} + \left\|\delta g_{\Omega ih}\right\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R})} + \left\|\delta \boldsymbol{g}_{\zeta bih}\right\|_{L^\infty\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)} \\
&\quad + \left\|\gamma_{\partial\Omega}\right\| \Big(\left\|\delta \boldsymbol{g}_{pih}\right\|_{L^\infty\left(\Gamma_p;\mathbb{R}^d\right)} + \left\|\gamma_{\partial\Gamma_p}\right\| \left\|\delta \boldsymbol{g}_{\partial pih}\right\|_{L^\infty\left(\partial\Gamma_p\cup\Theta_p;\mathbb{R}^d\right)}
\end{aligned}
$$

$$
+ \left\| \delta \boldsymbol{g}_{\eta i h} \right\|_{L^\infty\left(\Gamma_{\eta i}; \mathbb{R}^d\right)} + \left\| \gamma_{\partial \Gamma_{\eta i}} \right\| \left\| \delta \boldsymbol{g}_{\partial \eta i h} \right\|_{L^\infty\left(\partial \Gamma_{\eta i} \cup \Theta_{\eta i}; \mathbb{R}^d\right)} \Bigg) \Bigg\} \| \boldsymbol{\varphi} \|_{X_1}
\tag{9.11.26}
$$

が成り立つ．ただし，$\|\gamma_{\partial\Omega}\|$, $\left\|\gamma_{\partial\Gamma_p}\right\|$ および $\left\|\gamma_{\partial\Gamma_{\eta i}}\right\|$ はそれぞれ $\boldsymbol{\varphi} \in X_1$ に対するトレース作用素

$$
\begin{aligned}
\gamma_{\partial\Omega} &: W^{1,q_{\mathrm{R}}}\left(\Omega; \mathbb{R}^d\right) \to W^{1-1/q_{\mathrm{R}}, q_{\mathrm{R}}}\left(\partial\Omega; \mathbb{R}^d\right), \\
\gamma_{\partial\Gamma_p} &: W^{1-1/q_{\mathrm{R}}, q_{\mathrm{R}}}\left(\partial\Omega; \mathbb{R}^d\right) \to W^{1-2/q_{\mathrm{R}}, q_{\mathrm{R}}}\left(\partial\Gamma_p \cup \Theta_p; \mathbb{R}^d\right), \\
\gamma_{\partial\Gamma_{\eta i}} &: W^{1-1/q_{\mathrm{R}}, q_{\mathrm{R}}}\left(\partial\Omega; \mathbb{R}^d\right) \to W^{1-2/q_{\mathrm{R}}, q_{\mathrm{R}}}\left(\partial\Gamma_{\eta i} \cup \Theta_{\eta i}; \mathbb{R}^d\right)
\end{aligned}
$$

のノルムを表す．これらは，仮定 9.11.1 の (1) において $\partial\Omega$ は $H^2 \cap C^{0,1}$ 級が仮定されたので，トレース定理によりこれらは有界となる．また，

$$
\begin{aligned}
&\left\|\delta \boldsymbol{G}_{\Omega ih}\right\|_{L^{q_{\mathrm{R}}}\left(\Omega;\mathbb{R}^{d\times d}\right)} \\
&\quad \leq 2\Big(\left\|\boldsymbol{\nabla}\delta u_h\right\|_{L^{2q_{\mathrm{R}}}\left(\Omega;\mathbb{R}^{d}\right)} \left\|\boldsymbol{\nabla} v_i\right\|_{L^{2q_{\mathrm{R}}}\left(\Omega;\mathbb{R}^{d}\right)} \\
&\qquad + \left\|\boldsymbol{\nabla} u\right\|_{L^{2q_{\mathrm{R}}}\left(\Omega;\mathbb{R}^{d}\right)} \left\|\boldsymbol{\nabla}\delta v_{ih}\right\|_{L^{2q_{\mathrm{R}}}\left(\Omega;\mathbb{R}^{d}\right)}\Big) \\
&\qquad + \left\|\zeta_{iu\boldsymbol{\nabla} u}\right\|_{L^{\infty}\left(\Omega;\mathbb{R}^{d}\right)} \left\|\delta u_h\right\|_{L^{2q_{\mathrm{R}}}\left(\Omega;\mathbb{R}\right)} \left\|\boldsymbol{\nabla} u\right\|_{L^{2q_{\mathrm{R}}}\left(\Omega;\mathbb{R}^{d}\right)} \\
&\qquad + \left\|\zeta_{i\boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{\nabla} u)^{\top}}\right\|_{L^{\infty}\left(\Omega;\mathbb{R}^{d\times d}\right)} \left\|\boldsymbol{\nabla}\delta u_h\right\|_{L^{2q_{\mathrm{R}}}\left(\Omega;\mathbb{R}^{d}\right)} \left\|\boldsymbol{\nabla} u\right\|_{L^{2q_{\mathrm{R}}}\left(\Omega;\mathbb{R}^{d}\right)} \\
&\qquad + \left\|\zeta_{i(\boldsymbol{\nabla} u)^{\top}}\right\|_{W^{1,2q_{\mathrm{R}}}\left(\Omega;\mathbb{R}^{d}\right)} \left\|\boldsymbol{\nabla}\delta u_h\right\|_{L^{2q_{\mathrm{R}}}\left(\Omega;\mathbb{R}^{d}\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2\Big(\|\delta u_h\|_{W^{1,2q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R})} \|v_i\|_{W^{1,2q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R})} \\
&\quad + \|u\|_{W^{1,2q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R})} \|\delta v_{ih}\|_{W^{1,2q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R})}\Big) \\
&\quad + \|\zeta_{iu\boldsymbol{\nabla}u}\|_{L^\infty\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)} \|\delta u_h\|_{W^{1,2q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R})} \|u\|_{W^{1,2q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R})} \\
&\quad + \left\|\zeta_{i\boldsymbol{\nabla}u(\boldsymbol{\nabla}u)^\top}\right\|_{L^\infty\left(\Omega;\mathbb{R}^{d\times d}\right)} \|\delta u_h\|_{W^{1,2q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R})} \|u\|_{W^{1,2q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R})} \\
&\quad + \left\|\zeta_{i(\boldsymbol{\nabla}u)^\top}\right\|_{W^{1,2q_\mathrm{R}}\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)} \|\delta u_h\|_{W^{1,2q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R})}, \qquad (9.11.27)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\|\delta g_{\Omega ih}\|_{L^{q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R})} \\
&\quad \leq \|\zeta_{iu}\|_{L^{2q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R})} \|\delta u_h\|_{L^{2q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R})} \\
&\quad + \left\|\zeta_{i(\boldsymbol{\nabla}u)^\top}\right\|_{L^{2q_\mathrm{R}}\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)} \|\boldsymbol{\nabla}\delta u_h\|_{L^{2q_\mathrm{R}}\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \|\boldsymbol{\nabla}\delta u_h\|_{L^{2q_\mathrm{R}}\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)} \|\boldsymbol{\nabla} v_i\|_{L^{2q_\mathrm{R}}\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)} \\
&+ \|\boldsymbol{\nabla} u\|_{L^{2q_\mathrm{R}}\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)} \|\boldsymbol{\nabla}\delta v_{ih}\|_{L^{2q_\mathrm{R}}\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)} \\
&+ \|b\|_{L^{2q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R})} \|\delta v_{ih}\|_{L^{2q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R})} \\
\leq\ & \|\zeta_{iu}\|_{L^{2q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R})} \|\delta u_h\|_{W^{1,2q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R})} \\
&+ \left\|\zeta_{i(\boldsymbol{\nabla} u)^\top}\right\|_{L^{2q_\mathrm{R}}\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)} \|\delta u_h\|_{W^{1,2q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R})} \\
&+ \|\delta u_h\|_{W^{1,2q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R})} \|v_i\|_{W^{1,2q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R})} \\
&+ \|u\|_{W^{1,2q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R})} \|\delta v_{ih}\|_{W^{1,2q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R})} \\
&+ \|b\|_{L^{2q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R})} \|\delta v_{ih}\|_{W^{1,2q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R})} \,, \qquad (9.11.28)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left\|\delta \boldsymbol{g}_{\zeta bih}\right\|_{L^{q_{\mathrm{R}}}\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)} \\
&\quad \leq \left\|b'\right\|_{L^{2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})} \left\|\delta v_{ih}\right\|_{L^{2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})} \leq \left\|b'\right\|_{W^{1,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})} \left\|\delta v_{ih}\right\|_{W^{1,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})} ,
\end{aligned} \tag{9.11.29}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left\|\delta \boldsymbol{g}_{pih}\right\|_{L^{\infty}\left(\Gamma_p;\mathbb{R}^d\right)} \\
&\quad \leq \left\|\kappa\right\|_{C^0(\Gamma_p;\mathbb{R})} \left\|\boldsymbol{\nu}\right\|_{L^{\infty}\left(\Gamma_p;\mathbb{R}^d\right)} \left\|p_{\mathrm{N}}\right\|_{L^{2q_{\mathrm{R}}}(\Gamma_p;\mathbb{R})} \left\|\delta v_{ih}\right\|_{L^{2q_{\mathrm{R}}}(\Gamma_p;\mathbb{R})} \\
&\qquad + (d-1) \max_{i\in\{1,\ldots,d-1\}} \left\|\boldsymbol{\tau}_i\right\|_{L^{\infty}\left(\Gamma_p;\mathbb{R}^d\right)} \Big(\left\|\boldsymbol{\nabla} p_{\mathrm{N}}\right\|_{L^{2q_{\mathrm{R}}}\left(\Gamma_p;\mathbb{R}^d\right)} \left\|\delta v_{ih}\right\|_{L^{2q_{\mathrm{R}}}(\Gamma_p;\mathbb{R})} \\
&\qquad\quad + \left\|p_{\mathrm{N}}\right\|_{L^{2q_{\mathrm{R}}}(\Gamma_p;\mathbb{R})} \left\|\boldsymbol{\nabla} \delta v_{ih}\right\|_{L^{2q_{\mathrm{R}}}\left(\Gamma_p;\mathbb{R}^d\right)} \Big) + \left\|p_{\mathrm{N}}'\right\|_{L^{2q_{\mathrm{R}}}(\Gamma_p;\mathbb{R})} \left\|\delta v_{ih}\right\|_{L^{2q_{\mathrm{R}}}(\Gamma_p;\mathbb{R})} \\
&\quad \leq \left\|\kappa\right\|_{C^0(\Gamma_p;\mathbb{R})} \left\|\boldsymbol{\nu}\right\|_{L^{\infty}\left(\Gamma_p;\mathbb{R}^d\right)} \left\|\gamma_{\partial\Omega}\right\|^2 \left\|p_{\mathrm{N}}\right\|_{W^{1,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})} \left\|\delta v_{ih}\right\|_{W^{1,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ (d-1) \max_{i \in \{1,\dots,d-1\}} \|\boldsymbol{\tau}_i\|_{L^\infty\left(\Gamma_p;\mathbb{R}^d\right)} \|\gamma_{\partial\Omega}\|^2 \\
&\quad \times \left(\|p_{\mathrm{N}}\|_{W^{2,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})} \|\delta v_{ih}\|_{W^{1,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})} + \|p_{\mathrm{N}}\|_{W^{1,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})} \|\delta v_{ih}\|_{W^{2,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})} \right) \\
&+ \|\gamma_{\partial\Omega}\|^2 \|p'_{\mathrm{N}}\|_{W^{1,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})} \|\delta v_{ih}\|_{W^{1,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})}, \qquad (9.11.30)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\|\delta \boldsymbol{g}_{\partial pih}\|_{L^\infty\left(\partial\Gamma_p \cup \Theta_p;\mathbb{R}^d\right)} \\
&\quad \le \|\boldsymbol{\tau}\|_{L^\infty\left(\partial\Gamma_p \cup \Theta_p;\mathbb{R}^d\right)} \|p_{\mathrm{N}}\|_{L^{2q_{\mathrm{R}}}(\partial\Gamma_p \cup \Theta;\mathbb{R})} \|\delta v_{ih}\|_{L^{2q_{\mathrm{R}}}(\partial\Gamma_p \cup \Theta_p;\mathbb{R})} \\
&\quad \le \|\boldsymbol{\tau}\|_{L^\infty\left(\partial\Gamma_p \cup \Theta_p;\mathbb{R}^d\right)} \|\gamma_{\partial\Omega}\|^2 \|\gamma_{\partial\Gamma}\|^2 \|p_{\mathrm{N}}\|_{W^{1,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})} \|\delta v_{ih}\|_{W^{1,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})} \\
&\qquad (9.11.31)
\end{aligned}
$$

となる．$\|\delta \boldsymbol{g}_{\eta ih}\|_{L^\infty(\Gamma_{\eta i};\mathbb{R}^d)}$ と $\|\delta \boldsymbol{g}_{\partial\eta ih}\|_{L^\infty(\partial\Gamma_{\eta i}\cup\Theta_{\eta i};\mathbb{R}^d)}$ についても同様の結果を得る．ここで，仮定 9.11.1 の (1) と (2) が満たされていれば，δ がつかない項はすべて有界となる．また，δ のついた項に注目すれば，式 (9.11.30) に $\|\delta v_{ih}\|_{W^{2,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R}^d)}$ を含む項が存在する．同様に，$\|\delta \boldsymbol{g}_{\eta ih}\|_{L^\infty(\Gamma_{\eta i};\mathbb{R}^d)}$ に対する不等式には，$\|\delta u_h\|_{W^{2,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})}$ を含む項が存在する．そこで，$j=2$ とおいた式 (9.11.16) と式 (9.11.17) を δ のついた項に代入すれば，それらの項は有界となる．そこで，式 (9.11.22) が得られる．

さらに，仮定 9.8.3 の (3) (式 (9.8.9) から式 (9.8.13) がゼロ，あるいは式 (9.1.1) において $\tilde{\Gamma}_0=\Gamma_{p0}\cup\Gamma_{\eta i0}\subset\bar{\Omega}_{\mathrm{C0}}$) が満たされていれば，$\tau$ のノルムがついた項はなくなる．そこで，$\|\delta u_h\|_{W^{2,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})}$ と $\|\delta v_{ih}\|_{W^{2,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R}^d)}$ を含む

項はなくなり，$j=1$ とおいた式 (9.11.16) と式 (9.11.17) を δ のついたすべての項に代入することができて，式 (9.11.24) が得られる．

一方，関数の形状偏微分公式を用いた $\bar{\boldsymbol{g}}_i$ の数値誤差 $\delta\bar{\boldsymbol{g}}_{ih}$ は，式 (9.8.35) より，

$$\left|\langle\delta\bar{\boldsymbol{g}}_{ih},\boldsymbol{\varphi}\rangle\right| \leq \left|\mathscr{L}_{i\boldsymbol{\phi}^* uv_i}\left(\boldsymbol{\phi},u,v_i\right)\left[\boldsymbol{\varphi},\delta u_h,\delta v_{ih}\right]\right| \tag{9.11.32}$$

を満たす．式 (9.11.32) の右辺に対して Hölder の不等式 (定理 A.9.1)，Poincaré の不等式の系 (系 A.9.4) およびトレース定理 (定理 4.4.2) を用いれば，

$$\left|\mathscr{L}_{i\boldsymbol{\phi}^* uv_i}\left(\boldsymbol{\phi},u,v_i\right)\left[\boldsymbol{\varphi},\delta u_h,\delta v_{ih}\right]\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left\| \delta \bar{\boldsymbol{g}}_{\zeta b i h} \right\|_{L^{q_{\mathrm{R}}}\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)} \left\| \boldsymbol{\varphi} \right\|_{L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)} \\
&\quad + \left\| \delta \bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\Omega i h} \right\|_{L^{\infty}\left(\partial\Omega;\mathbb{R}^d\right)} \left\| \boldsymbol{\varphi} \right\|_{L^2\left(\partial\Omega;\mathbb{R}^d\right)} \\
&\quad + \left\| \delta \bar{\boldsymbol{g}}_{p i h} \right\|_{L^{\infty}\left(\Gamma_p;\mathbb{R}^d\right)} \left\| \boldsymbol{\varphi} \right\|_{L^2\left(\Gamma_p;\mathbb{R}^d\right)} \\
&\quad + \left\| \delta \bar{\boldsymbol{g}}_{\partial p i h} \right\|_{L^{\infty}\left(\partial\Gamma_p \cup \Theta_p;\mathbb{R}^d\right)} \left\| \boldsymbol{\varphi} \right\|_{L^2\left(\partial\Gamma_p \cup \Theta_p;\mathbb{R}^d\right)} \\
&\quad + \left\| \delta \bar{\boldsymbol{g}}_{\eta i h} \right\|_{L^{\infty}\left(\Gamma_{\eta i};\mathbb{R}^d\right)} \left\| \boldsymbol{\varphi} \right\|_{L^2\left(\Gamma_{\eta i};\mathbb{R}^d\right)} \\
&\quad + \left\| \delta \bar{\boldsymbol{g}}_{\partial \eta i h} \right\|_{L^{\infty}\left(\partial\Gamma_{\eta i} \cup \Theta_{\eta i};\mathbb{R}^d\right)} \left\| \boldsymbol{\varphi} \right\|_{L^2\left(\partial\Gamma_{\eta i} \cup \Theta_{\eta i};\mathbb{R}^d\right)} \\
&\quad + \left\| \delta \bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{D} h} \right\|_{L^{\infty}\left(\Gamma_{\mathrm{D}};\mathbb{R}^d\right)} \left\| \boldsymbol{\varphi} \right\|_{L^2\left(\Gamma_{\mathrm{D}};\mathbb{R}^d\right)} \\
&\leq \Bigg\{ \left\| \delta \bar{\boldsymbol{g}}_{\zeta b i h} \right\|_{L^{q_{\mathrm{R}}}\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)} + \left\| \gamma_{\partial\Omega} \right\|^2 \Bigg(\left\| \delta \bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\Omega i h} \right\|_{L^{\infty}\left(\partial\Omega;\mathbb{R}^d\right)} + \left\| \delta \bar{\boldsymbol{g}}_{p i h} \right\|_{L^{\infty}\left(\Gamma_p;\mathbb{R}^d\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \|\gamma_{\partial\Gamma}\| \|\delta\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial p ih}\|_{L^\infty(\partial\Gamma_p \cup \Theta_p;\mathbb{R}^d)} + \|\delta\bar{\boldsymbol{g}}_{\eta ih}\|_{L^\infty(\Gamma_{\eta i};\mathbb{R}^d)} \\
&+ \|\gamma_{\partial\Gamma}\| \|\delta\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\eta ih}\|_{L^\infty(\partial\Gamma_{\eta i} \cup \Theta_{\eta i};\mathbb{R}^d)} + \|\delta\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{D}h}\|_{L^\infty(\Gamma_{\mathrm{D}};\mathbb{R}^d)} \Big) \Big\} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{X_1}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ただし，

$$
\|\delta\bar{\boldsymbol{g}}_{\zeta bih}\|_{L^{q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R}^d)} \leq \|b\|_{W^{1,2q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R})} \|\delta v_{ih}\|_{W^{2,2q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R})}
$$

$$
\begin{aligned}
&\|\delta\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\Omega ih}\|_{L^\infty(\partial\Omega;\mathbb{R}^d)} \\
&\quad \leq \Big(\|\zeta_{iu}\|_{L^{2q_\mathrm{R}}(\partial\Omega;\mathbb{R})} \|\delta u_h\|_{L^{2q_\mathrm{R}}(\partial\Omega;\mathbb{R})} \\
&\qquad + \|\boldsymbol{\nabla}\delta u_h\|_{L^{2q_\mathrm{R}}(\partial\Omega;\mathbb{R}^d)} \|\boldsymbol{\nabla} v_i\|_{L^{2q_\mathrm{R}}(\partial\Omega;\mathbb{R}^d)} \\
&\qquad + \|\boldsymbol{\nabla} u\|_{L^{2q_\mathrm{R}}(\partial\Omega;\mathbb{R}^d)} \|\boldsymbol{\nabla}\delta v_{ih}\|_{L^{2q_\mathrm{R}}(\partial\Omega;\mathbb{R}^d)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad + \|b\|_{L^{2q_{\mathrm{R}}}(\partial\Omega;\mathbb{R})} \|\delta u_h\|_{L^{2q_{\mathrm{R}}}(\partial\Omega;\mathbb{R})} \Big) \|\boldsymbol{\nu}\|_{L^{\infty}\left(\partial\Omega;\mathbb{R}^d\right)} \\
&\leq \Big(\|\zeta_{iu}\|_{W^{1,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})} \|\delta u_h\|_{W^{1,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})} \\
&\qquad + \|\delta u_h\|_{W^{2,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})} \|v_i\|_{W^{2,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})} \\
&\qquad + \|u\|_{W^{2,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})} \|\delta v_{ih}\|_{W^{2,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})} \\
&\qquad + \|b\|_{W^{1,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})} \|\delta u_h\|_{W^{1,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})} \Big) \|\boldsymbol{\nu}\|_{L^{\infty}\left(\partial\Omega;\mathbb{R}^d\right)} ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\|\delta\bar{\boldsymbol{g}}_{pih}\|_{L^{\infty}\left(\Gamma_p;\mathbb{R}^d\right)} \\
&\quad\leq \|\kappa\|_{C^0(\Gamma_p;\mathbb{R})} \|\boldsymbol{\nu}\|_{L^{\infty}\left(\Gamma_p;\mathbb{R}^d\right)} \|p_{\mathrm{N}}\|_{L^{2q_{\mathrm{R}}}(\Gamma_p;\mathbb{R})} \|\delta v_{ih}\|_{L^{2q_{\mathrm{R}}}(\Gamma_p;\mathbb{R})} \\
&\qquad + \|\boldsymbol{\nu}\|^2_{L^{\infty}\left(\Gamma_p;\mathbb{R}^d\right)} \Big(\|\boldsymbol{\nabla} p_{\mathrm{N}}\|_{L^{2q_{\mathrm{R}}}\left(\Gamma_p;\mathbb{R}^d\right)} \|\delta v_{ih}\|_{L^{2q_{\mathrm{R}}}(\Gamma_p;\mathbb{R})}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad + \|p_{\mathrm{N}}\|_{L^{2q_{\mathrm{R}}}(\Gamma_p;\mathbb{R})} \|\boldsymbol{\nabla}\delta v_{ih}\|_{L^{2q_{\mathrm{R}}}\left(\Gamma_p;\mathbb{R}^d\right)}\Big) \\
&\quad + \|p_{\mathrm{N}}^{*}\|_{L^{2q_{\mathrm{R}}}(\Gamma_p;\mathbb{R})} \|\delta v_{ih}\|_{L^{2q_{\mathrm{R}}}(\Gamma_p;\mathbb{R})} \\
&\leq \|\kappa\|_{C^0(\Gamma_p;\mathbb{R})} \|\boldsymbol{\nu}\|_{L^\infty\left(\Gamma_p;\mathbb{R}^d\right)} \|\gamma_{\partial\Omega}\|^2 \|p_{\mathrm{N}}\|_{W^{1,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})} \|\delta v_{ih}\|_{W^{1,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})} \\
&\quad + \|\boldsymbol{\nu}\|^2_{L^\infty\left(\Gamma_p;\mathbb{R}^d\right)} \|\gamma_{\partial\Omega}\|^2 \Big(\|p_{\mathrm{N}}\|_{W^{2,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})} \|\delta v_{ih}\|_{W^{1,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})} \\
&\qquad + \|p_{\mathrm{N}}\|_{W^{1,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})} \|\delta v_{ih}\|_{W^{2,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})}\Big) \\
&\quad + \|\gamma_{\partial\Omega}\|^2 \|p_{\mathrm{N}}^{*}\|_{W^{1,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})} \|\delta v_{ih}\|_{W^{1,2q_{\mathrm{R}}}(\Omega;\mathbb{R})}\,, \\
&\|\delta\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial pih}\|_{L^\infty\left(\partial\Gamma_p\cup\Theta_p;\mathbb{R}^d\right)} = \|\delta\boldsymbol{g}_{\partial pih}\|_{L^\infty\left(\partial\Gamma_p\cup\Theta_p;\mathbb{R}^d\right)}\,, \\
&\|\delta\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{D}h}\|_{L^\infty\left(\Gamma_{\mathrm{D}};\mathbb{R}^d\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|\boldsymbol{\nu}\|^2_{L^\infty\left(\Gamma_\mathrm{D};\mathbb{R}^d\right)} \Big(\|\boldsymbol{\nabla}\delta u_h\|_{L^{2q_\mathrm{R}}\left(\Gamma_\mathrm{D};\mathbb{R}^d\right)} \|\boldsymbol{\nabla} v_i\|_{L^{2q_\mathrm{R}}\left(\Gamma_\mathrm{D};\mathbb{R}^d\right)} \\
&\qquad + \|\boldsymbol{\nabla}\left(u - u_\mathrm{D}\right)\|_{L^{2q_\mathrm{R}}\left(\Gamma_\mathrm{D};\mathbb{R}^d\right)} \|\boldsymbol{\nabla}\delta v_{ih}\|_{L^{2q_\mathrm{R}}\left(\Gamma_\mathrm{D};\mathbb{R}^d\right)} \\
&\qquad + \|\boldsymbol{\nabla}\delta v_{ih}\|_{L^{2q_\mathrm{R}}\left(\Gamma_\mathrm{D};\mathbb{R}^d\right)} \|\boldsymbol{\nabla} u\|_{L^{2q_\mathrm{R}}\left(\Gamma_\mathrm{D};\mathbb{R}^d\right)} \\
&\qquad + \|\boldsymbol{\nabla}\left(v_i - v_{\mathrm{D}i}\right)\|_{L^{2q_\mathrm{R}}\left(\Gamma_\mathrm{D};\mathbb{R}^d\right)} \|\boldsymbol{\nabla}\delta u_h\|_{L^{2q_\mathrm{R}}\left(\Gamma_\mathrm{D};\mathbb{R}^d\right)} \Big) \\
&\leq \|\gamma_{\partial\Omega}\|^2 \|\boldsymbol{\nu}\|^2_{L^\infty\left(\Gamma_\mathrm{D};\mathbb{R}^d\right)} \Big(\|\delta u_h\|_{W^{2,2q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R})} \|v_i\|_{W^{2,2q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R})} \\
&\qquad + \|(u - u_\mathrm{D})\|_{W^{2,2q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R})} \|\delta v_{ih}\|_{W^{2,2q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R})} \\
&\qquad + \|\delta v_{ih}\|_{W^{2,2q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R})} \|u\|_{W^{2,2q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R})} \\
&\qquad + \|(v_i - v_{\mathrm{D}i})\|_{W^{2,2q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R})} \|\delta u_h\|_{W^{2,2q_\mathrm{R}}(\Omega;\mathbb{R})} \Big)
\end{aligned}
$$

となる．$\|\delta \bar{\boldsymbol{g}}_{\eta i h}\|_{L^\infty\left(\Gamma_{\eta i};\mathbb{R}^d\right)}$ と $\|\delta \bar{\boldsymbol{g}}_{\partial \eta i h}\|_{L^\infty\left(\partial\Gamma_{\eta i}\cup\Theta_{\eta i};\mathbb{R}^d\right)}$ についても同様の結果を得る．ここで，仮定 9.11.1 の (1) が満たされていれば，δ がつかない項はすべて有界となる．また，δ のついた項に，$j=2$ とおいた式 (9.11.16) と式 (9.11.17) を代入すれば，式 (9.11.23) が得られる． □

補題 9.11.3 (φ_{gi} と $\bar{\varphi}_{gi}$ の誤差評価)

仮定 9.11.1 の (1), (2) および式 (9.11.16) と式 (9.11.17) が満たされているとき，

$$\|\delta\boldsymbol{\varphi}_{gih}\|_{X_1} \leq c_6 h^{\min\{k_1-1,k_2\}}, \tag{9.11.33}$$

$$\|\delta\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{gih}\|_{X_1} \leq \bar{c}_6 h^{\min\{k_1-1,k_2\}} \tag{9.11.34}$$

を満たす h に依存しない正定数 c_6 と $\bar{c}_6$ が存在する．ただし，$\delta\boldsymbol{\varphi}_{gih}$ と $\delta\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{gih}$ はそれぞれ式 (9.11.7) と式 (9.11.8) で定義される．さらに，仮定 9.8.3 の (3) が満たされているとき，

$$\|\delta\boldsymbol{\varphi}_{gih}\|_{X_1} \leq c_6 h^{\min\{k_1,k_2\}} \tag{9.11.35}$$

が成り立つ．

証明　関数の形状微分公式を用いた場合には，式 (9.11.5) と式 (9.11.7) より，

$$\|\delta\boldsymbol{\varphi}_{gih}\|_{X_1} \leq \|\delta\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{gi}\|_{X_1} + \|\delta\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{gih}\|_{X_1} \tag{9.11.36}$$

が成り立つ．ただし，$\|\delta\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{gi}\|_{X_1}$ は補題 9.11.2 の $\delta\boldsymbol{g}_{ih}$ が H^1 勾配法 (たとえば，問題 9.9.3) の厳密解に及ぼす誤差を表し，$\|\delta\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{gih}\|_{X_1}$ は H^1 勾配法の数値解に対する誤差を表す．式 (9.11.36) の $\|\delta\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{gi}\|_{X_1}$ は，任意の $\boldsymbol{\varphi} \in X_1$ に対して，

$$a_X\left(\delta\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{gi}, \boldsymbol{\varphi}\right) = -\left\langle \delta\boldsymbol{g}_{ih}, \boldsymbol{\varphi}\right\rangle$$

を満たす．そこで，$\boldsymbol{\varphi} = \delta\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{gi}$ とおけば，

$$\alpha_X \|\delta\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{gi}\|_{X_1}^2 \leq \left|\left\langle \delta\boldsymbol{g}_{ih}, \delta\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{gi}\right\rangle\right| \tag{9.11.37}$$

が成り立つ．ただし，α_X は式 (9.9.1) で使われた正定数である．式 (9.11.37) の $\delta \boldsymbol{g}_{ih}$ に対して，補題 9.11.2 の式 (9.11.22) を用いれば，

$$\|\delta\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{gi}\|_{X_1} \leq \frac{c_5}{\alpha_X} h^{k_1-1} \tag{9.11.38}$$

が得られる．一方，$\|\delta\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{gih}\|_{X_1}$ は，$j=1$ とおいた式 (9.11.18) より，

$$\|\delta\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{gih}\|_{X_1} \leq \|\delta\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{gih}\|_{W^{1,2q_{\mathrm{R}}}\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)} \leq c_3 h^{k_2} \|\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{gi}\|_{W^{k_2+1,2q_{\mathrm{R}}}\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)} \tag{9.11.39}$$

を満たす．式 (9.11.39) において，$\|\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{gi}\|_{W^{k_2+1,2q_{\mathrm{R}}}\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)}$ は有界である．なぜならば，定理 9.9.6 の証明において，仮定 9.11.1 の (1) を用いれば，$\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{gi} \in W^{k_2+1,\infty}\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)$ が得られる．そこで，式 (9.11.38) と式 (9.11.39) を式 (9.11.36) に代入すれば，補題の式 (9.11.33) が得られる．

さらに，仮定 9.8.3 の (3) が満たされていれば，式 (9.11.37) の $\delta \boldsymbol{g}_{ih}$ に対して，補題 9.11.2 の式 (9.11.24) を適用できて，

$$\|\delta \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{gi}\|_{X_1} \leq \frac{c_5}{\alpha_X} h^{k_1} \tag{9.11.40}$$

が得られる．そこで，式 (9.11.40) と式 (9.11.39) を式 (9.11.36) に代入すれば補題の式 (9.11.35) が得られる．

式 (9.11.37) の $\delta \boldsymbol{g}_{ih}$ を $\delta \bar{\boldsymbol{g}}_{ih}$ に変更して，$\delta \bar{\boldsymbol{g}}_{ih}$ に対して補題 9.11.2 の式 (9.11.23) を用いれば，補題の式 (9.11.34) が得られる． □

補題 9.11.4 ($\boldsymbol{\lambda}_h$ と $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_h$ の誤差評価)

仮定 9.11.1 が満たされているとき，

$$\|\delta\boldsymbol{\lambda}_h\|_{\mathbb{R}^{|I_{\mathrm{A}}|}} \le c_7 h^{\min\{k_1-1,k_2\}}, \tag{9.11.41}$$

$$\left\|\delta\bar{\boldsymbol{\lambda}}_h\right\|_{\mathbb{R}^{|I_{\mathrm{A}}|}} \le \bar{c}_7 h^{\min\{k_1-1,k_2\}} \tag{9.11.42}$$

を満たす h に依存しない正定数 c_7 と $\bar{c}_7$ が存在する．ただし，$\boldsymbol{\lambda}_h$ と $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_h$ はそれぞれ式 (9.11.9) と式 (9.11.10) で定義される．さらに，仮定 9.8.3 の (3) が満たされているとき，

$$\|\delta\boldsymbol{\lambda}_h\|_{\mathbb{R}^{|I_{\mathrm{A}}|}} \le c_7 h^{\min\{k_1,k_2\}} \tag{9.11.43}$$

が成り立つ．

証明　関数の形状微分公式を用いた場合には，式 (9.11.9) の $\boldsymbol{\lambda}_h$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{\lambda}_h &= \boldsymbol{A}_h^{-1}\left(-\delta\boldsymbol{A}_h\boldsymbol{\lambda}+\delta\boldsymbol{b}_h\right)\\
&= \boldsymbol{A}_h^{-1}\Bigl\{-\Bigl(\left(\langle\delta\boldsymbol{g}_{ih},\boldsymbol{\varphi}_{gj}\rangle\right)_{(i,j)\in I_{\mathrm{A}}^2}-\left(\langle\boldsymbol{g}_i,\delta\boldsymbol{\varphi}_{gjh}\rangle\right)_{(i,j)\in I_{\mathrm{A}}^2}\Bigr)\boldsymbol{\lambda}\\
&\qquad +\left(\langle\delta\boldsymbol{g}_{ih},\boldsymbol{\varphi}_{g0}\rangle\right)_{i\in I_{\mathrm{A}}}+\left(\langle\boldsymbol{g}_i,\delta\boldsymbol{\varphi}_{g0h}\rangle\right)_{i\in I_{\mathrm{A}}}\Bigr\}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．そこで，式 (9.11.20) を用いれば，

$$
\begin{aligned}
\|\delta\boldsymbol{\lambda}_h\|_{\mathbb{R}^{|I_{\mathrm{A}}|}} &\le c_4\left(1+|I_{\mathrm{A}}|\max_{i\in I_{\mathrm{A}}}|\lambda_i|\right)\\
&\quad\times\max_{(i,j)\in I_{\mathrm{A}}\times(I_{\mathrm{A}}\cup\{0\})}\left(|\langle\delta\boldsymbol{g}_{ih},\boldsymbol{\varphi}_{gj}\rangle|+|\langle\boldsymbol{g}_i,\delta\boldsymbol{\varphi}_{gjh}\rangle|\right) \qquad (9.11.44)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．式 (9.11.44) の $|\langle \delta \boldsymbol{g}_{ih}, \boldsymbol{\varphi}_{gj} \rangle|$ について，補題 9.11.2 の式 (9.11.22) を用いれば，

$$|\langle \delta \boldsymbol{g}_{ih}, \boldsymbol{\varphi}_{gj} \rangle| \leq c_5 h^{k_1 - 1} \left\| \boldsymbol{\varphi}_{gj} \right\|_{X_1} \tag{9.11.45}$$

が成り立つ．また，$|\langle \boldsymbol{g}_i, \delta \boldsymbol{\varphi}_{gjh} \rangle|$ について，補題 9.11.3 の式 (9.11.33) より

$$|\langle \boldsymbol{g}_i, \delta \boldsymbol{\varphi}_{gjh} \rangle| \leq c_6 h^{k_1 - 1} \left\| \boldsymbol{g}_i \right\|_{X_1'} \tag{9.11.46}$$

が成り立つ．式 (9.11.46) において，$\left\| \boldsymbol{g}_i \right\|_{X_1'}$ は有界である．なぜならば，定理 9.8.2 より $\boldsymbol{g}_i \in X'$ が成り立ち，$X' \subset X_1'$ より $\left\| \boldsymbol{g}_i \right\|_{X_1'} \leq \left\| \boldsymbol{g}_i \right\|_{X'} < \infty$ が得られるからである．そこで，式 (9.11.45) と式 (9.11.46) を式 (9.11.44) に代入すれば，補題の式 (9.11.41) が得られる．

さらに，仮定 9.8.3 の (3) が満たされているときは，式 (9.11.45) の $\delta \boldsymbol{g}_{ih}$ に対して補題 9.11.2 の式 (9.11.24) を用いることで，補題の式 (9.11.43) が得られる．

式 (9.11.45) と式 (9.11.46) の $\delta \boldsymbol{g}_{ih}$ と $\delta \varphi_{gjh}$ をそれぞれ $\delta \bar{\boldsymbol{g}}_{ih}$ と $\delta \bar{\varphi}_{gjh}$ に変更して，さらに，定理 9.8.2 を定理 9.8.6 に変更して，補題 9.11.3 の式 (9.11.33) を式 (9.11.34) に変更すれば，補題の式 (9.11.42) が得られる．

□

これらの補題に基づいて，次の結果が得られる．

定理 9.11.5 (φ_g と $\bar{\varphi}_g$ の誤差評価)

仮定 9.11.1 が満たされているとき，

$$\|\delta\boldsymbol{\varphi}_{gh}\|_{X_1} \le ch^{\min\{k_1-1,k_2\}}, \tag{9.11.47}$$

$$\|\delta\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{gh}\|_{X_1} \le \bar{c}h^{\min\{k_1-1,k_2\}} \tag{9.11.48}$$

を満たす h に依存しない正定数 c と $\bar{c}$ が存在する．ただし，$\delta\boldsymbol{\varphi}_{gh}$ と $\delta\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{gh}$ はそれぞれ式 (9.11.11) と 式 (9.11.12) で定義される．さらに，仮定 9.8.3 の (3) が満たされているとき，

$$\|\delta\boldsymbol{\varphi}_{gh}\|_{X_1} \le ch^{\min\{k_1,k_2\}} \tag{9.11.49}$$

が成り立つ．

証明　式 (9.11.11) より

$$\delta\boldsymbol{\varphi}_{gh} = \delta\boldsymbol{\varphi}_{g0h} + \sum_{i\in I_{\mathrm{A}}} \left(\delta\lambda_{ih}\boldsymbol{\varphi}_{gi} + \lambda_i \delta\boldsymbol{\varphi}_{gih}\right) \tag{9.11.50}$$

が成り立つ．式 (9.11.50) より

$$\begin{aligned} \|\delta\boldsymbol{\varphi}_{gh}\|_{X_1} \leq & \left(1 + |I_{\mathrm{A}}| \max_{i\in I_{\mathrm{A}}} |\lambda_i|\right) \max_{i\in I_{\mathrm{A}}\cup\{0\}} \|\delta\boldsymbol{\varphi}_{gih}\|_{X_1} \\ & + \|\delta\boldsymbol{\lambda}_h\|_{\mathbb{R}^{|I_{\mathrm{A}}|}} \max_{i\in I_{\mathrm{A}}} \|\boldsymbol{\varphi}_{gi}\|_{X_1} \end{aligned} \tag{9.11.51}$$

が得られる．式 (9.11.51) に補題 9.11.3 の式 (9.11.33) と補題 9.11.4 の式 (9.11.41) を代入すれば，定理の式 (9.11.47) が得られる．

さらに，仮定 9.8.3 の (3) が満たされているときは，式 (9.11.51) に補題 9.11.3 の式 (9.11.35) と補題 9.11.4 の式 (9.11.43) を代入することで，定理の式 (9.11.49) が得られる．

式 (9.11.51) の $\delta\boldsymbol{\varphi}_{gih}$ と $\delta\boldsymbol{\lambda}_h$ をそれぞれ $\delta\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{gih}$ と $\delta\bar{\boldsymbol{\lambda}}_h$ に変更して，補題 9.11.3 の式 (9.11.34) と補題 9.11.4 の式 (9.11.42) を式 (9.11.51) に代入すれば，定理の式 (9.11.48) が得られる． □

定理 9.11.5 より，領域変動型形状最適化問題に対する有限要素解の誤差評価について次のことがいえる．

注意 9.11.6 (形状最適化問題に対する有限要素解の誤差評価)

定理 9.11.5 より，探索ベクトル φ_{gh} の誤差 $\|\delta\boldsymbol{\varphi}_{gh}\|_{X_1}$ が有限要素分割列 $\{\mathcal{T}_h\}_{h\to 0}$ に対して 1 次のオーダーで減少するためには，次の条件が満たされる必要がある．

仮定 9.11.1 が満たされているとき，

1. 状態決定問題と $f_0, f_{i_1}, \ldots, f_{i_{|I_\mathrm{A}|}}$ に対する随伴問題に対して，$k_1 = 2$ 次の基底関数による有限要素解を用いる．
2. 式 (9.8.5) の $\boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{g}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{g}_{i_{|I_\mathrm{A}|}}$ (関数の形状微分公式) あるいは式 (9.8.35) の $\bar{\boldsymbol{g}}_0, \bar{\boldsymbol{g}}_{i_1}, \ldots, \bar{\boldsymbol{g}}_{i_{|I_\mathrm{A}|}}$ (関数の形状偏微分公式) を用いた H^1 勾配法に対して，$k_2 = 1$ 次の基底関数による有限要素解を用いる．

注意 9.11.6 (形状最適化問題に対する有限要素解の誤差評価)

さらに，仮定 9.8.3 の (3) が満たされているならば，

1. 状態決定問題と $f_0, f_{i_1}, \ldots, f_{i_{|I_A|}}$ に対する随伴問題に対して，$k_1 = 1$ 次の基底関数による有限要素解を用いる．
2. 式 (9.8.5) の $\boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{g}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{g}_{i_{|I_A|}}$ (関数の形状微分公式) を用いた H^1 勾配法に対して，$k_2 = 1$ 次の基底関数による有限要素解を用いる．

9.12 線形弾性体の形状最適化問題

形状最適化問題の応用例として，線形弾性体の平均コンプライアンス最小化問題をとりあげて，評価関数の形状微分が得られるまでをみてみよう．ここでも，初期領域 Ω_0 に対する条件や $\Gamma_{\mathrm{D}0}$, $\Gamma_{\mathrm{N}0}$ および Γ_{p0} の定義，さらに，X および $\mathcal{D}$ の定義は 9.1 節と同様であるとする (図 9.15)．ただし，$\mathcal{D}$ については，より具体的に

$$\mathcal{D} = \left\{ \phi \in Y \;\middle|\; \begin{cases} |\phi|_{C^{0,1}\left(D;\mathbb{R}^d\right)} \leq \sigma, \\ \|\phi\|_{H^2\cap C^{0,1}\left(D;\mathbb{R}^d\right)} \leq \beta \quad (\Gamma_{p0} = \emptyset \text{ or } \Gamma_{p0} \subset \bar{\Omega}_{\mathrm{C}0}), \\ \|\phi\|_{H^3\cap C^{1,1}\left(D;\mathbb{R}^d\right)} \leq \beta \quad (\Gamma_{p0} \not\subset \bar{\Omega}_{\mathrm{C}0}) \end{cases} \right\} \tag{9.12.1}$$

とおく．

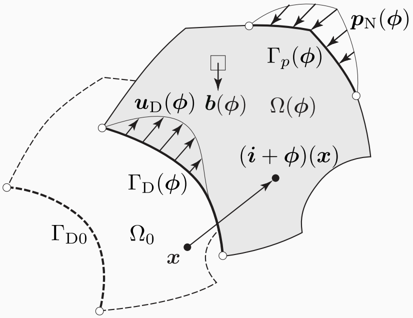


図 9.15: 線形弾性体の初期領域 $\Omega_0 \subset D$ と領域変動 (変位) ϕ

状態決定問題として線形弾性問題を定義する．ここでは，問題 5.4.2 で用いた記号を用いることにする．それに加えて，形状最適化問題のために定義を追加する．$\phi \in \mathcal{D}$ に対して，状態変数 (状態決定問題の解) $\boldsymbol{u}$ の線形空間 U を

$$U = \left\{ \boldsymbol{u} \in H^1\left(D; \mathbb{R}^d\right) \;\middle|\; \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \Gamma_{\mathrm{D}}(\phi) \right\} \tag{9.12.2}$$

とおく．式 (9.5.1) の U では値域が $\mathbb{R}$ であったが，式 (9.12.2) では $\mathbb{R}^d$ となっている点が異なっている．また，$\boldsymbol{u}$ が入る許容集合を

$$\mathcal{S} = U \cap W^{2,4}\left(D; \mathbb{R}^d\right) \tag{9.12.3}$$

とおく．本節でも，さらに必要となる正則性については，必要となったときに示すことにする．この正則性が満たされるようにするために，既知関数の正則性について，仮定 9.5.1 と仮定 9.5.2 において，関数が太文字に変更され，関数の値域が $\mathbb{R}^d$ に変更されたときの同様の仮定をもうけることにする．ただし，線形弾性問題においては，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})$ と $\boldsymbol{S}(\phi, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{C}(\phi)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})$ をそれぞれ式 (5.4.2) と式 (5.4.6) で定義された線形ひずみと応力として，剛性 $\boldsymbol{C}$ は楕円的 (式 (5.4.8)) かつ有界 (式 (5.4.9)) であるとする．上記の修正をした仮定 9.5.1 と仮定 9.5.2 において

$$\boldsymbol{C} \in C^1_{\mathrm{S}'}\left(B; C^{0,1}\left(D; \mathbb{R}^{d\times d\times d\times d}\right)\right) \tag{9.12.4}$$

が追加されるものとする．境界の正則性については，仮定 9.5.3 が用いられる．

以上の仮定を用いて，領域変動型線形弾性問題を次のように定義する．

問題 9.12.1 (領域変動型線形弾性問題)

$\phi \in \mathcal{D}$ に対して $\boldsymbol{b}(\phi)$, $\boldsymbol{p}_{\mathrm{N}}(\phi)$, $\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}(\phi)$ および $\boldsymbol{C}(\phi)$ が与えられたとき，

$$-\boldsymbol{\nabla}^{\top}\boldsymbol{S}(\phi,\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{b}^{\top}(\phi) \quad \text{in } \Omega(\phi), \tag{9.12.5}$$

$$\boldsymbol{S}(\phi,\boldsymbol{u})\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{p}_{\mathrm{N}}(\phi) \quad \text{on } \Gamma_p(\phi), \tag{9.12.6}$$

$$\boldsymbol{S}(\phi,\boldsymbol{u})\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{N}}(\phi) \setminus \bar{\Gamma}_p(\phi), \tag{9.12.7}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}(\phi) \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{D}}(\phi) \tag{9.12.8}$$

を満たす $\boldsymbol{u} : \Omega(\phi) \to \mathbb{R}^d$ を求めよ．

これ以降，$\boldsymbol{S}(\phi, \boldsymbol{u})$ を $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})$ とかくことにする．あとのために，線形弾性問題の弱形式 (問題 5.4.3) と Dirichlet 境界条件を参照して，問題 9.12.1 に対する Lagrange 関数を

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\phi, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = &\int_{\Omega(\phi)} \left(-\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v}\right) \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_p(\phi)} \boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\gamma \\ &+ \int_{\Gamma_{\mathrm{D}}(\phi)} \left\{(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot (\boldsymbol{S}(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{\nu}) + \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{\nu})\right\} \mathrm{d}\gamma \quad (9.12.9)\end{aligned}$$

と定義しておく．ただし，$\boldsymbol{u}$ は問題 9.12.1 の解とはかぎらないとする．$\boldsymbol{v}$ は Lagrange 乗数として導入された U の要素とする．このとき，$\boldsymbol{u}$ が問題 9.12.1 の解ならば，任意の $\boldsymbol{v} \in U$ に対して，

$$\mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\phi, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$$

が成り立つ．この式は問題 9.12.1 の弱形式と同値である．

§9.12.2 平均コンプライアンス最小化問題

線形弾性体の形状最適化問題を定義しよう．評価関数を次のように定義する．問題 9.12.1 の解 $\boldsymbol{u}$ に対して，

$$
\begin{aligned}
f_0(\phi, \boldsymbol{u}) &= \hat{l}(\phi)(\boldsymbol{u}) \\
&= \int_{\Omega(\phi)} \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u} \,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_p(\phi)} \boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} \cdot \boldsymbol{u} \,\mathrm{d}\gamma \\
&\quad - \int_{\Gamma_{\mathrm{D}}(\phi)} \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}} \cdot (\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{\nu}) \,\mathrm{d}\gamma
\end{aligned}
\tag{9.12.10}
$$

を平均コンプライアンスとよぶ．その意味は 8.9.2 項で説明されたとおりである．ここで，$\hat{l}(\phi)(\boldsymbol{u})$ は式 (5.2.3) で定義された $\hat{l}(\boldsymbol{u})$ が ϕ にも依存することを示している．また，

$$f_1(\phi) = \int_{\Omega(\phi)} \mathrm{d}x - c_1 \tag{9.12.11}$$

を領域の大きさに対する制約関数とよぶ．ただし，c_1 は，ある $\phi \in \mathcal{D}$ に対して $f_1(\phi) \leq 0$ が成り立つような正定数とする．

このとき，平均コンプライアンス最小化問題は次のように定義される．

問題 9.12.2 (平均コンプライアンス最小化問題)

$\mathcal{D}$ と $\mathcal{S}$ をそれぞれ式 (9.12.1) と式 (9.12.3) で定められるものとする．f_0 と f_1 を 式 (9.12.10) と 式 (9.12.11) とする．このとき，

$$\min_{(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}})\in\mathcal{D}\times\mathcal{S}} \left\{ f_0\left(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u}\right) \mid\ f_1\left(\boldsymbol{\phi}\right) \leq 0,\ \text{問題 9.12.1} \right\}$$

を満たす $\Omega\left(\phi\right)$ を求めよ．

§9.12.3 評価関数の形状微分

$f_0(\phi, \boldsymbol{u})$ と $f_1(\phi)$ の形状微分を求めよう．ここでは，関数の形状微分公式を用いる場合と関数の形状偏微分公式を用いる場合に分けてみていくことにする．関数の形状微分公式を用いる場合には，2 階形状微分までを求めてみる．そのための準備として，$f_0(\phi, \boldsymbol{u})$ の Lagrange 関数を

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_0(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0) \\
&\quad = f_0(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}) + \mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0) \\
&\quad = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} (-\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}_0) + \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}_0))\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_p(\boldsymbol{\phi})} \boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}_0)\ \mathrm{d}\gamma \\
&\qquad + \int_{\Gamma_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{\phi})} \{(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot (\boldsymbol{S}(\boldsymbol{v}_0)\,\boldsymbol{\nu}) + (\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot (\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{\nu})\}\,\mathrm{d}\gamma
\end{aligned}
\tag{9.12.12}
$$

とおくことにする．ここで，$\mathscr{L}_{\mathrm{S}}$ は式 (9.12.9) で定義された状態決定問題の Lagrange 関数である．また，$\boldsymbol{v}_0$ は f_0 のために用意された状態決定問題に対する Lagrange 乗数で，$\tilde{\boldsymbol{v}}_0 = \boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}$ が U の要素であると仮定する．

関数の形状微分公式を用いて，f_0 の形状微分を求めよう．ここでは，$\boldsymbol{b}(\phi)$, $\boldsymbol{p}_{\mathrm{N}}(\phi)$, $\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}(\phi)$ および $\boldsymbol{C}(\phi)$ は物質固定であると仮定する．ここでも，$\boldsymbol{b}(\phi)$ を $\boldsymbol{b}$ とかくときには，他の関数でも ϕ を省略することにする．

このとき，$\mathscr{L}_0$ の Fréchet 微分は，任意の $(\varphi, \hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{v}}_0) \in X \times U \times U$ に対して，

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_0'(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\boldsymbol{\varphi}, \hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{v}}_0] &= \mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}'}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\boldsymbol{\varphi}] + \mathscr{L}_{0\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\hat{\boldsymbol{u}}] \\ &\quad + \mathscr{L}_{0\boldsymbol{v}_0}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\hat{\boldsymbol{v}}_0] \end{aligned} \tag{9.12.13}$$

とかける．ただし，式 (9.3.5) と式 (9.3.15) の表記法に従うものとする．以下で各項について考察する．

式 (9.12.13) の右辺第 3 項は，

$$\mathscr{L}_{0\boldsymbol{v}_0}(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_0)[\hat{\boldsymbol{v}}_0]=\mathscr{L}_{\mathrm{S}\boldsymbol{v}_0}(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_0)[\hat{\boldsymbol{v}}_0]=\mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u},\hat{\boldsymbol{v}}_0) \tag{9.12.14}$$

とかきかえることができる．式 (9.12.14) は状態決定問題 (問題 9.12.1) の Lagrange 関数になっている．そこで，$\boldsymbol{u}$ が状態決定問題の弱解ならば，式 (9.12.13) の右辺第 3 項はゼロとなる．

また，式 (9.12.13) の右辺第 2 項は，

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{0\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_0)[\hat{\boldsymbol{u}}]&=\int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})}(-\boldsymbol{S}(\hat{\boldsymbol{u}})\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}_0)+\boldsymbol{b}\cdot\hat{\boldsymbol{u}})\,\mathrm{d}x+\int_{\Gamma_p(\boldsymbol{\phi})}\boldsymbol{p}_{\mathrm{N}}\cdot\hat{\boldsymbol{u}}\,\mathrm{d}\gamma\\&\quad+\int_{\Gamma_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{\phi})}\{\hat{\boldsymbol{u}}\cdot(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{v}_0)\boldsymbol{\nu})+(\boldsymbol{v}_0-\boldsymbol{u})\cdot(\boldsymbol{S}(\hat{\boldsymbol{u}})\boldsymbol{\nu})\}\,\mathrm{d}\gamma\end{aligned}$$

$$= \mathscr{L}_{\mathrm{S}}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{v}_0, \hat{\boldsymbol{u}}\right) \tag{9.12.15}$$

となる．式 (9.12.15) と式 (9.12.14) を比較すれば，$\boldsymbol{v}_0$ と $\boldsymbol{u}$ をいれかえた関係になっていることがわかる．そこで，自己随伴関係

$$\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{u} \tag{9.12.16}$$

が成り立つならば，式 (9.12.13) の右辺第 2 項は 0 になる．

さらに，式 (9.12.13) の右辺第 1 項は，命題 9.3.4 の結果を表した式 (9.3.5) と，命題 9.3.7 の結果を表した式 (9.3.15) の公式より，

$$\mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}'}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0\right)[\boldsymbol{\varphi}]$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \Big[\Big(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^\top \right)^\top + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{v}_0) \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top \right)^\top \Big) \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}^\top \\
&\qquad + \left\{ -\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}_0) + \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}_0) \right\} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi} \Big] \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\Gamma_p(\boldsymbol{\phi})} \left[\kappa \left\{ \boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}_0) \right\} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\nabla}_\tau \left\{ \boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}_0) \right\} \cdot \boldsymbol{\varphi}_\tau \right] \mathrm{d}\gamma \\
&\quad + \int_{\partial \Gamma_p(\boldsymbol{\phi}) \cup \Theta(\boldsymbol{\phi})} \left\{ \boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}_0) \right\} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varphi} \mathrm{d}\varsigma \\
&\quad + \int_{\Gamma_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{\phi})} \Big[\left\{ (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot \boldsymbol{w}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{v}_0) + (\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot \boldsymbol{w}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{u}) \right\} \\
&\qquad + \left\{ (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot (\boldsymbol{S}(\boldsymbol{v}_0) \boldsymbol{\nu}) + (\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot (\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{\nu}) \right\} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi})_\tau \Big] \mathrm{d}\gamma
\end{aligned}
\tag{9.12.17}
$$

となる．ただし，

$$\boldsymbol{w}(\varphi,\boldsymbol{u})=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\left[\left\{\boldsymbol{\nu}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{\top}\boldsymbol{\nu}\right)\right\}\boldsymbol{\nu}-\left\{\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{\top}+\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{\top}\right)^{\top}\right\}\boldsymbol{\nu}\right]\tag{9.12.18}$$

とおいた．$(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi})_{\tau}$ は式 (9.2.6) に従う．式 (9.12.17) を得るために，

$$\begin{aligned}
&-\left(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}_0)\right)_{\phi'}[\boldsymbol{\varphi}]\\
&=-\left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{S}(\boldsymbol{v}_0)\right)_{\phi'}[\boldsymbol{\varphi}]\\
&=\left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{S}(\boldsymbol{v}_0)\right)_{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\top}}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{\top}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\top}\right)\\
&\quad+\left(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}_0)\right)_{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^{\top}}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{\top}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^{\top}\right)-\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}_0)(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi})\\
&=\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{\top}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\top}\right)^{\mathrm{s}}\cdot\boldsymbol{S}(\boldsymbol{v}_0)+\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{\top}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^{\top}\right)^{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad -\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}_0)(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi})\\
&=\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{\top}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\top}\right)\cdot\boldsymbol{S}(\boldsymbol{v}_0)+\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{\top}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^{\top}\right)\\
&\quad -\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}_0)(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi})\\
&=\left(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^{\top}\right)^{\top}\right)\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{\top}+\left(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{v}_0)\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\top}\right)^{\top}\right)\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{\top}\\
&\quad -\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}_0)(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi})
\end{aligned}
$$

が使われた．ただし，$(\,\cdot\,)^{\mathrm{s}}$ は $\left((\,\cdot\,)^{\top}+(\,\cdot\,)\right)/2$ を表す．これらの式の変換には，式 (9.8.18) が使われた．

以上の結果をふまえて，$\boldsymbol{u}$ が問題 9.12.1 の弱解で，自己随伴関係 (式 (9.12.16)) が成り立つと仮定する．このとき，問題 9.12.1 の Dirichlet 条件が成り立つことから，式 (9.12.17) は，$\tilde{f}_0$ に対して式 (7.5.15) の表記を用いて

$$\begin{aligned}\tilde{f}_0'(\boldsymbol{\phi})[\boldsymbol{\varphi}] &= \mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}'}(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_0)[\boldsymbol{\varphi}] = \langle \boldsymbol{g}_0,\boldsymbol{\varphi}\rangle \\ &= \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \left(\boldsymbol{G}_{\Omega 0}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{\top} + g_{\Omega 0}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}\right) \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{\Gamma_p(\boldsymbol{\phi})} \boldsymbol{g}_{p0}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}\gamma + \int_{\partial\Gamma_p(\boldsymbol{\phi})\cup\Theta(\boldsymbol{\phi})} \boldsymbol{g}_{\partial p0}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}\varsigma \end{aligned} \tag{9.12.19}$$

のようにかかれる．ここで，

$$\boldsymbol{G}_{\Omega 0} = 2\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\top}\right)^{\top}, \tag{9.12.20}$$

$$g_{\Omega 0} = -\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) + 2\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}, \tag{9.12.21}$$

$$\boldsymbol{g}_{p0} = 2\kappa (\boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} \cdot \boldsymbol{u}) \boldsymbol{\nu}, \tag{9.12.22}$$

$$\boldsymbol{g}_{\partial p0} = 2 (\boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} \cdot \boldsymbol{u}) \boldsymbol{\tau} \tag{9.12.23}$$

となる．

以上の結果から，式 (9.12.19) の $\boldsymbol{g}_0$ について定理 9.8.2 と同様の結果が得られることになる．

一方，$f_1(\phi)$ の形状微分は，状態決定問題の解が使われていないことから，$\mathscr{L}_{\mathrm{S}}$ を使わずに，命題 9.3.1 において，$u = 1$ とおくことによって，

$$f_1'(\phi)[\boldsymbol{\varphi}] = \langle \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \int_{\Omega(\phi)} g_{\Omega 1} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}x \tag{9.12.24}$$

となる．ここで，

$$g_{\Omega 1} = 1 \tag{9.12.25}$$

である．

関数の形状微分公式を用いた 2 階形状微分

さらに，平均コンプライアンス f_0 と線形弾性体の大きさ制約に対する評価関数 f_1 の 2 階形状微分を求めてみよう．ここでは，関数の形状微分公式を用いて，9.8.2 項で示された手続きに沿ってみていくことにする．

まず，f_0 の 2 階形状微分について考えよう．仮定 9.8.3 の (1) に対応して，ここでは，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d}$ を仮定する．仮定 9.8.3 の (2) に対応する関係はここでは満たされている．また，仮定 9.8.3 の (3) を仮定する．

f_0 の Lagrange 関数 $\mathscr{L}_0$ は式 (9.12.12) によって定義されている． $(\phi, \boldsymbol{u})$ を設計変数とみなし，その許容集合と許容方向集合を

$$S = \{(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S} \mid \mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0 \text{ for all } \boldsymbol{v} \in U\},$$

$$T_S(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}) = \{(\boldsymbol{\varphi}, \hat{\boldsymbol{v}}) \in X \times U \mid \mathscr{L}_{\mathrm{S}\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})[\boldsymbol{\varphi}, \hat{\boldsymbol{v}}] = 0 \text{ for all } \boldsymbol{v} \in U\}$$

とおく．このとき，$(\phi, \boldsymbol{u}) \in S$ の任意変動 $(\boldsymbol{\varphi}_1, \hat{\boldsymbol{v}}_1), (\boldsymbol{\varphi}_2, \hat{\boldsymbol{v}}_2) \in T_S(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u})$ に対する $\mathscr{L}_0$ の 2 階 Fréchet 偏微分は，式 (9.1.6) を考慮して，

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{0(\boldsymbol{\phi}',\boldsymbol{u})(\boldsymbol{\phi}',\boldsymbol{u})}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[(\boldsymbol{\varphi}_1, \hat{\boldsymbol{v}}_1), (\boldsymbol{\varphi}_2, \hat{\boldsymbol{v}}_2)] \\
&\quad = \left(\mathscr{L}_{0(\boldsymbol{\phi}',\boldsymbol{u})}\right)_{(\boldsymbol{\phi}',\boldsymbol{u})}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[(\boldsymbol{\varphi}_1, \hat{\boldsymbol{v}}_1), (\boldsymbol{\varphi}_2, \hat{\boldsymbol{v}}_2)] + \langle \boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{\phi}), \boldsymbol{t}(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2)\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}'}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0\right)\left[\boldsymbol{\varphi}_1\right] + \mathscr{L}_{0\boldsymbol{u}}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0\right)\left[\hat{\boldsymbol{v}}_1\right]\right)_{\boldsymbol{\phi}'}\left[\boldsymbol{\varphi}_2\right] \\
&\quad + \left(\mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}'}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0\right)\left[\boldsymbol{\varphi}_1\right] + \mathscr{L}_{0\boldsymbol{u}}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0\right)\left[\hat{\boldsymbol{v}}_1\right]\right)_{\boldsymbol{u}}\left[\hat{\boldsymbol{v}}_2\right] \\
&\quad + \left\langle \boldsymbol{g}_0\left(\boldsymbol{\phi}\right), \boldsymbol{t}\left(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2\right)\right\rangle \\
&= \left(\mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}'}\right)_{\boldsymbol{\phi}'}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0\right)\left[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2\right] + \mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}'\boldsymbol{u}}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0\right)\left[\boldsymbol{\varphi}_1, \hat{\boldsymbol{v}}_2\right] \\
&\quad + \mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}'\boldsymbol{u}}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0\right)\left[\boldsymbol{\varphi}_2, \hat{\boldsymbol{v}}_1\right] + \mathscr{L}_{0\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0\right)\left[\hat{\boldsymbol{v}}_1, \hat{\boldsymbol{v}}_2\right] \\
&\quad + \left\langle \boldsymbol{g}_0\left(\boldsymbol{\phi}\right), \boldsymbol{t}\left(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2\right)\right\rangle
\end{aligned}
\tag{9.12.26}
$$

となる．ただし，$\left\langle \boldsymbol{g}_0\left(\boldsymbol{\phi}\right), \boldsymbol{t}\left(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2\right)\right\rangle$ は式 (9.1.8) の定義に従う．

ここで，式 (9.12.26) の右辺第 1 項と第 5 項は，

$$
\left(\mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}'}\right)_{\boldsymbol{\phi}'}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0\right)\left[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2\right] + \left\langle \boldsymbol{g}_0\left(\boldsymbol{\phi}\right), \boldsymbol{t}\left(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2\right)\right\rangle
$$

$$
\begin{aligned}
= \int_{\Omega(\phi)} \Big[& \left\{ \left(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^\top \right)^\top \right) \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \right\}_{\phi'} [\boldsymbol{\varphi}_2] \\
& + \left\{ \left(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{v}_0) \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top \right)^\top \right) \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \right\}_{\phi'} [\boldsymbol{\varphi}_2] \\
& - \left(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}_0) \right) \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \right)_{\phi'} [\boldsymbol{\varphi}_2] \\
& + 2 \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top \right)^\top \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top - \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 \right) \right) \\
& - \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) \left\{ \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \right)^\top \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top - \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 \right) \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \right) \right\} \Big] \mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{9.12.27}
$$

となる．ここで，式 (9.3.11) が使われた．式 (9.12.27) 右辺の被積分関数第 1 項は，

$$
\begin{aligned}
&\left[\left\{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^{\top}\right)^{\top}\right\}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^{\top}\right]_{\phi'}[\boldsymbol{\varphi}_2] \\
&\quad=\left\{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^{\top}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^{\top}\right)\right\}_{\phi'}[\boldsymbol{\varphi}_2] \\
&\quad=\left\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})\cdot\left(\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^{\top}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^{\top}\right)^{\mathrm{s}}\right)\right\}_{\phi'}[\boldsymbol{\varphi}_2] \\
&\quad=\left[\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^{\top}\cdot\left\{\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^{\top}\right)^{\top}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\right\}\right]_{\phi'}[\boldsymbol{\varphi}_2] \\
&\quad=-\left\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})\cdot\left(\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^{\top}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^{\top}\right)^{\mathrm{s}}\right)\right\}_{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\top}}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^{\top}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\top}\right) \\
&\qquad-\left[\left\{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^{\top}\right)^{\top}\right\}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^{\top}\right]_{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^{\top}}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^{\top}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^{\top}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \left[\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^\top \cdot \left\{\left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top\right)^\top \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}\right)\right\}\right]_{\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^\top} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^\top\right) \\
&+ \left[\left\{\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}\right)\left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^\top\right)^\top\right\} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top\right] \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 \\
= &- \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top\right)^{\mathrm{s}} \cdot \left(\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^\top\right)^{\mathrm{s}}\right) \\
&- \left\{\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}\right)\left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^\top\right)^\top\right\} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top\right) \\
&- \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^\top\right) \cdot \left\{\left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top\right)^\top \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}\right)\right\} \\
&+ \left[\left\{\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}\right)\left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^\top\right)^\top\right\} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top\right] \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 \qquad (9.12.28)
\end{aligned}
$$

となる．同様に，式 (9.12.27) 右辺の被積分関数第 2 項は，式 (9.12.28) において $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}_0$ をいれかえたものとなる．式 (9.12.27) 右辺被積分関数の第 3 項は，

$$
\begin{aligned}
&-\left(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}_0)\right)\{\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1\}_{\phi'}[\boldsymbol{\varphi}_2] \\
&\quad = -\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}_0)\left\{-\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^{\top}\right)^{\top} \cdot \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^{\top} + (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2)(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1)\right\} \quad (9.12.29)
\end{aligned}
$$

となる．そこで，式 (9.12.27) は，自己随伴関係を用いて，

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathscr{L}_{0\phi'}\right)_{\phi'}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2] + \langle \boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{\phi}), \boldsymbol{t}(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2)\rangle \\
&\quad = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \Big[-\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^{\top}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\top}\right)^{\mathrm{s}} \cdot \left(\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^{\top}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^{\top}\right)^{\mathrm{s}}\right) \\
&\qquad\quad - \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^{\top}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^{\top}\right) \cdot \left\{\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^{\top}\right)^{\top}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^\top\right)^{\mathrm{s}} \cdot \left(\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top\right)^{\mathrm{s}}\right) \\
&- \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top\right) \cdot \left\{\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top\right)^\top \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{v}_0\right)\right\}\Bigg]\mathrm{d}x \qquad (9.12.30)
\end{aligned}
$$

となる．

次に，式 (9.12.26) の右辺第 2 項を考える．状態決定問題の Dirichlet 条件が代入された式 (9.12.17) を用いれば，

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}'\boldsymbol{u}}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0\right)\left[\boldsymbol{\varphi}_1, \hat{\boldsymbol{v}}_2\right] \\
&= \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \Bigg[\left\{\boldsymbol{S}\left(\hat{\boldsymbol{v}}_2\right)\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^\top\right)^\top + \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{v}_0\right)\left(\boldsymbol{\nabla}\hat{\boldsymbol{v}}_2^\top\right)^\top\right\} \cdot \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top \\
&\qquad - \left(\boldsymbol{S}(\hat{\boldsymbol{v}}_2) \cdot \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{v}_0\right)\right) \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1\Bigg]\mathrm{d}x \qquad (9.12.31)
\end{aligned}
$$

となる．

一方，$j \in \{1,2\}$ を用いて，任意の領域変動 $\varphi_j \in Y$ に対する状態決定問題を満たす $\boldsymbol{u}$ の変動を $\hat{\boldsymbol{v}}_j = \boldsymbol{v}'(\phi)[\varphi_j]$ とかくことにする．状態決定問題の Lagrange 関数 $\mathscr{L}_{\mathrm{S}}$ の Fréchet 偏微分をとれば，任意の $\boldsymbol{v} \in U$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{\mathrm{S}\boldsymbol{\phi}'\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})[\boldsymbol{\varphi}_j, \hat{\boldsymbol{v}}_j] \\
&\quad = \int_{\Omega(\phi)} \Big\{ \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_j^{\top} \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}^{\top}\right)^{\mathrm{s}} + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{v}) \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_j^{\top} \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^{\top}\right)^{\mathrm{s}} \\
&\qquad\quad - \left(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v})\right) \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_j - \boldsymbol{S}(\hat{\boldsymbol{v}}_j) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}) \Big\} \mathrm{d}x \\
&\quad = \int_{\Omega(\phi)} \Big[\Big\{ \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_j^{\top}\right)^{\top} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{C} \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_j^{\top} \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^{\top}\right)^{\mathrm{s}} - \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - \boldsymbol{S}(\hat{\boldsymbol{v}}_j)\Big\}\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}^\top\right)^\top\Big] \cdot \boldsymbol{I}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega(\phi)} \Big[\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_j^\top \\
&\quad + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{v})\left\{\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top\right)^\top \left(\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_j^\top\right)^\top - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_j\right) - \left(\boldsymbol{\nabla}\hat{\boldsymbol{v}}_j^\top\right)^\top\right\}\Big] \cdot \boldsymbol{I}\,\mathrm{d}x \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{9.12.32}
$$

となる．ただし，$\boldsymbol{v}$ と $\hat{\boldsymbol{v}}_j$ の Dirichlet 境界条件が使われた．任意の $\boldsymbol{v} \in U$ に対して式 (9.12.32) が成り立つことから，

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{S}(\hat{\boldsymbol{v}}_j) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}) \\
&= \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_j^\top \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}^\top\right)^{\mathrm{s}} + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{v}) \cdot \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_j^\top \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top\right)^{\mathrm{s}} - \left(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v})\right)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_j,
\end{aligned}
\tag{9.12.33}
$$

$$\boldsymbol{S}\left(\hat{\boldsymbol{v}}_j\right)\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}^\top\right)^\top$$
$$= \left\{\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_j^\top\right)^\top \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}\right) + \boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_j^\top \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top\right)^{\mathrm{s}} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_j \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}\right)\right\}\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}^\top\right)^\top \tag{9.12.34}$$

$$\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{v}\right)\left(\boldsymbol{\nabla}\hat{\boldsymbol{v}}_j^\top\right)^\top$$
$$= \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}\right)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_j^\top + \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{v}\right)\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top\right)^\top\left\{\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_j^\top\right)^\top - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_j\right\} \tag{9.12.35}$$

が得られる．式 (9.12.31) に式 (9.12.33) から式 (9.12.35) を代入する．このとき，

$$\mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}'\boldsymbol{u}}\left(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_0\right)\left[\boldsymbol{\varphi}_1,\hat{\boldsymbol{v}}_2\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\Omega(\phi)} \Big[\Big\{ \Big(\left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^{\top} \right)^{\top} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{C} \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^{\top} \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^{\top} \right)^{\mathrm{s}} - \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \Big) \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^{\top} \right)^{\top} \\
&\quad + \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^{\top} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^{\top} + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{v}_0) \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^{\top} \right)^{\top} \Big(\left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^{\top} \right)^{\top} - \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 \Big) \Big\} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^{\top} \\
&\quad - \Big\{ \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^{\top} \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^{\top} \right)^{\mathrm{s}} + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{v}_0) \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^{\top} \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^{\top} \right)^{\mathrm{s}} \\
&\quad - \left(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}_0) \right) \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 \Big\} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \Big] \mathrm{d}x \qquad (9.12.36)
\end{aligned}
$$

となる．同様に，式 (9.12.26) の右辺第 3 項は，式 (9.12.36) において $\boldsymbol{\varphi}_1$ と $\boldsymbol{\varphi}_2$ をいれかえたものとなる．式 (9.12.26) の右辺第 4 項はゼロとなる．

以上の結果をまとめれば，$\tilde{f}_0$ の 2 階形状微分は，

$$
h_0(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2]
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\Omega(\phi)} \Big[2\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2) (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1) \\
&\quad + \left(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top \right)^\top \right) \cdot \Big\{ \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top + \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top + \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \right)^\top \\
&\qquad + \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \right)^\top \\
&\qquad - 4 \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 - 4 \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 \Big\} \Big] \mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{9.12.37}
$$

となる．

一方，$f_1(\phi)$ の 2 階形状微分は，任意の $\boldsymbol{\varphi}_1 \in Y$ と $\boldsymbol{\varphi}_2 \in Y$ に対して，

$$
h_1(\phi)[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2] = (f_1')'(\phi) + \langle \boldsymbol{g}_1(\phi), \boldsymbol{t}(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2) \rangle = 0 \tag{9.12.38}
$$

となる．ここで，式 (9.3.11) が使われた．

Lagrange 乗数法による評価関数の 2 階形状微分

Lagrange 乗数法を用いて平均コンプライアンス f_0 の 2 階形状微分を求める場合には，次のようになる．式 (9.12.19) の $\tilde{f}'_0(\phi)[\varphi_1] = \langle \boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{\varphi}_1 \rangle$ に対する Lagrange 関数を

$$\mathscr{L}_{\mathrm{I}0}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_0) = \langle \boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{\varphi}_1 \rangle + \mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_0) \tag{9.12.39}$$

とおく．ここで，$\mathscr{L}_{\mathrm{S}}$ は式 (9.12.9) で与えられる．$\boldsymbol{w}_0 \in U$ は，$\boldsymbol{g}_0$ が $\boldsymbol{u}$ の関数であるために用意された随伴変数である．ϑ_1 は $\mathscr{L}_{\mathrm{I}0}$ においては定ベクトルとみなす．

$(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_0)$ の任意変動 $(\boldsymbol{\varphi}_2, \hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{w}}_0) \in \mathcal{D} \times U^2$ に対する $\mathscr{L}_{\mathrm{I}0}$ の Fréchet 微分は，式 (9.1.6) を考慮して，

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{\mathrm{I}0}' (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_0) [\boldsymbol{\varphi}_2, \hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{w}}_0] \\
&\quad = \mathscr{L}_{\mathrm{I}0\boldsymbol{\phi}'} (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_0) [\boldsymbol{\varphi}_2] + \langle \boldsymbol{g}_0 (\boldsymbol{\phi}), \boldsymbol{t} (\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2) \rangle + \mathscr{L}_{\mathrm{I}0\boldsymbol{u}} (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_0) [\hat{\boldsymbol{u}}] \\
&\qquad + \mathscr{L}_{\mathrm{I}0\boldsymbol{w}_0} (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_0) [\hat{\boldsymbol{w}}_0]
\end{aligned} \tag{9.12.40}$$

となる．式 (9.12.40) の右辺第 4 項は，$\boldsymbol{u}$ が状態決定問題の解ならばゼロとなる．

また，式 (9.12.40) の右辺第 3 項は，

$$\mathscr{L}_{\mathrm{I}0\boldsymbol{u}} (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_0) [\hat{\boldsymbol{u}}]$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \Big[2 \Big\{ \boldsymbol{C} \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^{\top} \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^{\top} \right)^{\mathrm{s}} + \left(\left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^{\top} \right)^{\top} - \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \right) \boldsymbol{S} \left(\boldsymbol{v}_0 \right) \Big\} \cdot \boldsymbol{\nabla} \hat{\boldsymbol{u}}^{\top} \\
&\qquad + 2 \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \right) \boldsymbol{b} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{S} \left(\boldsymbol{w}_0 \right) \cdot \boldsymbol{E} \left(\hat{\boldsymbol{u}} \right) \Big] \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\Gamma_p(\boldsymbol{\phi})} \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \right)_{\tau} \boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} \, \mathrm{d}\gamma
\end{aligned}
\tag{9.12.41}
$$

となる．ただし，命題 9.3.7 を用いた．そこで，任意の $\hat{\boldsymbol{u}} \in U$ に対して式 (9.12.41) がゼロとなる条件は， $\boldsymbol{w}_0$ を次の随伴問題の解とおくことと同値である．

問題 9.12.3 ($\langle g_0, \varphi_1 \rangle$ に対する w_0 の随伴問題)

問題 9.12.1 の仮定のもとで，$\varphi_1 \in Y$ が与えられたとき，

$$\begin{aligned}
-\boldsymbol{\nabla}^\top \boldsymbol{S}(\boldsymbol{w}_0) &= -2\boldsymbol{\nabla}^\top \left\{ \boldsymbol{C} \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^\top \right)^{\mathrm{s}} + \left(\left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \right)^\top - \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \right) \boldsymbol{S}(\boldsymbol{v}_0) \right\} \\
&\quad + 2\boldsymbol{b}^\top (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1) \quad \text{in } \Omega(\boldsymbol{\phi}), \\
\boldsymbol{S}(\boldsymbol{w}_0)\boldsymbol{\nu} &= (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1)_\tau \boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} \quad \text{on } \Gamma_p(\boldsymbol{\phi}), \\
\boldsymbol{S}(\boldsymbol{w}_0)\boldsymbol{\nu} &= \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{\phi}) \setminus \bar{\Gamma}_p(\boldsymbol{\phi}), \\
\boldsymbol{w}_0 &= \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \Gamma_{\mathrm{D}}
\end{aligned}$$

を満たす $\boldsymbol{w}_0 = \boldsymbol{w}_0(\boldsymbol{\varphi}_1) \in U$ を求めよ．

さらに，式 (9.12.40) の右辺第 1 項と第 2 項は，任意の $\varphi_1 \in Y$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{\mathrm{I}0\boldsymbol{\phi}'}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{w}_0(\boldsymbol{\varphi}_1), \boldsymbol{z}_0(\boldsymbol{\varphi}_1))[\boldsymbol{\varphi}_2] + \langle \boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{\phi}), \boldsymbol{t}(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2)\rangle \\
&\quad = (\mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}'})_{\boldsymbol{\phi}'}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2] + \langle \boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{\phi}), \boldsymbol{t}(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2)\rangle \\
&\qquad + \mathscr{L}_{\mathrm{S}\boldsymbol{\phi}'}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_0)[\boldsymbol{\varphi}_2]
\end{aligned}
\tag{9.12.42}
$$

となる．式 (9.12.42) の右辺第 1 項と第 2 項は，式 (9.12.30) で与えられる．第 3 項は，

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{\mathrm{S}\boldsymbol{\phi}'}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_0)[\boldsymbol{\varphi}_2] \\
&\quad = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \Big\{ \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{w}_0^\top\right)^{\mathrm{s}} + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{w}_0) \cdot \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top\right)^{\mathrm{s}}
\end{aligned}
$$

$$
+ \left(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{w}_0 - \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{w}_0)\right) \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 \Big\} \mathrm{d}x
$$

$$
+ \int_{\Gamma_p(\boldsymbol{\phi})} \left\{ \boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} \cdot \boldsymbol{u} \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1\right)_\tau + \boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} \cdot \boldsymbol{w}_0 \left(\boldsymbol{\varphi}_1\right) \left(\boldsymbol{\varphi}_1\right) \right\} \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2\right)_\tau \mathrm{d}\gamma
$$

となる．

そこで，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{w}_0(\boldsymbol{\varphi}_1)$ はそれぞれ問題 9.12.1 と問題 9.12.3 の弱解であるとする．このときの $f_0(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u})$ を $\tilde{f}_0(\boldsymbol{\phi})$ とかくことにすれば，

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{\mathrm{I}0\boldsymbol{\phi}'}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_0(\boldsymbol{\varphi}_1)\right)[\boldsymbol{\varphi}_2] + \left\langle \boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{\phi}), \boldsymbol{t}(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2) \right\rangle \\
&\quad = \tilde{f}_0''(\boldsymbol{\phi})[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2] = \left\langle \boldsymbol{g}_{\mathrm{H}0}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\varphi}_1), \boldsymbol{\varphi}_2 \right\rangle \\
&\quad = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \Big[-2 \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top\right)^{\mathrm{s}} \cdot \left(\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top\right)^{\mathrm{s}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- 2\left\{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\top}\right)^{\top}\right\}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^{\top}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^{\top}\right)\\
&+\left\{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{w}_0^{\top}(\boldsymbol{\varphi}_1)\right)^{\top}+\boldsymbol{S}(\boldsymbol{w}_0(\boldsymbol{\varphi}_1))\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\top}\right)^{\top}\right\}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^{\top}\\
&-\left\{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{w}_0(\boldsymbol{\varphi}_1))-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{w}_0(\boldsymbol{\varphi}_1)\right\}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_2\Big]\,\mathrm{d}x\\
+\int_{\Gamma_p(\phi)}&2\boldsymbol{p}_{\mathrm{N}}\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}_0(\boldsymbol{\varphi}_1))(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_1)_{\tau}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_2)_{\tau}\,\mathrm{d}\gamma
\end{aligned}
\tag{9.12.43}
$$

となる．ここで，$g_{\mathrm{H}0}$ は平均コンプライアンスの Hesse 勾配である．

なお，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d}$ と仮定 9.8.3 の (3) を仮定すれば，問題 9.12.3 の解 $\boldsymbol{w}_0$ について，

$$
\boldsymbol{S}(\boldsymbol{w}_0)=2\Big\{\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^{\top}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^{\top}\right)^{\mathrm{s}}
$$

$$+\left(\left(\nabla\boldsymbol{\varphi}_1^\top\right)^{\mathrm{s}} - \nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}_1\right)\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{v}_0\right)\Big\}, \tag{9.12.44}$$

$$\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}\right)\cdot\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{w}_0\right) = \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{u}\right)\cdot\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{w}_0\right), \tag{9.12.45}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}\right)\left(\nabla\boldsymbol{w}_0^\top\right)^\top\cdot\nabla\boldsymbol{\varphi}_2^\top &= \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}\right)\cdot\left(\nabla\boldsymbol{\varphi}_2^\top\nabla\boldsymbol{w}_0^\top\right)^{\mathrm{s}} \\
&= \left(\nabla\boldsymbol{\varphi}_j^\top\right)^\top\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}\right)\cdot\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{w}_0\right) \\
&= \left(\nabla\boldsymbol{\varphi}_j^\top\right)^\top\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{u}\right)\cdot\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{w}_0\right)
\end{aligned} \tag{9.12.46}$$

が成り立つ．ここで，

$$\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}\right)\cdot\left(\nabla\boldsymbol{\varphi}_j^\top\nabla\boldsymbol{v}_0^\top\right)^{\mathrm{s}} = \left(\nabla\boldsymbol{\varphi}_j^\top\right)^\top\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}\right)\cdot\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{v}_0\right)$$

の関係が使われた．実際，式 (9.12.34) から得られる $\boldsymbol{S}(\hat{\boldsymbol{v}}_j)$ と $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v})$ の内積と式 (9.12.33) が等しいことから，この関係が得られる．式 (9.12.44) から式 (9.12.46) を式 (9.12.43) に代入し，

$h_0(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2] = h_0(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\boldsymbol{\varphi}_2, \boldsymbol{\varphi}_1]$ が成り立つことを用いれば，式 (9.12.43) は式 (9.12.37) と一致することが確かめられる．

関数の形状偏微分公式を用いた形状微分

今度は，関数の形状偏微分公式を用いて，f_0 の形状微分を求めてみよう．ここでは，$\boldsymbol{b}$, p_{N}, $\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}$ および $\boldsymbol{C}$ は空間固定の関数であると仮定する．また，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}_0$ は $q_{\mathrm{R}} > d$ に対して $W^{2,2q_{\mathrm{R}}}\left(D;\mathbb{R}^d\right)$ に入るような条件が満たされていると仮定する．

これらの仮定の下で，$\mathscr{L}_0\left(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_0\right)$ の Fréchet 微分は，任意の $\left(\boldsymbol{\varphi},\hat{\boldsymbol{u}},\hat{\boldsymbol{v}}_0\right) \in X \times U \times U$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_0'\left(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_0\right)\left[\boldsymbol{\varphi},\hat{\boldsymbol{u}},\hat{\boldsymbol{v}}_0\right] &= \mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}^*}\left(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_0\right)\left[\boldsymbol{\varphi}\right] + \mathscr{L}_{0\boldsymbol{u}}\left(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_0\right)\left[\hat{\boldsymbol{u}}\right] \\ &\quad + \mathscr{L}_{0\boldsymbol{v}_0}\left(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_0\right)\left[\hat{\boldsymbol{v}}_0\right] \end{aligned} \tag{9.12.47}$$

のようにかかれる．ただし，式 (9.3.21) と式 (9.3.27) の表記法に従うものとする．以下で各項について考察する．

式 (9.12.47) の右辺第 3 項は，式 (9.12.14) と同じ式となる．そこで，u が状態決定問題の弱解ならば，その項はゼロとなる．また，式 (9.12.47) の右辺第 2 項は，式 (9.12.15) と一致する．そこで，自己随伴関係 (式 (9.12.16)) が成り立つとき，その項はゼロとなる．

さらに，式 (9.12.47) の右辺第 1 項は，命題 9.3.10 の結果を表した式 (9.3.21) と，命題 9.3.13 の結果を表した式 (9.3.27) の公式より，

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}^*}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\boldsymbol{\varphi}] &= \int_{\partial\Omega(\boldsymbol{\phi})} \left\{-\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}_0) + \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}_0)\right\} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\gamma \\
&\quad + \int_{\Gamma_p(\boldsymbol{\phi})} (\partial_\nu + \kappa) \left\{\boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}_0)\right\} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\gamma
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \int_{\partial\Gamma_p(\boldsymbol{\phi})\cup\Theta(\boldsymbol{\phi})} \{\boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}_0)\} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\varsigma \\
&+ \int_{\Gamma_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{\phi})} \Big[\{(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot \bar{\boldsymbol{w}} (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{v}_0) + (\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot \bar{\boldsymbol{w}} (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{u})\} \\
&+ \{(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot (\boldsymbol{S} (\boldsymbol{v}_0) \boldsymbol{\nu}) + (\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot (\boldsymbol{S} (\boldsymbol{u}) \boldsymbol{\nu})\} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi})_{\tau} \\
&+ (\partial_\nu + \kappa) \{(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot (\boldsymbol{S} (\boldsymbol{v}_0) \boldsymbol{\nu}) + (\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot (\boldsymbol{S} (\boldsymbol{u}) \boldsymbol{\nu})\} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} \Big] \mathrm{d}\gamma \\
&+ \int_{\partial\Gamma_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{\phi})\cup\Theta(\boldsymbol{\phi})} \Big\{(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot (\boldsymbol{S} (\boldsymbol{v}_0) \boldsymbol{\nu}) \\
&+ (\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot (\boldsymbol{S} (\boldsymbol{u}) \boldsymbol{\nu}) \Big\} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\varsigma
\end{aligned}
$$

となる．ただし，$(\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{u}=\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\top}\right)^{\top}\boldsymbol{\nu}$ を $\partial_{\nu}\boldsymbol{u}$ とかくことにする．また，

$$\bar{\boldsymbol{w}}\,(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{u})=-\boldsymbol{S}\,(\boldsymbol{u})\left[\sum_{i\in\{1,\dots,d-1\}}\left\{\boldsymbol{\tau}_i\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^{\top}\boldsymbol{\nu}\right)\right\}\boldsymbol{\tau}_i\right] + (\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\varphi})\left(\boldsymbol{\nabla}^{\top}\boldsymbol{S}\,(\boldsymbol{u})\right)^{\top} \tag{9.12.48}$$

とおいた．$(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi})_{\tau}$ は式 (9.2.6) に従う．

以上の結果をふまえて，$\boldsymbol{u}$ は問題 9.12.1 の弱解で，自己随伴関係 (式 (9.12.16)) が成り立つことを仮定する．このとき，問題 9.12.1 の Dirichlet

条件が成り立つことを考慮して，式 (9.12.48) は，$\tilde{f}_0$ に対して式 (7.5.15) の表記を用いて

$$\begin{aligned}\tilde{f}'_0(\boldsymbol{\phi})[\boldsymbol{\varphi}] &= \mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}^*}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\boldsymbol{\varphi}] = \langle \bar{\boldsymbol{g}}_0, \boldsymbol{\varphi} \rangle \\ &= \int_{\partial\Omega(\boldsymbol{\phi})} \bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\Omega 0} \cdot \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}\gamma + \int_{\Gamma_p(\boldsymbol{\phi})} \bar{\boldsymbol{g}}_{p0} \cdot \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}\gamma \\ &\quad + \int_{\partial\Gamma_p(\boldsymbol{\phi})\cup\Theta(\boldsymbol{\phi})} \bar{\boldsymbol{g}}_{\partial p0} \cdot \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}\varsigma + \int_{\Gamma_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{\phi})} \bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{D}0} \cdot \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}\gamma \end{aligned} \tag{9.12.49}$$

のようにかかれる．ここで，

$$\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\Omega 0} = (-\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) + 2\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u})\,\boldsymbol{\nu} \tag{9.12.50}$$

$$\bar{\boldsymbol{g}}_{p0} = 2\left(\partial_\nu + \kappa\right)\left(\boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} \cdot \boldsymbol{u}\right)\boldsymbol{\nu} \tag{9.12.51}$$

$$\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial p0} = 2\left(\boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} \cdot \boldsymbol{u}\right)\boldsymbol{\tau}, \tag{9.12.52}$$

$$\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{D}0} = 2\left\{\partial_\nu\left(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}\right) \cdot \left(\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}\right)\boldsymbol{\nu}\right)\right\}\boldsymbol{\nu} \tag{9.12.53}$$

となる．さらに，同次 Dirichlet 境界上では，法線方向のみにひずみ成分があり，

$$\partial_\nu \boldsymbol{u} = \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{u}\right)\boldsymbol{\nu} \tag{9.12.54}$$

となる．そこで，式 (9.12.53) は

$$\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{D}0} = 2\left\{\left(\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{u}\right)\boldsymbol{\nu}\right) \cdot \left(\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}\right)\boldsymbol{\nu}\right)\right\}\boldsymbol{\nu} = 2\left(\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{u}\right) \cdot \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}\right)\right)\boldsymbol{\nu} \tag{9.12.55}$$

とかける．このとき，同次 Dirichlet 境界と同次 Neumann 境界において $\bar{g}_0$ を並べれば

$$\bar{g}_0 = \left(-\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}\right) \cdot \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{u}\right) + 2\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}\right) \boldsymbol{\nu} \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{N}}\left(\phi\right) \setminus \bar{\Gamma}_p\left(\phi\right), \tag{9.12.56}$$

$$\bar{g}_0 = \left(\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}\right) \cdot \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{u}\right) + 2\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}\right) \boldsymbol{\nu} \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{D}}\left(\phi\right) \tag{9.12.57}$$

となる．この結果より，ひずみエネルギー密度 $\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}\right) \cdot \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{u}\right)/2$ の符号が同次 Dirichlet 境界と同次 Neumann 境界ではいれかわることがわかる．

以上の結果から，式 (9.12.49) の $\bar{g}_0$ が入る関数空間について，定理 9.8.6 と同様の結果が得られる．

一方，$f_1(\phi)$ の形状微分は，状態決定問題の解が使われていないことから，命題 9.3.9 において，$u=1$ とおくことによって，

$$f_1'(\phi)[\boldsymbol{\varphi}] = \langle \bar{\boldsymbol{g}}_1, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \int_{\partial\Omega(\phi)} \bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\Omega 1} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\gamma \tag{9.12.58}$$

となる．ここで，

$$\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\Omega 1} = \boldsymbol{\nu} \tag{9.12.59}$$

となる．

§9.12.4 段つき 1 次元線形弾性体の最適設計問題との関係

表 9.2: 断面積最適化問題と形状最適化問題の対応

比較項目	断面積最適化問題	形状最適化問題
設計変数 $\in$ 線形空間 X	$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$	$\boldsymbol{\phi} \in H^1\left(D; \mathbb{R}^d\right)$
状態変数 $\in$ 線形空間 U	$\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$	$\boldsymbol{u} \in H^1\left(D; \mathbb{R}^d\right)$
状態決定問題 for all $\boldsymbol{v} \in U$	$\mathscr{L}_{\mathrm{S}}\left(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right) = 0$	$\mathscr{L}_{\mathrm{S}}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right) = 0$
目的関数 f_0	$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{u}$	$\hat{l}\left(\boldsymbol{\phi}\right)\left(\boldsymbol{u}\right)$
制約関数 f_1	体積制約式	領域の大きさ制約式
評価関数の勾配 $\in X'$	$\boldsymbol{g}_i \in \mathbb{R}^2$	$\boldsymbol{g}_i, \bar{\boldsymbol{g}}_i \in H^{1\prime}\left(D; \mathbb{R}^d\right)$
勾配法 for all $\boldsymbol{z} \in X$	$\boldsymbol{y}_{gi} \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{z} = -\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{z}$	$a\left(\boldsymbol{\varphi}_{gi}, \boldsymbol{z}\right) = -\left\langle \boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{z}\right\rangle$

$d \in \{2,3\}$ 次元線形弾性体の平均コンプライアンス最小化問題 (問題 9.12.2) 対して得られた評価関数の形状微分と，第 1 章でみてきた段つき 1 次元線形弾性体の平均コンプライアンス最小化問題 (問題 1.1.4) 対して得られた評価関数の断面積微分との関係について考えてみよう．表 9.2 には，線形空間などの対応が示されている．

問題 1.1.4 では体積力と既知変位は使われていなかった．その仮定を問題 9.12.2 に適用すれば，目的関数を

$$f_0(\phi, \boldsymbol{u}) = \hat{l}(\phi)(\boldsymbol{u}) = \int_{\Gamma_p(\phi)} \boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} \cdot \boldsymbol{u} \,\mathrm{d}\gamma = \sum_{i \in \{1,2\}} \int_{\Gamma_i} \frac{p_i}{a_i} u_i \,\mathrm{d}\gamma \tag{9.12.60}$$

とおいたことに対応する．ただし，$i \in \{1,2\}$ に対して p_i, u_i, a_i はそれぞれ問題 1.1.4 の定義に従う．また，問題 1.1.4 では，断面積の変動に対して，外力 p_1 と p_2 は固定されていた．すなわち， p_1 と p_2 は境界測度共変 (定義 9.4.4) を仮定していたことになる．このとき，断面積変化に対する形状微分 $f_{0\phi}(\phi, \boldsymbol{u})[\varphi]$ は 0 となる．そこで，式 (9.12.60) で定義された f_0 の形状微分は

$$\tilde{f}_0'(\phi)[\boldsymbol{\varphi}] = \langle \boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \sum_{i \in \{1,2\}} \int_0^l \left\{ \boldsymbol{G}_{\Omega 0 i} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_i^\top \right) + g_{\Omega 0 i} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \right\} a_i \, \mathrm{d}x \tag{9.12.61}$$

となる．ここで，段つき 1 次元線形弾性体の断面は，奥行が単位長さの長方形であると仮定する．x 座標を x_1 座標，高さ方向を x_2 座標とみなし，$i \in \{1, 2\}$ に対して，a_i は断面を表し，b_i はその変動を表すことにする．また，σ_1, ε_1, σ_2, ε_2 はそれぞれ $\sigma(u_1)$, $\varepsilon(u_1)$, $\sigma(u_2 - u_1)$, $\varepsilon(u_2 - u_1)$ を表すものとする．このとき，

$$\boldsymbol{G}_{\Omega 0 i} = 2\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\top}\right)^{\top} = 2\begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \sigma_i\varepsilon_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$g_{\Omega 0 i} = -\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) = -\begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\sigma_i\varepsilon_i,$$

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_i^{\top} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_i/a_i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_i = \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_i\right)_{\tau} = \frac{b_i}{a_i}$$

となる．これらの関係を用いれば，

$$\tilde{f}_0'(\boldsymbol{\phi})[\boldsymbol{\varphi}] = \langle \boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{\varphi} \rangle = l \begin{pmatrix} -\sigma_1 \varepsilon_1 \\ -\sigma_2 \varepsilon_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{g}_0 \cdot \boldsymbol{b} \tag{9.12.62}$$

となる．式 (9.12.62) の右辺の $\boldsymbol{g}_0$ は，式 (1.1.28) の断面積勾配と一致する．

また，$f_1(\boldsymbol{\phi})$ の形状微分は，

$$\begin{aligned} f_1'(\boldsymbol{\phi})[\boldsymbol{\varphi}] &= \sum_{i \in \{1,2\}} \langle \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \int_0^l (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_i)\, a_i \, \mathrm{d}x \\ &= l \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{g}_1 \cdot \boldsymbol{b} \end{aligned} \tag{9.12.63}$$

となる．式 (9.12.63) 右辺の $\boldsymbol{g}_1$ は，式 (1.1.17) の断面積勾配と一致する．

　さらに，式 (9.12.60) で定義された f_0 の Hesse 形式は次のようにして得られる．$j \in \{1, 2\}$ に対して，

$$
\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_{ji}^{\top} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{b_{ji}}{a_i} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{ji} = \frac{b_{ji}}{a_i},
$$

$$
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

となる．式 (9.12.61) 右辺第 1 項の形状微分は式 (9.12.37) によって計算される．そこで，

$$
\begin{aligned}
&h_0(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2] \\
&= \sum_{i\in\{1,2\}} \int_0^l \Big[2\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2)(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1) \\
&\qquad + \left(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) (\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top)^\top \right) \cdot \Big\{ \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top + \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top + \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top (\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top)^\top \\
&\qquad\quad + \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top (\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top)^\top - 4 \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 - 4 \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 \Big\} \Big] a_i \, \mathrm{d}x \\
&= \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{pmatrix} \cdot \left(2l \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{a_1} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{a_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \end{pmatrix} \right) = \boldsymbol{b}_1 \cdot (\boldsymbol{H}_0 \boldsymbol{b}_2) \qquad (9.12.64)
\end{aligned}
$$

となる．式 (9.12.64) 右辺の H_0 は，式 (1.1.29) の Hesse 勾配と一致する．

これらの比較に基づけば，問題 9.12.2 の最小点に対するイメージは，例題 1.1.7 の図 1.4 を参考にして，図 9.16 のようになっていると考えられる．

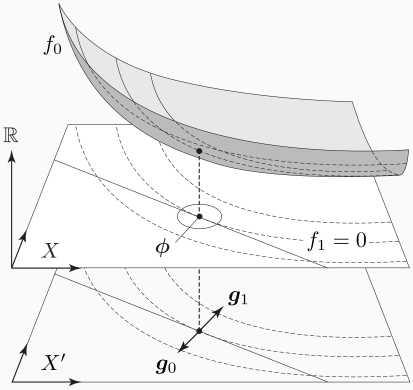


図 9.16: 平均コンプライアンス最小化問題 (問題 9.12.2) に対する最小点 ϕ のイメージ

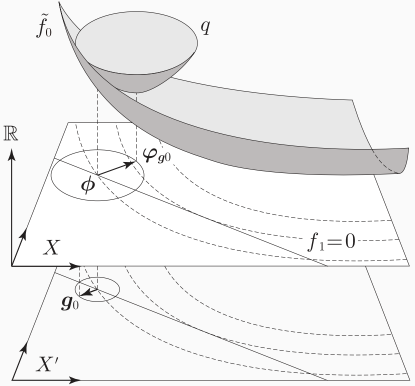


図 9.17: $\tilde{f}_0$ に対する H^1 勾配法のイメージ

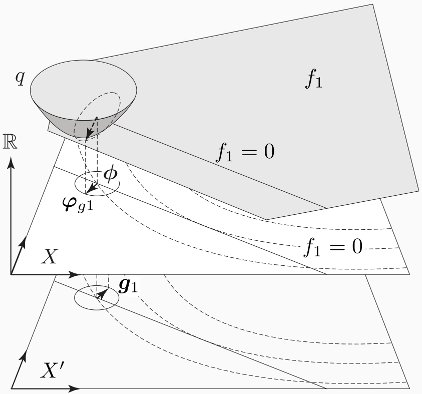


図 9.18: f_1 に対する H^1 勾配法のイメージ

図 9.17 と図 9.18 は，それぞれ $\tilde{f}_0$ と f_1 が減少するような領域変動 φ_{g0} と φ_{g1} を求める H^1 勾配法のイメージを示す．図 9.19 は，領域の大きさ制約を満たすような Lagrange 乗数 λ_1 のイメージを示す．これらの図において，$\Omega(\phi)$ では領域の大きさ制約は満たされているが最小点ではないと仮定されている．図 9.19 の探索方向 $\varphi_g = \varphi_{g0} + \lambda_1 \varphi_{g1}$ は，図 9.18 の $\boldsymbol{g}_1$ と直交している．すなわち，探索方向は制約を満たす方向を向いている．実際，制約つき問題に対する勾配法において Lagrange 乗数を決定する式 (9.10.3) は，問題 9.12.2 のとき

$$\lambda_1 = -\frac{\langle \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{\varphi}_{g0} \rangle}{\langle \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{\varphi}_{g1} \rangle} \tag{9.12.65}$$

となり，

$$\left\langle \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{\varphi}_{g0} + \lambda_{1(k+1)} \boldsymbol{\varphi}_{g1} \right\rangle = 0 \tag{9.12.66}$$

とかけるからである．

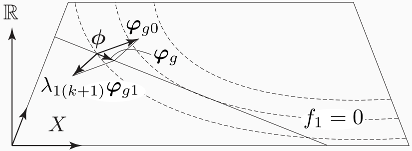
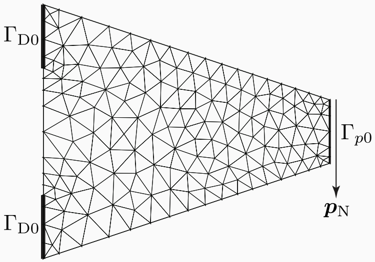
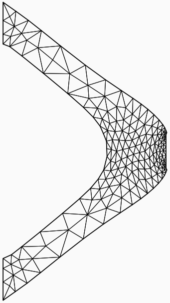


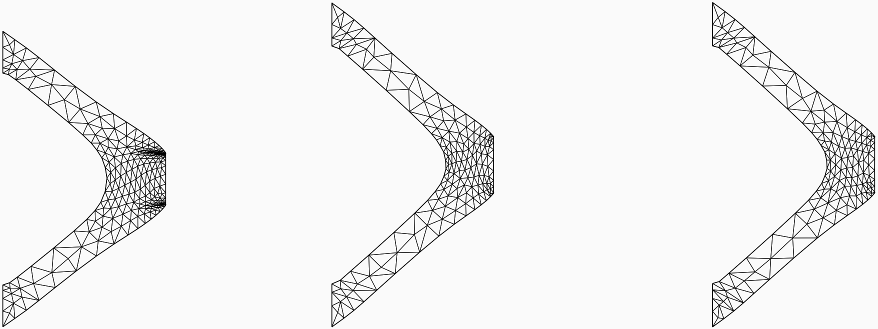
図 9.19: Lagrange 乗数 λ_1 のイメージ



(a) 初期密度と境界条件

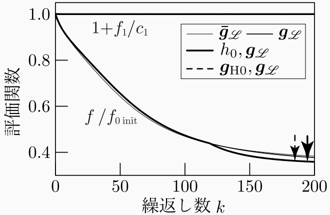


(b) H^1 勾配法 ($\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathscr{L}}$)

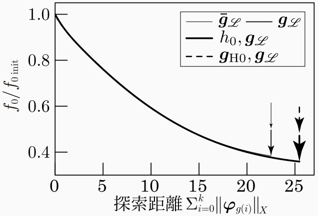


(c) H^1 勾配法 ($\boldsymbol{g}_{\mathscr{L}}$)　(d) H^1 Newton 法 ($h_0, \boldsymbol{g}_{\mathscr{L}}$)　(e) H^1 Newton 法 ($\boldsymbol{g}_{\mathrm{H}0}, \boldsymbol{g}_{\mathscr{L}}$)

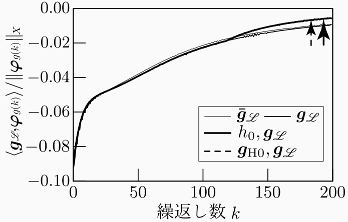
図 9.20: 平均コンプライアンス最小化問題に対する数値例: 形状 ($k = 200$)



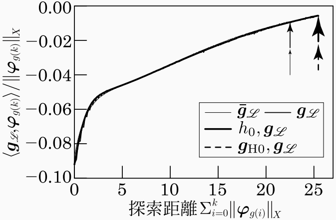
(a) 評価関数



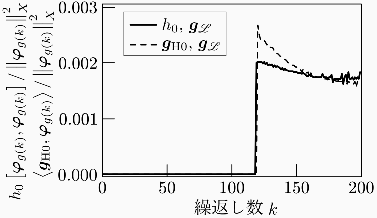
(b) 評価関数 (探索距離)



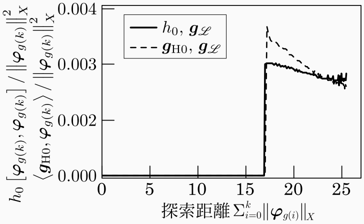
(c) f_0 の探索経路上勾配



(d) f_0 の探索経路上勾配 (探索距離)

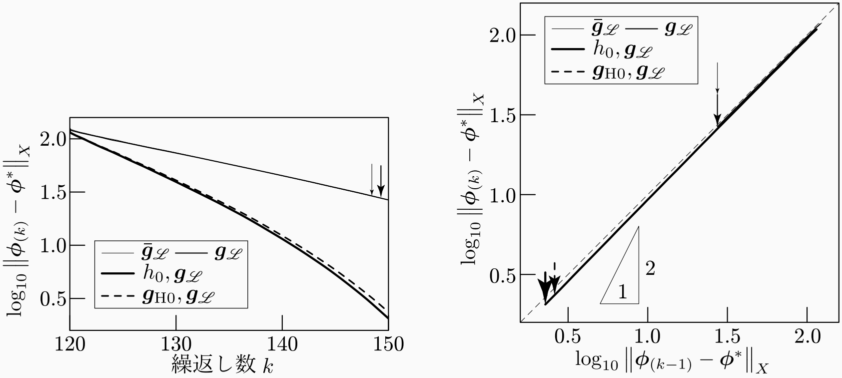


(e) f_0 の探索経路上 2 階微分



(f) f_0 の探索経路上 2 階微分 (探索距離)

図 9.21: 平均コンプライアンス最小化に対する数値例: 評価関数と探索経路に沿った評価関数の勾配と 2 階微分 ($\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathscr{L}}$: $\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathscr{L}}$ を用いた H^1 勾配法，$\boldsymbol{g}_{\mathscr{L}}$: $\boldsymbol{g}_{\mathscr{L}}$ を用いた H^1 勾配法，$h_0, \boldsymbol{g}_{\mathscr{L}}$: H^1 Newton 法，$\boldsymbol{g}_{\mathrm{H0}}, \boldsymbol{g}_{\mathscr{L}}$: Hesse 勾配を用いた H^1 Newton 法)



(a) 収束履歴　　(b) $(k-1)$ 回目対 k 回目の関係

図 9.22: 平均コンプライアンス最小化に対する数値例: 近似最小点 ϕ^* からの距離 $\left\| \boldsymbol{\phi}_{(k)} - \boldsymbol{\phi}^* \right\|_X$ ($\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathscr{L}}$: $\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathscr{L}}$ を用いた H^1 勾配法，$\boldsymbol{g}_{\mathscr{L}}$: $\boldsymbol{g}_{\mathscr{L}}$ を用いた H^1 勾配法，$h_0, \boldsymbol{g}_{\mathscr{L}}$: H^1 Newton 法，$\boldsymbol{g}_{\mathrm{H0}}, \boldsymbol{g}_{\mathscr{L}}$: Hesse 勾配を用いた H^1 Newton 法)

数値例を示そう．図 9.20 から図 9.22 には，2 次元線形弾性体のコートがけ問題とよばれる境界条件に対する平均コンプライアンス最小化の結果が示されている．図 9.20 (a) には初期形状と状態決定問題の境界条件が示されている．領域変動に対する境界条件は，式 (9.1.1) において $\bar{\Omega}_{\mathrm{C0}} = \Gamma_{\mathrm{D0}} \cup \Gamma_{p0}$ のように仮定された．ただし，接線方向にはうごけるものと仮定された．その際，p_{N} は境界測度共変であると仮定された．プログラムは，文献 [71] の例 37 を参考にして，有限要素法プログラミング言語 FreeFEM (`https://freefem.org/`) [34] でかかれている．線形弾性問題と H^1 勾配法あるいは H^1 Newton 法の有限要素法解析では三角形 2 次要素が使われた．また，H^1 Newton 法を用いた場合には，$k_{\mathrm{N}} = 120$ から H^1 Newton 法が開始された．式 (9.10.1) の c_a，k_{N}，式 (9.9.3) の c_Ω，式 (9.9.17) の $c_{\Omega 1}$ と $c_{\Omega 0}$，式 (9.10.8) の c_h および適合メッシュの誤差レベルを決めるパラメータ (errelas) の決め方によって結果は変化する．詳細はプログラムにゆずる [4]．

[4] 講義資料 `FreeFEM_program_chap_9.zip`

図 9.20 (b) から (d) は 4 つの方法 (境界積分型の $\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathscr{L}} = \bar{\boldsymbol{g}}_0 + \lambda_1 \bar{\boldsymbol{g}}_1$ を用いた H^1 勾配法，領域積分型の $\boldsymbol{g}_{\mathscr{L}} = \boldsymbol{g}_0 + \lambda_1 \boldsymbol{g}_1$ を用いた H^1 勾配法，h_0 と $\boldsymbol{g}_{\mathscr{L}}$ を用いた H^1 Newton 法，$\boldsymbol{g}_{\mathrm{H0}}$ と $\boldsymbol{g}_{\mathscr{L}}$ を用いた H^1 Newton 法) で得られた形状の結果を示す．

図 9.21 (a) は，初期形状のときの f_0 を表す $f_{0\mathrm{init}}$ と初期形状のときの体積に設定された c_1 で規準化された評価関数 $f_0/f_{0\mathrm{init}}$ と $1 + f_1/c_1$ の繰返し数 k に対する変化を示している．図 9.21 (b) は，それらの評価関数を，X 上の探索距離 $\sum_{i=0}^{k-1} \left\| \boldsymbol{\varphi}_{g(i)} \right\|_X$ に対して示している．図 9.21 (c) と (d) は，探索経路に沿って観測したときの f_0 の勾配 (すなわち Lagrange 関数 $\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \lambda_1 f_1$ の勾配) $\left\langle \boldsymbol{g}_{\mathscr{L}}, \boldsymbol{\varphi}_{g(k)} \right\rangle / \left\| \boldsymbol{\varphi}_{g(k)} \right\|_X$ の変化をそれぞれ繰返し数と探索距離に対して示している．さらに，図 9.21 (e) と (f) は，探索経路に沿って観測したと

きの f_0 の 2 階微分 $h_0\left[\boldsymbol{\varphi}_{g(k)}, \boldsymbol{\varphi}_{g(k)}\right] / \left\|\boldsymbol{\varphi}_{g(k)}\right\|_X^2$ (Hesse 勾配を用いた Newton 法の場合は $\left\langle \boldsymbol{g}_{\mathrm{H}0}, \boldsymbol{\varphi}_{g(k)}\right\rangle / \left\|\boldsymbol{\varphi}_{g(k)}\right\|_X^2$) の変化をそれぞれ繰返し数と探索距離に対して示している．ただし，i 回目の探索ベクトルのノルムを

$$\left\|\boldsymbol{\varphi}_{g(i)}\right\|_X = \left(\int_{\Omega(\phi)} \left\{\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_{g(i)}^{\top}\right) \cdot \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_{g(i)}^{\top}\right) + \boldsymbol{\varphi}_{g(i)} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{g(i)}\right\} \mathrm{d}x\right)^{1/2} \quad (9.12.67)$$

と定義した．PC を用いたときの $k = 200$ までの計算時間は，境界積分型 H^1 勾配法，領域積分型 H^1 勾配法，H^1 Newton 法，Hesse 勾配を用いた H^1 Newton 法に対して，それぞれ 24.443, 37.132, 46.026, 59.312 sec であった．

　これらの結果について，説明と考察を加えたい．図 9.21 (a) は，H^1 勾配法よりも H^1 Newton 法を使うことによって，繰返し数 k に対して評価関数の

収束が早まったようにみえる．しかしながら，実際は，H^1 Newton 法に切り替えた際に式 (9.9.17) の $c_{\Omega 1}$ と $c_{\Omega 0}$ を数値不安定現象が現れない程度に小さな値に置き換えている．その結果，ステップサイズが大きくなり，収束が早くなったと考えられる．この問題においては，H^1 Newton 法のプログラムにおいて c_h を 0 とおいた計算 (すなわち H^1 勾配法) を行うと，H^1 Newton 法のときよりも収束がはやくなる．その理由は，h_0 の項がないことによって，ステップサイズが大きくなるためであると考えられる．一般的には，ステップサイズを大きくとると H^1 Newton 法では計算可能であるが，H^1 勾配法では計算が破綻する傾向が観察される．また，最小点近傍の様子は，図 9.21 の (d) と (f) より観察される．これらのグラフより，探索経路に沿った f_0 の 2 階微分は正値をとり，局所最小点になっていることが確認される．

さらに，図 9.22 (a) には，H^1 Newton 法の繰返し数を指定された値よりもおおきくとったときの ϕ の数値解を近似最小点 ϕ^* とみなして，4 つの方法で得られた ϕ^* からの距離 $\left\|\phi_{(k)} - \phi^*\right\|_X$ を繰返し数 k に対して示している．この図から，H^1 Newton 法や Hesse 勾配を用いた H^1 Newton 法の結果は，収束次数が 1 次以上であることが確認される．しかしながら，繰返し数 $(k-1)$ 回目に対して k 回目の距離 $\left\|\phi_{(k)} - \phi^*\right\|_X$ をプロットした図 9.22 (b) (このグラフの勾配は，式 (3.8.13) を使って説明されたように，収束次数を表す) より，H^1 Newton 法の収束次数は，1 次よりは大きいが，2 次にはなっていないことが確認される．その理由として考えられることは，8.9.6 項の最後でもかいたように，H^1 Newton 法において，式 (9.9.16) 左辺の強圧性と正則性を補うために，本来の Hesse 形式に X 上の双 1 次形式 a_X を追加したため

に，H^1 Newton 法は本来の Newton 法とは異なる構造になっていたためであると考えられる．

9.13 Stokes 流れ場の形状最適化問題

流れ場への応用例として，Stokes 流れ場の平均流れ抵抗最小化問題をとりあげて，評価関数の形状微分を求める過程をみてみよう．初期領域 Ω_0 のイメージを図 9.23 に示す．領域変動に対する線形空間 X とその許容集合 $\mathcal{D}$ は 9.1 節のように定義されているものとする．

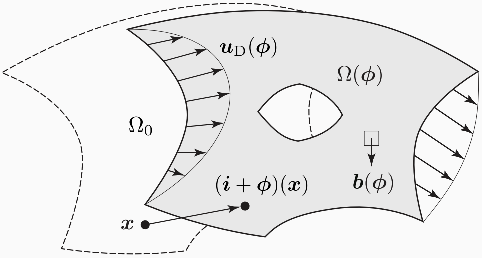


図 9.23: Stokes 流れ場に対する初期領域 $\Omega_0 \subset D$ と領域変動 (変位) ϕ

状態決定問題として Stokes 問題を考えよう．ここでは，問題 5.5.1 で使われた記号に加えて，形状最適化問題のために Stokes 問題を次のようにかきなおす．ここでも，解の一意存在が保証されるように，$\phi \in \mathcal{D}$ に対して，$\partial\Omega(\phi)$ を Dirichlet 境界として，$\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}} : \partial\Omega(\phi) \to \mathbb{R}^d$ を既知の流速とする．詳しい条件については，あとの式 (9.13.5) で示される．μ を粘性係数を表す正定数とする．のちに示される状態決定問題の解である流速 $\boldsymbol{u}$ に対して，$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}$ を $\tilde{u}$ とかく．このとき，$\tilde{u}$ が入る Hilbert 空間と許容集合をそれぞれ

$$U = \left\{ \boldsymbol{u} \in H^1\left(D; \mathbb{R}^d\right) \mid \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \partial\Omega(\phi) \right\}, \tag{9.13.1}$$

$$\mathcal{S} = U \cap W^{2,4}\left(D; \mathbb{R}^d\right) \tag{9.13.2}$$

とおく．また，圧力 p が入る実 Hilbert 空間と許容集合をそれぞれ

$$P = \left\{ q \in L^2 (D; \mathbb{R}) \,\middle|\, \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} q \,\mathrm{d}x = 0 \right\}, \tag{9.13.3}$$

$$\mathcal{Q} = P \cap W^{1,4} (D; \mathbb{R}) \tag{9.13.4}$$

とおく．既知関数に関しては，仮定 9.5.1 に対応して，

$$\boldsymbol{b} \in C^1_{\mathrm{S}'} \left(B; W^{1,4} \left(D; \mathbb{R}^d\right)\right), \quad \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}} \in C^1_{\mathrm{S}'} \left(B; U_{\mathrm{div}} \cap W^{2,4} \left(D; \mathbb{R}^d\right)\right) \tag{9.13.5}$$

で，かつ物質固定を仮定する．また，仮定 9.5.2 に対応して，

$$\boldsymbol{b} \in C^1_{\mathrm{S}^*} \left(B; W^{1,2q_{\mathrm{R}}} \left(D; \mathbb{R}^d\right)\right), \quad \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}} \in C^1_{\mathrm{S}^*} \left(B; U_{\mathrm{div}} \cap W^{2,2q_{\mathrm{R}}} \left(D; \mathbb{R}^d\right)\right) \tag{9.13.6}$$

で，かつ空間固定を仮定する．ただし，

$$U_{\mathrm{div}} = \left\{ \boldsymbol{u} \in H^1\left(D; \mathbb{R}^d\right) \;\middle|\; \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = 0 \text{ in } D \right\}$$

とする．また，$q_{\mathrm{R}} > d$ とする．

ここでも，$(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{u} = \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\top}\right)^{\top} \boldsymbol{\nu}$ を $\partial_\nu \boldsymbol{u}$ とかくことにする．このとき，状態決定問題を次のように定義する．

問題 9.13.1 (Stokes 問題)

$\phi \in \mathcal{D}$ に対して $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}$ および μ が与えられたとき，

$$
\begin{aligned}
-\boldsymbol{\nabla}^{\top}\left(\mu \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^{\top}\right)+\boldsymbol{\nabla}^{\top} p=\boldsymbol{b}^{\top}(\phi) \quad & \text{in } \Omega(\phi), \\
\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}=0 \quad & \text{in } \Omega(\phi), \\
\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}(\phi) \quad & \text{on } \partial \Omega(\phi), \\
\int_{\Omega(\phi)} p \mathrm{d} x=0 &
\end{aligned}
$$

を満たす $(\boldsymbol{u}, p): \Omega(\phi) \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ を求めよ．

あとのために，Stokes 問題の弱形式 (問題 5.5.2) と Dirichlet 境界条件を参照して，問題 9.13.1 に対する Lagrange 関数を

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{\mathrm{S}}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}, q\right) \\
&\quad = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \left\{-\mu \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^{\top} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}^{\top}\right) + p \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} + q \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v}\right\} \mathrm{d}x \\
&\qquad + \int_{\partial\Omega(\boldsymbol{\phi})} \left\{(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot (\mu \partial_{\nu} \boldsymbol{v} - q \boldsymbol{\nu}) + \boldsymbol{v} \cdot (\mu \partial_{\nu} \boldsymbol{u} - p \boldsymbol{\nu})\right\} \mathrm{d}\gamma
\end{aligned}
\tag{9.13.7}
$$

とおく．ただし，$(\boldsymbol{u}, p)$ は問題 9.13.1 の解とはかぎらないとする．$(\boldsymbol{v}, q)$ は Lagrange 乗数として導入された $U \times P$ の要素とする．$(\boldsymbol{u}, p)$ が問題 9.13.1 の解のとき，任意の $(\boldsymbol{v}, q) \in U \times P$ に対して，

$$\mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}, q) = 0$$

が成り立つ．この式は，問題 9.13.1 の弱形式と同値である．

形状最適化問題を定義しよう．評価関数を次のように定義する．問題 9.13.1 の解 $(\boldsymbol{u}, p)$ に対して，

$$f_0\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p\right) = -\int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega(\boldsymbol{\phi})} \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}} \cdot \left(\mu \partial_\nu \boldsymbol{u} - p\boldsymbol{\nu}\right) \mathrm{d}\gamma \tag{9.13.8}$$

を平均流れ抵抗とよぶ．その理由は 8.10.2 項で説明されたとおりである．

また，

$$f_1\left(\boldsymbol{\phi}\right) = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \mathrm{d}x - c_1 \tag{9.13.9}$$

を領域の大きさ制約に対する評価関数とよぶ．ただし，c_1 は，ある $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}$ に対して $f_1\left(\boldsymbol{\phi}\right) \leq 0$ が成り立つような正定数とする．

平均流れ抵抗最小化問題を次のように定義する．

問題 9.13.2 (平均流れ抵抗最小化問題)

$\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$ および $\mathcal{Q}$ をそれぞれ式 (9.1.3), 式 (9.13.2) および 式 (9.13.4) とする．f_0 と f_1 をそれぞれ式 (9.13.8) と式 (9.13.9) とする．このとき，

$$\min_{(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}},p)\in\mathcal{D}\times\mathcal{S}\times\mathcal{Q}} \{ f_0(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u},p) \mid f_1(\boldsymbol{\phi}) \le 0,\ \text{問題 9.13.1}\}$$

を満たす $\Omega(\boldsymbol{\phi})$ を求めよ．

$f_1(\phi)$ の形状微分はすでに式 (9.12.24) あるいは式 (9.12.58) でえられている．そこで，$f_0(\phi, \boldsymbol{u}, p)$ の形状微分のみを求めることにする．ここでも，関数の形状微分公式を用いる場合と関数の形状偏微分公式を用いる場合に分けてみていくことにしよう．関数の形状微分公式を用いる場合には，2 階形状微分までを求めてみる．それらのための準備として，$f_0(\phi, \boldsymbol{u})$ の Lagrange 関数を

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_0(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}_0, q_0) \\
&\quad = f_0(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p) - \mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}, q) \\
&\quad = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \left\{ \mu \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^{\top} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^{\top} - p \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{u}) - q_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} \right\} \mathrm{d}x \\
&\qquad - \int_{\partial\Omega(\boldsymbol{\phi})} \left\{ (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot (\mu \partial_{\nu} \boldsymbol{v}_0 - q_0 \boldsymbol{\nu}) + (\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot (\mu \partial_{\nu} \boldsymbol{u} - p \boldsymbol{\nu}) \right\} \mathrm{d}\gamma
\end{aligned}
\tag{9.13.10}
$$

とおく．ここで，$\mathscr{L}_{\mathrm{S}}$ は式 (9.13.7) で定義された状態決定問題の Lagrange 関数である．また，$(\boldsymbol{v}_0, q_0)$ は f_0 のために用意された状態決定問題に対する Lagrange 乗数で，$(\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}, q_0)$ が $U \times P$ の要素であると仮定する．

関数の形状微分公式を用いた形状微分

関数の形状微分公式を用いる場合には，次のようになる．ここでは，b と $\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}$ は物質固定であると仮定する．

このとき，$\mathscr{L}_0$ の Fréchet 微分は，任意の $(\boldsymbol{\varphi}, \hat{\boldsymbol{u}}, \hat{p}, \hat{\boldsymbol{v}}_0, \hat{q}_0) \in X \times (U \times P)^2$ に対して，

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}_0' (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}_0, q_0) [\boldsymbol{\varphi}, \hat{\boldsymbol{u}}, \hat{p}, \hat{\boldsymbol{v}}_0, \hat{q}_0] \\ &\quad = \mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}'} (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}_0, q_0) [\boldsymbol{\varphi}] + \mathscr{L}_{0\boldsymbol{u}p} (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}_0, q_0) [\hat{\boldsymbol{u}}, \hat{p}] \\ &\qquad + \mathscr{L}_{0\boldsymbol{v}_0 q_0} (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}_0, q_0) [\hat{\boldsymbol{v}}_0, \hat{q}_0] \end{aligned} \tag{9.13.11}$$

とかける．ただし，式 (9.3.5) と式 (9.3.15) の表記法にしたがうものとする．以下で各項について考察する．

式 (9.13.11) の右辺第 3 項は，

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{0\boldsymbol{v}_0 q_0}(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u},p,\boldsymbol{v}_0,q_0)[\hat{\boldsymbol{v}}_0,\hat{q}_0] &= -\mathscr{L}_{\mathrm{S}\boldsymbol{v}_0,q_0}(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u},p,\boldsymbol{v}_0,q_0)[\hat{\boldsymbol{v}}_0,\hat{q}_0] \\ &= -\mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u},p,\hat{\boldsymbol{v}}_0,\hat{q}_0) \end{aligned} \tag{9.13.12}$$

となる．式 (9.13.12) は状態決定問題 (問題 9.13.1) の Lagrange 関数になっている．そこで，$(\boldsymbol{u},p)$ が状態決定問題の弱解ならば，式 (9.13.11) の右辺第 3 項はゼロとなる．

また，式 (9.13.11) の右辺第 2 項は，$(\boldsymbol{u},p)$ の任意の変動 $(\hat{\boldsymbol{u}},\hat{p}) \in U \times P$ に対して，

$$\mathscr{L}_{0\boldsymbol{u}p}(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u},p,\boldsymbol{v}_0,q_0)[\hat{\boldsymbol{u}},\hat{p}]$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \left\{ \mu \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}'^{\top} \right) \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^{\top} - \hat{p} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{b} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} - q_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} \right\} \mathrm{d}x \\
&\quad - \int_{\partial\Omega(\boldsymbol{\phi})} \left\{ \hat{\boldsymbol{u}} \cdot (\mu \partial_{\nu} \boldsymbol{v}_0 - q_0 \boldsymbol{\nu}) + (\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot (\mu \partial_{\nu} \hat{\boldsymbol{u}} - \hat{p} \boldsymbol{\nu}) \right\} \mathrm{d}\gamma \\
&= -\mathscr{L}_{\mathrm{S}} \left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{v}_0, q_0, \hat{\boldsymbol{u}}, \hat{p} \right)
\end{aligned}
\tag{9.13.13}
$$

となる．そこで，自己随伴関係

$$
(\boldsymbol{u}, p) = (\boldsymbol{v}_0, q_0) \tag{9.13.14}
$$

が成り立つとき，式 (9.13.11) の右辺第 2 項はゼロとなる．

さらに，式 (9.13.11) の右辺第 1 項は，命題 9.3.4 の結果を表した式 (9.3.5) と，命題 9.3.7 の結果を表した式 (9.3.15) の公式より，

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{0\phi'}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}_0, q_0\right)[\boldsymbol{\varphi}] \\
&= \int_{\Omega(\phi)} \left[-\mu \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^\top\right) - \mu \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^\top \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top\right)\right. \\
&\qquad + p \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}^\top \boldsymbol{\nabla}\right) \cdot \boldsymbol{v}_0 + q_0 \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}^\top \boldsymbol{\nabla}\right) \cdot \boldsymbol{u} \\
&\qquad \left. + \left\{\mu \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^\top - p \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}_0 - q_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} - \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}_0)\right\} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}\right] \mathrm{d}x \\
&\quad - \int_{\partial\Omega(\phi)} \left[\left\{(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot \boldsymbol{w}\left(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{v}_0, q_0\right) + (\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot \boldsymbol{w}\left(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{u}, p\right)\right\}\right. \\
&\qquad + \left\{(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot \left(\mu \partial_\nu \boldsymbol{v}_0 - q_0 \boldsymbol{\nu}\right)\right.
\end{aligned}
$$

$$+\left(\boldsymbol{v}_0-\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}\right)\cdot\left(\mu\partial_\nu\boldsymbol{u}-p\boldsymbol{\nu}\right)\Big\}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}\right)_\tau\Big]\mathrm{d}\gamma$$

となる．ただし，

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{w}\left(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{u},p\right)\\&=\left\{\left(\mu\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top\right)^\top-p\boldsymbol{I}\right\}\left[\left\{\boldsymbol{\nu}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^\top\boldsymbol{\nu}\right)\right\}\boldsymbol{\nu}-\left\{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^\top+\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^\top\right)^\top\right\}\boldsymbol{\nu}\right]\end{aligned} \tag{9.13.15}$$

とおいた．$\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}\right)_\tau$ は式 (9.2.6) にしたがう．$\boldsymbol{I}$ は d 次の単位行列を表す．さらに，

$$\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^\top\boldsymbol{\nabla}\right)\cdot\boldsymbol{v}_0=\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^\top\right)^\top\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^\top=\boldsymbol{I}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^\top\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^\top\right) \tag{9.13.16}$$

が成り立つことを使えば，

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}'}\left(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u},p,\boldsymbol{v}_0,q_0\right)[\boldsymbol{\varphi}]\\
&\quad=\int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})}\Big[-\left(\mu\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top-p\boldsymbol{I}\right)\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^\top\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^\top\right)-\left(\mu\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^\top-q_0\boldsymbol{I}\right)\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^\top\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top\right)\\
&\qquad\quad+\left\{\left(\mu\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top-p\boldsymbol{I}\right)\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^\top-q_0\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}-\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}_0)\right\}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}\Big]\mathrm{d}x\\
&\qquad-\int_{\partial\Omega(\boldsymbol{\phi})}\Big[\{(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}})\cdot\boldsymbol{w}\left(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{v}_0,q_0\right)+(\boldsymbol{v}_0-\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}})\cdot\boldsymbol{w}\left(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{u},p\right)\}\\
&\qquad\quad+\Big\{(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}})\cdot\left(\mu\partial_\nu\boldsymbol{v}_0-q_0\boldsymbol{\nu}\right)\\
&\qquad\quad+(\boldsymbol{v}_0-\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}})\cdot\left(\mu\partial_\nu\boldsymbol{u}-p\boldsymbol{\nu}\right)\Big\}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}\right)_\tau\Big]\mathrm{d}\gamma
\end{aligned}
\tag{9.13.17}
$$

となる．

以上の結果をふまえて，$(\boldsymbol{u}, p)$ が問題 9.13.1 の弱解で自己随伴関係 (式 (9.13.14)) が成り立つと仮定する．このとき，問題 9.13.1 の Dirichlet 条件と連続の式が成り立つことから，$\tilde{f}_0$ に対して式 (7.5.15) の表記を用いて，

$$\begin{aligned}\tilde{f}_0'(\boldsymbol{\phi})[\boldsymbol{\varphi}] &= \mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}'}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}_0, q_0)[\boldsymbol{\varphi}] = \langle \boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{\varphi} \rangle \\ &= \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \left(\boldsymbol{G}_{\Omega 0} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}^\top + g_{\Omega 0} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi} \right) \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{9.13.18}$$

のようにかかれる．ここで，

$$\boldsymbol{G}_{\Omega 0} = -2 \left(\mu \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top - p \boldsymbol{I} \right) \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top \right)^\top, \tag{9.13.19}$$

$$g_{\Omega 0} = \mu \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top - 2 \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u} \tag{9.13.20}$$

となる．

以上の結果から，式 (9.13.18) の g_0 について定理 9.8.2 と同様の結果が得られる．

関数の形状微分公式を用いた 2 階形状微分

さらに，平均流れ抵抗 f_0 の 2 階形状微分を求めてみよう．ここでは，関数の形状微分公式を用いて，9.8.2 項で示された手続きに沿ってみていくことにする．

仮定 9.8.3 の (1) に対応して，ここでは，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d}$ を仮定する．仮定 9.8.3 の (2) に対応する関係はここでは満たされている．また，仮定 9.8.3 の (3) は不要である．

f_0 の Lagrange 関数 $\mathscr{L}_0$ は式 (9.13.10) によって定義されている．$(\phi, \boldsymbol{u}, p)$ を設計変数とみなし，その許容集合と許容方向集合を

$$
\begin{aligned}
&S = \left\{ (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S} \times \mathcal{Q} \mid \mathscr{L}_{\mathrm{S}} (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}, q) = 0 \text{ for all } (\boldsymbol{v}, q) \in U \times P \right\}, \\
&T_S (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p) = \{ (\boldsymbol{\varphi}, \hat{\boldsymbol{v}}, \hat{\pi}) \in X \times U \times P \mid \\
&\qquad \mathscr{L}_{\mathrm{S}\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{u}p} (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}, q) [\boldsymbol{\varphi}, \hat{\boldsymbol{v}}, \hat{\pi}] = 0 \text{ for all } (\boldsymbol{v}, q) \in U \times P \}
\end{aligned}
$$

とおく．このとき，$(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p) \in S$ の任意変動 $(\boldsymbol{\varphi}_1, \hat{\boldsymbol{v}}_1, \hat{\pi}_1), (\boldsymbol{\varphi}_2, \hat{\boldsymbol{v}}_2, \hat{\pi}_2) \in T_S (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p)$ に対する $\mathscr{L}_0$ の 2 階 Fréchet 偏微分は，式 (9.1.6) を考慮して，

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{0(\boldsymbol{\phi}', \boldsymbol{u}, p)(\boldsymbol{\phi}', \boldsymbol{u}, p)} (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}_0, q_0) [(\boldsymbol{\varphi}_1, \hat{\boldsymbol{v}}_1, \hat{\pi}_1), (\boldsymbol{\varphi}_2, \hat{\boldsymbol{v}}_2, \hat{\pi}_2)] \\
&\quad = \left(\mathscr{L}_{0(\boldsymbol{\phi}', \boldsymbol{u}, p)} \right)_{(\boldsymbol{\phi}', \boldsymbol{u}, p)} (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}_0, q_0) [(\boldsymbol{\varphi}_1, \hat{\boldsymbol{v}}_1, \hat{\pi}_1), (\boldsymbol{\varphi}_2, \hat{\boldsymbol{v}}_2, \hat{\pi}_2)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \left\langle \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{\phi}\right), \boldsymbol{t}\left(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2\right)\right\rangle \\
&= \left(\mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}'}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}_0, q_0\right)\left[\boldsymbol{\varphi}_1\right] + \mathscr{L}_{0\boldsymbol{u}p}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}_0, q_0\right)\left[\hat{\boldsymbol{v}}_1, \hat{\pi}_1\right]\right)_{\boldsymbol{\phi}'}\left[\boldsymbol{\varphi}_2\right] \\
&\quad + \left(\mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}'}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}_0, q_0\right)\left[\boldsymbol{\varphi}_1\right] + \mathscr{L}_{0\boldsymbol{u}p}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0\right)\left[\hat{\boldsymbol{v}}_1, \hat{\pi}_1\right]\right)_{\boldsymbol{u}p}\left[\hat{\boldsymbol{v}}_2, \hat{\pi}_2\right] \\
&\quad + \left\langle \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{\phi}\right), \boldsymbol{t}\left(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2\right)\right\rangle \\
&= \left(\mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}'}\right)_{\boldsymbol{\phi}'}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}_0, q_0\right)\left[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2\right] + \mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}'\boldsymbol{u}p}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}_0, q_0\right)\left[\boldsymbol{\varphi}_1, \hat{\boldsymbol{v}}_2, \hat{\pi}_2\right] \\
&\quad + \mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}'\boldsymbol{u}p}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}_0, q_0\right)\left[\boldsymbol{\varphi}_2, \hat{\boldsymbol{v}}_1, \hat{\pi}_1\right] \\
&\quad + \mathscr{L}_{0\boldsymbol{u}p\boldsymbol{u}p}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}_0, q_0\right)\left[\hat{\boldsymbol{v}}_1, \hat{\pi}_1, \hat{\boldsymbol{v}}_2, \hat{\pi}_2\right] \\
&\quad + \left\langle \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{\phi}\right), \boldsymbol{t}\left(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2\right)\right\rangle
\end{aligned}
\tag{9.13.21}
$$

となる．ただし，$\left\langle \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{\phi}\right), \boldsymbol{t}\left(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2\right)\right\rangle$ は式 (9.1.8) の定義に従う．

ここで，式 (9.13.21) の右辺第 1 項と第 5 項は，式 (9.13.17) に問題 9.13.1 の Dirichlet 条件と連続の式および $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d}$ を代入した式を用いて，

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}'}\right)_{\boldsymbol{\phi}'}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}_0, q_0\right)\left[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2\right] + \left\langle \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{\phi}\right), \boldsymbol{t}\left(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2\right)\right\rangle \\
&= \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \Big[\left\{-\left(\mu \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top - p\boldsymbol{I}\right) \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^\top\right)\right\}_{\boldsymbol{\phi}'}\left[\boldsymbol{\varphi}_2\right] \\
&\qquad + \left\{-\left(\mu \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^\top - q_0 \boldsymbol{I}\right) \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top\right)\right\}_{\boldsymbol{\phi}'}\left[\boldsymbol{\varphi}_2\right] \\
&\qquad + \mu \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^\top \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1\right)_{\boldsymbol{\phi}'}\left[\boldsymbol{\varphi}_2\right] \\
&\qquad - 2\left(\mu \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top - p\boldsymbol{I}\right)\left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top\right)^\top \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top - \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2\right)\right) \\
&\qquad + \mu \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top \left\{\left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top\right)^\top \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top - \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2\right)\left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1\right)\right\}\Big] \mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{9.13.22}
$$

となる．式 (9.13.22) 右辺の被積分関数第 1 項は，

$$
\begin{aligned}
&\left\{-\left(\mu\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top - p\boldsymbol{I}\right)\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^\top\right)\right\}_{\phi'}[\boldsymbol{\varphi}_2] \\
&\quad = \left\{\left(\mu\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top - p\boldsymbol{I}\right)\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^\top\right)\right\}_{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top\right) \\
&\qquad + \left\{\left(\mu\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top - p\boldsymbol{I}\right)\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^\top\right)\right\}_{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top\right) \\
&\qquad + \left\{\left(\mu\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top - p\boldsymbol{I}\right)\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^\top\right)\right\}_{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^\top}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^\top\right) \\
&\qquad - \left\{\left(\mu\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top - p\boldsymbol{I}\right)\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^\top\right)\right\}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_2 \\
&\quad = \mu\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top\right)\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^\top\right) \\
&\qquad + \left(\mu\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top - p\boldsymbol{I}\right)\cdot\left\{\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^\top\right)+\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^\top\right)\right\} \\
&\qquad - \left\{\left(\mu\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top - p\boldsymbol{I}\right)\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^\top\right)\right\}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_2
\end{aligned}
\tag{9.13.23}
$$

となる．同様に，式 (9.13.22) 右辺の被積分関数第 2 項は，第 1 項において $(\boldsymbol{u}, p)$ と $(\boldsymbol{v}_0, q_0)$ をいれかえたものとなる．式 (9.13.22) 右辺の被積分関数第 3 項は，

$$
\begin{aligned}
&\mu \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^\top \left\{ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \right\}_{\boldsymbol{\phi}'} [\boldsymbol{\varphi}_2] \\
&\quad = \mu \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^\top \left\{ - \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \right)^\top \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top + \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 \right) \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \right) \right\}
\end{aligned} \tag{9.13.24}
$$

となる．そこで，式 (9.13.22) は，自己随伴関係を用いて，

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}'} \right)_{\boldsymbol{\phi}'} (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}_0, q_0) [\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2] + \left\langle \boldsymbol{g} (\boldsymbol{\phi}), \boldsymbol{t} (\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2) \right\rangle \\
&\quad = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \Big[\mu \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top \right) \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^\top \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \left(\mu \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top - p \boldsymbol{I}\right) \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^\top\right) \\
&+ \mu \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^\top\right) \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top\right) \\
&+ \left(\mu \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^\top - q_0 \boldsymbol{I}\right) \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top\right) \Big] \mathrm{d}x \qquad (9.13.25)
\end{aligned}
$$

となる．

次に，式 (9.13.21) の右辺第 2 項を考える．式 (9.13.17) に問題 9.13.1 の Dirichlet 条件と連続の式および $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d}$ を代入した式を用いて，

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}'\boldsymbol{u}p}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}_0, q_0\right)\left[\boldsymbol{\varphi}_1, \hat{\boldsymbol{v}}_2, \hat{\pi}_2\right] \\
&\quad = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \Big[- \left(\mu \boldsymbol{\nabla} \hat{\boldsymbol{v}}_2^\top - \hat{\pi}_2 \boldsymbol{I}\right) \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^\top\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \left(\mu \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^\top - q_0 \boldsymbol{I}\right) \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla} \hat{\boldsymbol{v}}_2^\top\right) \\
&+ \left\{\mu \left(\boldsymbol{\nabla} \hat{\boldsymbol{v}}_2^\top - \hat{\pi}_2 \boldsymbol{I}\right) \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^\top - q_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{v}}_2\right\} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1\Big] \mathrm{d}x \qquad (9.13.26)
\end{aligned}
$$

となる．

一方，$j \in \{1, 2\}$ を用いて，任意の領域変動 $\boldsymbol{\varphi}_j \in Y$ に対して，状態決定問題を満たす $(\boldsymbol{u}, p)$ の変動を $(\hat{\boldsymbol{v}}_j, \hat{\pi}_j) = (\boldsymbol{v}' (\boldsymbol{\phi}) [\boldsymbol{\varphi}_j], \pi' (\boldsymbol{\phi}) [\boldsymbol{\varphi}_j])$ とかくことにする．式 (9.13.7) で定義された状態決定問題の Lagrange 関数 $\mathscr{L}_{\mathrm{S}}$ の Fréchet 偏微分をとれば，

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{\mathrm{S}\boldsymbol{\phi}' \boldsymbol{u} p} (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}, q) [\boldsymbol{\varphi}_j, \hat{\boldsymbol{v}}_j, \hat{\pi}_j] \\
&\quad = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \Big[\mu \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_j^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top\right) \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}^\top\right) + \mu \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_j^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}^\top\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- p\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_j^\top\boldsymbol{\nabla}\right)\cdot\boldsymbol{v} - q\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_j^\top\boldsymbol{\nabla}\right)\cdot\boldsymbol{u}\\
&+ \left\{-\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top\cdot\left(\mu\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}^\top - q\boldsymbol{I}\right) + p\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right\}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_j\\
&- \left(\boldsymbol{\nabla}\hat{\boldsymbol{v}}_j^\top\right)\cdot\left(\mu\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}^\top - q\boldsymbol{I}\right) + \hat{\pi}_j\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\Big]\mathrm{d}x\\
= \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})}&\Bigg[\Bigg\{\mu\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_j^\top + \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_j^\top\right)^\top - \left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_j\right)\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top - \mu\boldsymbol{\nabla}\hat{\boldsymbol{v}}_j^\top\\
&+ \hat{\pi}_j\boldsymbol{I} + p\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_j\right)\boldsymbol{I} - p\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_j^\top\right)^\top\Bigg\}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}^\top\\
&+ q\left\{-\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_j^\top\boldsymbol{\nabla}\right)\cdot\boldsymbol{u} + \left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}\right)\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_j\right) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}_j\right\}\Bigg]\mathrm{d}x\\
= 0 &
\end{aligned}
\tag{9.13.27}
$$

となる．式 (9.13.27) より，任意の $(\boldsymbol{v}, q) \in U \times P$ に対して，

$$\boldsymbol{\nabla} \hat{\boldsymbol{v}}_j^\top = \left\{ \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_j^\top + \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_j^\top \right)^\top - \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_j \right\} \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top, \tag{9.13.28}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{v}}_j = \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_j^\top \boldsymbol{\nabla} \right) \cdot \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}) (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_j), \tag{9.13.29}$$

$$\hat{\pi}_j \boldsymbol{I} = -p (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_j) \boldsymbol{I} - p \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_j^\top \right)^\top \tag{9.13.30}$$

が成り立つ．そこで，式 (9.13.26) の $\hat{\boldsymbol{v}}_2$ と $\hat{\pi}_2$ にそれぞれ式 (9.13.28) から式 (9.13.30) を満たす $\hat{\boldsymbol{v}}_2$ と $\hat{\pi}_2$ を代入すれば，

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}'\boldsymbol{u}p} (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}_0, q_0) [\boldsymbol{\varphi}_1, \hat{\boldsymbol{v}}_2, \hat{\pi}_2] \\
&\quad = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \Big[- \Big\{ \Big(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top + \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \right)^\top - \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 \Big) \left(\mu \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ p\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_2\right)\boldsymbol{I} - p\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top\right)^\top\Big\}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^\top\right)\\
&- \left(\mu\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^\top - q_0\boldsymbol{I}\right)\cdot\left\{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top + \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top\right)^\top - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_2\right)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top\right\}\\
&+ \Big\{\Big(\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top + \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top\right)^\top - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_2\right)\left(\mu\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top\right)\\
&+ p\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_2\right)\boldsymbol{I} - p\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top\right)^\top\Big)\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_0^\top - q_0\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top\right)^\top\Big\}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_1\Big]\mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{9.13.31}
$$

となる．同様に，式 (9.13.21) の右辺第 3 項は，式 (9.13.31) において $\boldsymbol{\varphi}_1$ と $\boldsymbol{\varphi}_2$ をいれかえたものとなる．式 (9.13.21) の右辺第 4 項はゼロとなる．

以上の結果をまとめれば，$\tilde{f}_0$ の 2 階形状微分は，

$$
\begin{aligned}
&h_0(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2] \\
&= \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \Big[-2\left(\mu \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top\right)(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2)(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1) \\
&\qquad - \left\{\left(\mu \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top - p \boldsymbol{I}\right)\left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top\right)^\top\right\} \cdot \left\{\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top + \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \right. \\
&\qquad\quad + \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top\right)^\top + \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top\right)^\top \\
&\qquad\quad \left. - 4 \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 - 4 \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 \right\} \Big] \mathrm{d}x \qquad (9.13.32)
\end{aligned}
$$

となる．

Lagrange 乗数法による評価関数の 2 階形状微分

Lagrange 乗数法を用いて平均流れ抵抗 f_0 の 2 階形状微分を求める場合には，次のようになる．式 (9.13.18) の $\tilde{f}_0'(\phi)[\varphi_1] = \langle \boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{\varphi}_1 \rangle$ に対する Lagrange 関数を

$$\mathscr{L}_{\mathrm{I0}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{w}_0, r_0) = \langle \boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{\varphi}_1 \rangle - \mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{w}_0, r_0) \tag{9.13.33}$$

とおく．ここで，$\mathscr{L}_{\mathrm{S}}$ は式 (9.13.7) で与えられる．$(\boldsymbol{w}_0, r_0) \in U \times P$ は，$\boldsymbol{g}_0$ が $(\boldsymbol{u}, p)$ の関数であるために用意された随伴変数である．$\boldsymbol{\varphi}_1$ は $\mathscr{L}_{\mathrm{I0}}$ においては定ベクトルとみなす．

$(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{w}_0, r_0)$ の任意変動 $(\boldsymbol{\varphi}_2, \hat{\boldsymbol{u}}, \hat{p}, \hat{\boldsymbol{w}}_0, \hat{r}_0) \in Y \times (U \times P)^2$ に対する $\mathscr{L}_{\mathrm{I}0}$ の Fréchet 微分は，式 (9.1.6) を考慮して，

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{\mathrm{I}0}' (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{w}_0, r_0) [\boldsymbol{\varphi}_2, \hat{\boldsymbol{u}}, \hat{p}, \hat{\boldsymbol{w}}_0, \hat{r}_0] \\
&\quad = \mathscr{L}_{\mathrm{I}0\boldsymbol{\phi}'} (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{w}_0, r_0) [\boldsymbol{\varphi}_2] + \langle \boldsymbol{g}_0 (\boldsymbol{\phi}), \boldsymbol{t} (\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2) \rangle \\
&\qquad + \mathscr{L}_{\mathrm{I}0\boldsymbol{u}p} (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{w}_0, r_0) [\hat{\boldsymbol{u}}, \hat{p}] \\
&\qquad + \mathscr{L}_{\mathrm{I}0\boldsymbol{w}_0 r_0} (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{w}_0, r_0) [\hat{\boldsymbol{w}}_0, \hat{r}_0]
\end{aligned}
\tag{9.13.34}
$$

となる．式 (9.13.34) の右辺第 4 項は，$(\boldsymbol{u}, p)$ が状態決定問題の解ならばゼロとなる．

また，式 (9.13.34) の右辺第 3 項は，

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{\mathrm{I}0\boldsymbol{u}p}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{w}_0, r_0)[\hat{\boldsymbol{u}}, \hat{p}] \\
&= \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \Big[-2 \Big\{ \Big(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top + (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top)^\top - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_1 \Big) \mu \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top + p (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top)^\top \Big\} \cdot \boldsymbol{\nabla}\hat{\boldsymbol{u}}^\top \\
&\qquad + 2 (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_1) \boldsymbol{b}\cdot\hat{\boldsymbol{u}} + 2\hat{p} (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top)^\top \cdot (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top) \\
&\qquad + \mu \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{w}_0^\top \cdot (\boldsymbol{\nabla}\hat{\boldsymbol{u}}^\top) - \hat{p}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{w}_0^\top - r_0 \boldsymbol{\nabla}\cdot\hat{\boldsymbol{u}} \Big] \mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{9.13.35}
$$

となる．そこで，$\boldsymbol{u}$ は連続の式を満たし，任意の $(\hat{\boldsymbol{u}}, \hat{p}) \in U \times P$ に対して式 (9.13.35) がゼロとなる条件は，$(\hat{\boldsymbol{w}}_0, \hat{r}_0)$ を次の随伴問題の解とおくこととと同値である．ただし，$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_0$ の連続の式が使われた．

問題 9.13.3 ($\langle g_0, \varphi_1 \rangle$ に対する $(\boldsymbol{w}_0, r_0)$ の随伴問題)

問題 9.13.2 の仮定のもとで，$\boldsymbol{\varphi}_1 \in Y$ が与えられたとき，

$$
\begin{aligned}
-\boldsymbol{\nabla}^\top \left(\mu \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{w}_0^\top\right) + \boldsymbol{\nabla}^\top r_0 = -2\boldsymbol{\nabla}^\top \Big\{ \Big(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top + \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top\right)^\top - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_1 \Big) \mu \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top & \\
+ p \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top\right)^\top \Big\} - 2\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_1\right)\boldsymbol{b}^\top \quad & \text{in } \Omega(\boldsymbol{\phi}), \\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{w}_0 = 2\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top\right)^\top \cdot \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top \quad & \text{in } \Omega(\boldsymbol{\phi}), \\
\boldsymbol{w}_0 = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d} \quad & \text{on } \partial\Omega(\boldsymbol{\phi}), \\
\int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} r_0 \, \mathrm{d}x = 0 &
\end{aligned}
$$

を満たす $(\boldsymbol{w}_0, r_0) = (\boldsymbol{w}_0(\boldsymbol{\varphi}_1), r_0(\boldsymbol{\varphi}_1)) \in U \times P$ を求めよ．

さらに，式 (9.13.34) の右辺第 1 項と第 2 項は，任意の $\varphi_1 \in Y$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{\mathrm{I}0\boldsymbol{\phi}'}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{w}_0, r_0\right)\left[\boldsymbol{\varphi}_2\right] + \left\langle \boldsymbol{g}_0\left(\boldsymbol{\phi}\right), \boldsymbol{t}\left(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2\right)\right\rangle \\
&\quad = \left(\mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}'}\right)_{\boldsymbol{\phi}'}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{u}, p\right)\left[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2\right] + \left\langle \boldsymbol{g}_0\left(\boldsymbol{\phi}\right), \boldsymbol{t}\left(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2\right)\right\rangle \\
&\qquad - \mathscr{L}_{\mathrm{S}\boldsymbol{\phi}'}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{w}_0, r_0\right)\left[\boldsymbol{\varphi}_2\right]
\end{aligned} \tag{9.13.36}
$$

となる．ここで，式 (9.13.36) の右辺第 1 項と第 2 項は，式 (9.13.25) で与えられる．また，式 (9.13.36) の右辺第 3 項は，

$$
\begin{aligned}
&- \mathscr{L}_{\mathrm{S}\boldsymbol{\phi}'}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{w}_0, r_0\right)\left[\boldsymbol{\varphi}_2\right] \\
&\quad = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \Big[\left(\mu \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top - p\boldsymbol{I}\right) \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{w}_0^\top\right) + \left(\mu \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{w}_0^\top - r_0 \boldsymbol{I}\right) \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2^\top \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top\right)
\end{aligned}
$$

$$+\left\{\left(\mu\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top - p\boldsymbol{I}\right)\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{w}_0^\top - r_0\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} - \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{w}_0\right\}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_2\Big]\mathrm{d}x \tag{9.13.37}$$

となる．

そこで，$(\boldsymbol{u}, p)$ と $(\boldsymbol{w}_0, r_0)$ はそれぞれ問題 9.13.1 と問題 9.12.3 の弱解であるとする．このときの $f_0(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p)$ を $\tilde{f}_0(\boldsymbol{\phi})$ とかくことにすれば，

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{\mathrm{I0}\boldsymbol{\phi}'}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{w}_0\left(\boldsymbol{\varphi}_1\right), r_0\left(\boldsymbol{\varphi}_1\right)\right)\left[\boldsymbol{\varphi}_2\right] + \left\langle \boldsymbol{g}_0\left(\boldsymbol{\phi}\right), \boldsymbol{t}\left(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2\right)\right\rangle \\
&\quad = \tilde{f}_0''\left(\boldsymbol{\phi}\right)\left[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2\right] = \left\langle \boldsymbol{g}_{\mathrm{H0}}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\varphi}_1\right), \boldsymbol{\varphi}_2\right\rangle \\
&\quad = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})}\Big[2\mu\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top\right)\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+2\left\{\left(\mu\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top - p\boldsymbol{I}\right)\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top\right)^\top\right\}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top\right)\\
&-\left\{\left(\mu\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top - p\boldsymbol{I}\right)\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{w}_0^\top\left(\boldsymbol{\varphi}_1\right)\right)^\top + \left(\mu\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{w}_0^\top\left(\boldsymbol{\varphi}_1\right) - r_0\boldsymbol{I}\right)\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top\right)^\top\right\}\\
&\quad\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^\top\right)\\
&+\left\{\left(\mu\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top - p\boldsymbol{I}\right)\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{w}_0^\top\left(\boldsymbol{\varphi}_1\right) - \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{w}_0\left(\boldsymbol{\varphi}_1\right)\right\}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_2\Big]\,\mathrm{d}x \qquad (9.13.38)
\end{aligned}
$$

となる．ここで，$g_{\mathrm{H}0}$ は平均流れ抵抗の Hesse 勾配である．

なお，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d}$ を仮定すれば，問題 9.13.3 の解 $(\boldsymbol{w}_0, r_0)$ について，

$$
\begin{aligned}
\mu\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{w}_0^\top\left(\boldsymbol{\varphi}_1\right) - r_0\boldsymbol{I} = 2&\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top + \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top\right)^\top - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_1\right)\mu\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top\\
&+2p\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^\top\right)^\top, \qquad (9.13.39)
\end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{w}_0^{\top} (\boldsymbol{\varphi}_1) = 2 \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^{\top} + \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^{\top} \right)^{\top} - \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \right) \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^{\top} \tag{9.13.40}$$

が成り立つ．式 (9.13.39) と式 (9.13.40) を式 (9.13.38) に代入し，$h_0 (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}_0, q_0) [\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2] = h_0 (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}_0, q_0) [\boldsymbol{\varphi}_2, \boldsymbol{\varphi}_1]$ が成り立つことを用いれば，式 (9.13.38) は式 (9.13.32) と一致することが確かめられる．

関数の形状偏微分公式を用いた形状微分

関数の形状偏微分公式を用いる場合には，次のようになる．ここでは，b と $\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}$ は空間固定の関数であると仮定する．また，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}_0$ は $q_{\mathrm{R}} > d$ に対して $W^{2,2q_{\mathrm{R}}}\left(D;\mathbb{R}^d\right)$，$p$ と q_0 に対して $W^{1,2q_{\mathrm{R}}}(D;\mathbb{R})$ に入るような条件が満たされていると仮定する．

これらの仮定の下で，$\mathscr{L}_0$ の Fréchet 微分は，任意の $(\boldsymbol{\varphi},\hat{\boldsymbol{u}},\hat{p},\hat{\boldsymbol{v}}_0,\hat{q}_0) \in X \times (U \times P)^2$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_0'(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u},p,\boldsymbol{v}_0,q_0)[\boldsymbol{\varphi},\hat{\boldsymbol{u}},\hat{p},\hat{\boldsymbol{v}}_0,\hat{q}_0] &= \mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u},p,\boldsymbol{v}_0,q_0)[\boldsymbol{\varphi}] \\ &\quad + \mathscr{L}_{0\boldsymbol{u}p}(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u},p,\boldsymbol{v}_0,q_0)[\hat{\boldsymbol{u}},\hat{p}] + \mathscr{L}_{0\boldsymbol{v}_0 q_0}(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u},p,\boldsymbol{v}_0,q_0)[\hat{\boldsymbol{v}}_0,\hat{q}_0] \qquad (9.13.41)\end{aligned}$$

のようにかくことができる．ただし，式 (9.3.21) と式 (9.3.27) の表記法にしたがうものとする．以下で各項について考察する．

式 (9.13.41) の右辺第 3 項は，式 (9.13.12) と一致する．そこで，$(\boldsymbol{u}, p)$ が状態決定問題 (問題 9.13.1) の弱解ならば，その項はゼロとなる．

また，式 (9.13.41) の右辺第 2 項は，式 (9.13.13) と同じ式となる．そこで，自己随伴関係が成り立つとき，その項はゼロとなる．

さらに，式 (9.13.41) の右辺第 1 項は，命題 9.3.10 の結果を表した式 (9.3.21) と，命題 9.3.13 の結果を表した式 (9.3.27) の公式より，

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}^*}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0\right)[\boldsymbol{\varphi}] \\
&= \int_{\partial\Omega(\boldsymbol{\phi})} \left\{\mu \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^\top - p \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}_0)\right\} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\gamma
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \int_{\partial\Omega(\phi)} \Big[\{ (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot \bar{\boldsymbol{w}} (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{v}_0, q_0) + (\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot \bar{\boldsymbol{w}} (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{u}, p) \} \\
&\quad + \{ (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot (\mu \partial_\nu \boldsymbol{v}_0 - q_0 \boldsymbol{\nu}) + (\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot (\mu \partial_\nu \boldsymbol{u} - p \boldsymbol{\nu}) \} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi})_\tau \\
&\quad + (\partial_\nu + \kappa) \big\{ (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot (\mu \partial_\nu \boldsymbol{v}_0 - q_0 \boldsymbol{\nu}) \\
&\quad + (\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot (\mu \partial_\nu \boldsymbol{u} - p \boldsymbol{\nu}) \big\} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} \Big] \mathrm{d}\gamma \\
&- \int_{\partial\Omega(\phi) \cup \Theta(\phi)} \big\{ (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot (\mu \partial_\nu \boldsymbol{v}_0 - q_0 \boldsymbol{\nu}) \\
&\quad + (\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot (\mu \partial_\nu \boldsymbol{u} - p \boldsymbol{\nu}) \big\} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\varsigma
\end{aligned}
$$

となる．ただし，

$$
\bar{\boldsymbol{w}} (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{u}, p) = - \left\{ \left(\mu \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top \right)^\top - p \boldsymbol{I} \right\} \left[\sum_{i \in \{1, \dots, d-1\}} \left\{ \boldsymbol{\tau}_i \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}^\top \boldsymbol{\nu} \right) \right\} \boldsymbol{\tau}_i \right]
$$

$$+(\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\varphi})\left[\boldsymbol{\nabla}^{\top}\left\{\left(\mu\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\top}\right)^{\top}-p\boldsymbol{I}\right\}\right]^{\top} \tag{9.13.42}$$

とおいた．$(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi})_{\tau}$ は式 (9.2.6) にしたがう．ここで，問題 9.13.1 の Dirichlet 条件が成り立つことを考慮すれば，$\mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}^*}$ における $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}$ と $\boldsymbol{v}_0-\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}$ を含む項はゼロとなる．

以上の結果をふまえて，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}_0$ は問題 9.13.1 の弱解で自己随伴関係が成り立つとき，$\tilde{f}_0$ に対して式 (7.5.15) の表記を用いて

$$\tilde{f}_0'(\boldsymbol{\phi})[\boldsymbol{\varphi}]=\mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}^*}(\boldsymbol{\phi},u,v_0)[\boldsymbol{\varphi}]=\langle\bar{\boldsymbol{g}}_0,\boldsymbol{\varphi}\rangle=\int_{\partial\Omega(\boldsymbol{\phi})}\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\Omega 0}\cdot\boldsymbol{\varphi}\;\mathrm{d}\gamma \tag{9.13.43}$$

とかくことができる．ここで，

$$\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\Omega 0} = \left\{\mu \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top - 2\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u} - 2\partial_\nu \left(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}\right) \cdot \left(\mu \partial_\nu \boldsymbol{u} - p\boldsymbol{\nu}\right)\right\}\boldsymbol{\nu} \tag{9.13.44}$$

となる．さらに，同次 Dirichlet 境界上では，

$$\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top = \left\{\boldsymbol{\nu} \left(\partial_\nu \boldsymbol{u}\right)^\top\right\} \cdot \left\{\boldsymbol{\nu} \left(\partial_\nu \boldsymbol{u}\right)^\top\right\} = \partial_\nu \boldsymbol{u} \cdot \partial_\nu \boldsymbol{u} \tag{9.13.45}$$

および

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = \left(\partial_\nu \boldsymbol{u}\right) \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \tag{9.13.46}$$

が成り立つことから，

$$\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\Omega 0} = -\mu \left(\partial_\nu \boldsymbol{u} \cdot \partial_\nu \boldsymbol{u}\right) \boldsymbol{\nu} \tag{9.13.47}$$

となる．

以上の結果から，式 (9.13.44) の $\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\Omega 0}$ が入る関数空間について，定理 9.8.6 と同様の結果が得られる．

§9.13.4　1 次元分岐 Stokes 流れ場の最適設計問題との関係

$d \in \{2,3\}$ 次元 Stokes 流れ場の平均流れ抵抗最小化問題対して得られた評価関数の形状微分と，第 1 章でみてきた 1 次元分岐 Stokes 流れ場に対して得られた評価関数の断面積微分との関係について考えてみよう．変数や線形空間などの対応は，状態変数に圧力が追加されるなどの修正は必要となるが，線形弾性問題に対して示された表 9.2 と同様の関係が成り立つ．

問題 1.3.2 では，体積力は仮定されていなかった．その仮定を問題 9.13.2 に適用すれば，目的関数を

$$f_0(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p) = \int_{\partial\Omega(\boldsymbol{\phi})} \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}} \cdot (\mu \partial_\nu \boldsymbol{u} - p\boldsymbol{\nu})\, \mathrm{d}\gamma$$
$$= -\sum_{i \in \{1,2\}} \int_0^{r_i} p_i u_{\mathrm{H}i}(r)\, 2\pi r\, \mathrm{d}r \tag{9.13.48}$$

とおいたことに対応する．ただし，$i \in \{0,1,2\}$ に対して p_i と r_i はそれぞれ問題 1.3.2 の定義に従う．$u_{\mathrm{H}i}$ は式 (1.3.1) で与えられる．また，$\partial_\nu \boldsymbol{u} = 0$ と $p_0 = 0$ が使われた．問題 1.3.2 では，u_1 と u_2 は Γ_1 と Γ_2 を通過する単位時間あたりの流量として定義され，断面積の変動に対して固定されていた．このとき，$u_{\mathrm{H}1}$ と $u_{\mathrm{H}2}$ は境界測度共変となる．すなわち，

$$u'_{\mathrm{H}i}(r)[\boldsymbol{\varphi}] = -u_{\mathrm{H}i}(r)(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_i)_\tau \tag{9.13.49}$$

が仮定された．一方，f_0 の形状微分を与える式 (9.13.18) では，$\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}$ は物質固定とされていた．その違いを考慮すれば，式 (9.13.48) で定義された f_0 の形状微分は

$$\tilde{f}'_0(\boldsymbol{\phi})[\boldsymbol{\varphi}] = \langle \boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{\varphi} \rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i \in \{0,1,2\}} l \int_{\Gamma_i} \left(\boldsymbol{G}_{\Omega 0 i} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_i^\top + g_{\Omega 0 i} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \right) \mathrm{d}\gamma \\
&\quad + \sum_{i \in \{1,2\}} \int_0^{r_i} p_i u_{\mathrm{H}i} (r) \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \right)_\tau 2\pi r \, \mathrm{d}r
\end{aligned}
\tag{9.13.50}
$$

となる．

　ここで，1 次元 Stokes 流れ場における円筒領域上の点を $(x, r, \theta) \in (0, l) \times \Gamma_i$ と表すことにして，$\boldsymbol{u} = \left(u_{\mathrm{H}i} (r), 0, 0 \right)^\top$ とおく．このとき，

$$
\int_{\Gamma_i} \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \right)_\tau \, \mathrm{d}\gamma = \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \right)_\tau a_i = b_i
$$

より，

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_i = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_i)_\tau = \frac{b_i}{a_i}, \quad \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_i^\top = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_i/a_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．また，円管内の流速は，

$$\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\top = \frac{p_i - \bar{p}}{4\mu l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．そこで，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}_{\Omega 0 i} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_i^{\top} &= -2\left\{\left(\mu \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^{\top} - p\boldsymbol{I}\right)\left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^{\top}\right)^{\top}\right\} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_i^{\top}\right) \\ &= -8\mu\left(\frac{p_i - \bar{p}}{4\mu l}\right)^2 \frac{b_i}{a_i} r^2, \\ g_{\Omega 0 i} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_i = \mu \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^{\top} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^{\top} \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_i\right) &= 4\mu\left(\frac{p_i - \bar{p}}{4\mu l}\right)^2 \frac{b_i}{a_i} r^2\end{aligned}$$

となる．これらの結果と式 (1.3.2) を用いれば，

$$\tilde{f}_0'(\boldsymbol{\phi})[\boldsymbol{\varphi}] = \sum_{i \in \{0,1,2\}} l \int_0^{r_i} \left(\boldsymbol{G}_{\Omega 0 i} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_i^{\top} + g_{\Omega 0 i} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_i\right) 2\pi r \, \mathrm{d}r$$

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{i \in \{1,2\}} p_i \frac{u_i b_i}{a_i} \\
&= - \sum_{i \in \{0,1,2\}} 2 \frac{u_i^2 b_i}{a_i^3} = \boldsymbol{g}_0 \cdot \boldsymbol{b}
\end{aligned} \tag{9.13.51}
$$

が得られる．ただし，領域変動に対する連続の式

$$
\sum_{i \in \{0,1,2\}} \int_{\Gamma_i} u_i \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \right)_\tau \, \mathrm{d}\gamma = \frac{u_0 b_0}{a_0} + \frac{u_1 b_1}{a_1} + \frac{u_2 b_2}{a_2} = 0 \tag{9.13.52}
$$

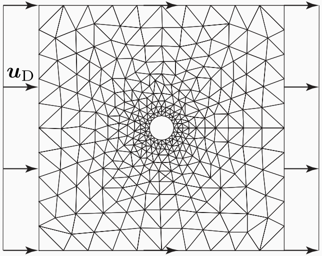
が使われた．ここで，$\boldsymbol{g}_0$ は式 (1.3.19) で得られた 1 次元分岐 Stokes 流れ場に対する平均流れ抵抗 f_0 の断面積勾配と一致する．

さらに，f_0 の Hesse 形式は，式 (9.13.32) を用いて，

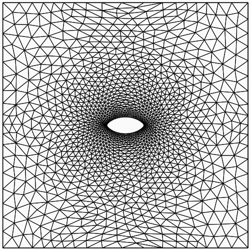
$$
\begin{aligned}
&h_0\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}_0, q_0\right)\left[\boldsymbol{\varphi}_{1i}, \boldsymbol{\varphi}_2\right] \\
&\quad= \sum_{i\in\{1,2\}} l \int_{\Gamma_i} \Bigl[-2\left(\mu\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top \cdot \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top\right)\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_{2i}\right)\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_{1i}\right) \\
&\qquad\quad - \left\{\left(\mu\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top - p\boldsymbol{I}\right)\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\top\right)^\top\right\} \cdot \Bigl\{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_{2i}^\top\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_{1i}^\top + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_{1i}^\top\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_{2i}^\top \\
&\qquad\qquad + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_{2i}^\top\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_{1i}^\top\right)^\top + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_{1i}^\top\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_{2i}^\top\right)^\top \\
&\qquad\qquad - 4\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_{2i}^\top\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_{1i} - 4\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_{1i}^\top\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_{2i}\Bigr\}\Bigr]\mathrm{d}\gamma \\
&\qquad + \sum_{i\in\{0,1,2\}} \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a_i}\left(\frac{u_i^2 b_{1i}}{a_i^3}\right)b_{2i} + \frac{u_i^2 b_{1i}}{a_i^3}\left(\frac{b_{2i}}{a_i}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{i\in\{0,1,2\}} 6\frac{u_i^2}{a_i^4} b_{1i} b_{2i} = \boldsymbol{b}_1 \cdot (\boldsymbol{H}_0 \boldsymbol{b}_2) \tag{9.13.53}$$

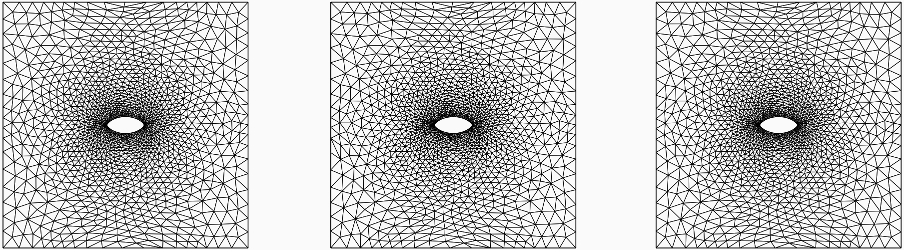
となる．ここで，$\boldsymbol{H}_0$ は，式 (1.3.26) で得られた 1 次元分岐 Stokes 流れ場に対する平均流れ抵抗 f_0 の断面積に対する Hesse 勾配と一致する．



(a) 初期形状と境界条件

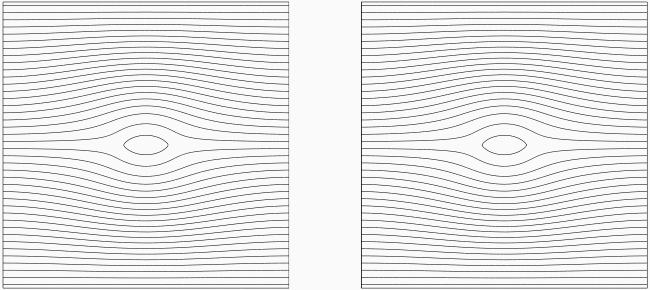


(b) H^1 勾配法 ($\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathscr{L}}$)



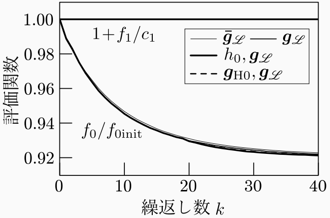
(c) H^1 勾配法 ($\boldsymbol{g}_{\mathscr{L}}$)　(d) H^1 Newton 法 ($h_0, \boldsymbol{g}_{\mathscr{L}}$)　(e) H^1 Newton 法 ($\boldsymbol{g}_{\mathrm{H0}}, \boldsymbol{g}_{\mathscr{L}}$)

図 9.24: 平均流れ抵抗最小化問題に対する数値例: **形状** ($k = 40$)

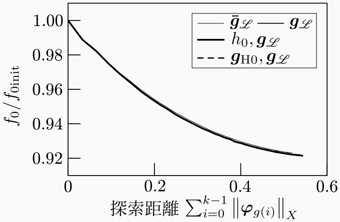


(a) 初期形状に対する流線　(b) 最適形状に対する流線 (H^1 Newton 法, $k = 40$)

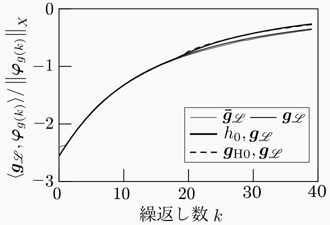
図 9.25: 平均流れ抵抗最小化問題に対する数値例: 流線



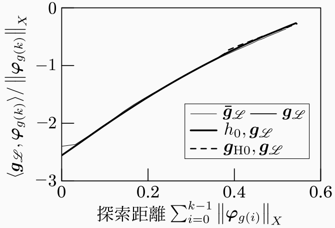
(a) 評価関数



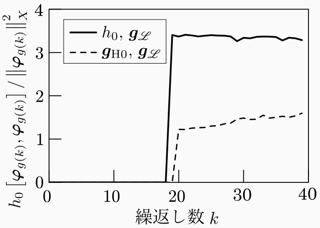
(b) 評価関数 (探索距離)



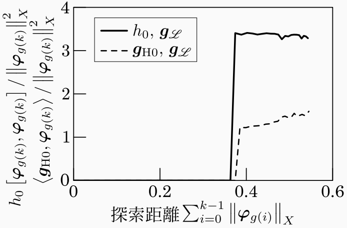
(c) f_0 の探索経路上勾配



(d) f_0 の探索経路上勾配 (探索距離)

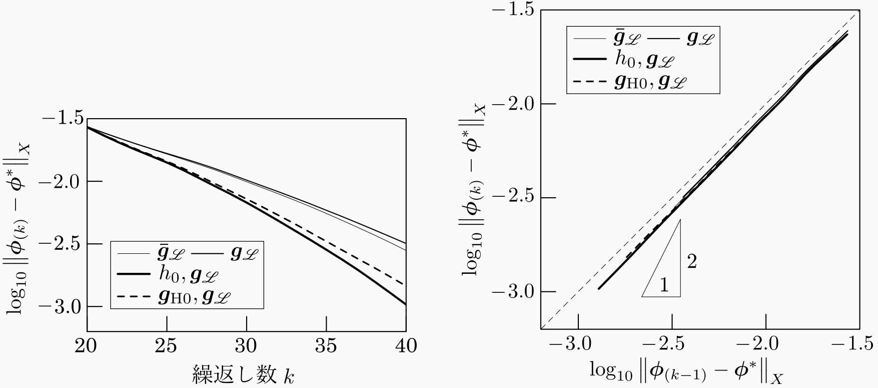


(e) f_0 の探索経路上 2 階微分



(f) f_0 の探索経路上 2 階微分 (探索距離)

図 9.26: 平均流れ抵抗最小化に対する数値例: 評価関数と探索方向に沿った評価関数の勾配と 2 階微分 ($\bar{g}_{\mathscr{L}}$: $\bar{g}_{\mathscr{L}}$ を用いた H^1 勾配法，$\boldsymbol{g}_{\mathscr{L}}$: $\boldsymbol{g}_{\mathscr{L}}$ を用いた H^1 勾配法，$h_0, \boldsymbol{g}_{\mathscr{L}}$: H^1 Newton 法，$\boldsymbol{g}_{\mathrm{H0}}, \boldsymbol{g}_{\mathscr{L}}$: Hesse 勾配を用いた H^1 Newton 法)



(a) 収束履歴　　(b) $(k-1)$ 回目対 k 回目の関係

図 9.27: 平均流れ抵抗最小化に対する数値例: 近似最小点 ϕ^* からの距離 $\|\boldsymbol{\phi}_{(k)}-\boldsymbol{\phi}^*\|_X$ ($\boldsymbol{g}_{\mathscr{L}}$: H^1 勾配法，$h_0, \boldsymbol{g}_{\mathscr{L}}$: H^1 Newton 法，$\boldsymbol{g}_{\mathrm{H0}}, \boldsymbol{g}_{\mathscr{L}}$: Hesse 勾配を用いた H^1 Newton 法)

孤立物体まわりの 2 次元 Stokes 流れ場に対する平均流れ抵抗最小化の結果を図 9.24 から図 9.27 に示す．状態決定問題の境界条件は，図 9.24 (a) のように，外側境界上で水平方向の一様な流速，孤立物体の境界上で流速 $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ が仮定された．領域変動に対する境界条件しては，外側境界が固定された (式 (9.1.1) の $\bar{\Omega}_{\mathrm{C0}}$ に加えられた)．プログラムは，有限要素法プログラミング言語 FreeFEM (`https://freefem.org/`) [34] でかかれている．Stokes 問題の有限要素法解析では，三角形要素が使われ，流速に対して 2 次要素，圧力に対して 1 次要素が用いられた．H^1 勾配法あるいは H^1 Newton 法の有限要素法解析では三角形 2 次要素が使われた．また，H^1 Newton 法を用いた場合には，$k_{\mathrm{N}} = 10$ から H^1 Newton 法が開始された．式 (9.10.1) の c_a，式 (9.9.3) の c_Ω，k_{N}，式 (9.9.17) の $c_{\Omega 1}$ と $c_{\Omega 0}$，式 (9.10.8) の c_h および適合メッシュ

の誤差レベルを決めるパラメータ (errelas) の決め方によって結果は変化する．詳細はプログラムにゆずる[5]．

図 9.24 (b) から (e) は 4 つの方法 (境界積分型の $\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathscr{L}} = \bar{\boldsymbol{g}}_0 + \lambda_1 \bar{\boldsymbol{g}}_1$ を用いた H^1 勾配法，領域積分型の $\boldsymbol{g}_{\mathscr{L}} = \boldsymbol{g}_0 + \lambda_1 \boldsymbol{g}_1$ を用いた H^1 勾配法，h_0 と $\boldsymbol{g}_{\mathscr{L}}$ を用いた H^1 Newton 法，$\boldsymbol{g}_{\mathrm{H0}}$ と $\boldsymbol{g}_{\mathscr{L}}$ を用いた H^1 Newton 法) で得られた形状の結果を示す．図 9.25 の (a) と (b) にはそれぞれ初期形状と H^1 Newton 法で得られた最適形状のときの流線がえがかれている．流線は，流速 $\boldsymbol{u}$ が $(\partial\psi/\partial x_2, -\partial\psi/\partial x_1)^\top$ で与えられるような流れ関数 $\psi : \Omega(\phi) \to \mathbb{R}$ の等高線で定義される．

[5] 講義資料 `FreeFEM_program_chap_9.zip`

図 9.26 のグラフは，規準化された評価関数，探索経路に沿った目的関数 f_0 の勾配と 2 階微分の変化をそれぞれ繰返し数 k と X 上の探索距離 $\sum_{i=0}^{k-1} \left\| \boldsymbol{\varphi}_{g(i)} \right\|_X$ に対して示している．図中，$f_{0\mathrm{init}}$ は初期形状のときの f_0 を表す．c_1 には初期形状の体積の値が使われた．探索経路に沿った f_0 の勾配は，Lagrange 関数 $\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \lambda_1 f_1$ の勾配 $\left\langle \boldsymbol{g}_{\mathscr{L}}, \boldsymbol{\varphi}_{g(k)} \right\rangle / \left\| \boldsymbol{\varphi}_{g(k)} \right\|_X$ によって計算された．また，f_0 の 2 階微分は，$h_0 \left[\boldsymbol{\varphi}_{g(k)}, \boldsymbol{\varphi}_{g(k)} \right] / \left\| \boldsymbol{\varphi}_{g(k)} \right\|_X^2$ によって計算された．ただし，Hesse 勾配を用いた Newton 法の場合は $\left\langle \boldsymbol{g}_{\mathrm{H}0}, \boldsymbol{\varphi}_{g(k)} \right\rangle / \left\| \boldsymbol{\varphi}_{g(k)} \right\|_X^2$) を用いて計算された．ただし，$i$ 回目の探索ベクトルのノルム $\left\| \boldsymbol{\varphi}_{g(i)} \right\|_X$ は式 (9.12.67) に従う．PC を用いたときの $k = 40$ までの計算時間は，境界積分型 H^1 勾配法，領域積分型 H^1 勾配法，H^1 Newton 法，

Hesse 勾配を用いた H^1 Newton 法に対して，それぞれ 16.324, 43.628, 63.173, 81.039 sec であった．

これらの結果についても 9.12.5 項と同じ考察ができる．図 9.26 (a) は，H^1 勾配法よりも H^1 Newton 法を使うことによって，繰返し数 k に対して評価関数の収束が早まったようにみえる．しかしながら，実際は，H^1 Newton 法に切り替えた際に式 (9.9.17) の $c_{\Omega 1}$ と $c_{\Omega 0}$ を数値不安定現象が現れない程度に小さな値に置き換えているために，収束が早くなったと考えられる．また，最小点近傍の様子は，図 9.26 の (d) と (f) において観察されるように，探索経路に沿った f_0 の 2 階微分は正値をとり，局所最小点になっていることが確認される．

さらに，図 9.27 (a) には，H^1 Newton 法の繰返し数を指定された値よりもおおきくとったときの ϕ の数値解を近似最小点 ϕ^* とみなして，4 つの方法で得られた ϕ^* からの距離 $\left\|\phi_{(k)} - \phi^*\right\|_X$ を繰返し数 k に対して示している．この図から，H^1 Newton 法や Hesse 勾配を用いた H^1 Newton 法の結果は，収束次数が 1 次以上であることが確認される．しかしながら，繰返し数 $(k-1)$ 回目に対して k 回目の距離 $\left\|\phi_{(k)} - \phi^*\right\|_X$ をプロットした図 9.27 (b) より，H^1 Newton 法の収束次数は，ここでも 1 次よりは大きいが，2 次にはなっていないことが確認される．その理由は，9.12.5 項の最後にかかれたことと同様であると考えられる．

9.14 第 9 章のまとめ

第 9 章では，偏微分方程式の境界値問題が定義された領域に対する領域変動型の形状最適化問題を構成し，その解法について詳しくみてきた．要点は以下のようである．

1. 領域変動型の形状最適化問題では，初期領域を定義域として，変動後の領域までの変位を値域とする関数が設計変数に選ばれる (9.1 節)．設計変数の線形空間 X と許容集合 $\mathcal{D}$ は，それぞれ式 (9.1.1) と式 (9.1.3) で定義される．さらに，変動する領域上で定義された関数と汎関数に対して，形状微分と形状偏微分とよぶ 2 つの微分が定義される (9.1.3 項)．

2. 領域写像の Jacobi 行列に関する形状微分の公式が得られる (9.2 節)．それらの公式を使って，関数や汎関数の形状微分を求めるための公式が求められる (9.3 節)．その際，関数の形状微分を用いた公式と関数の形状偏微分を用いた公式が得られる．また，それらの公式を用いてさまざまな関数の変動則が定義される (9.4 節)．
3. Poisson 問題を状態決定問題に選んだとき (9.5 節)，領域変動型形状最適化問題は X 上で構成される (9.6 節)．
4. 評価関数の形状微分は Lagrange 乗数法で求められる．その際，関数の形状微分公式による評価式 (定理 9.8.2) と関数の形状偏微分公式による評価式 (定理 9.8.6) が得られる．これらの形状微分は設計変数の許容集合がはいる線形空間にはいるとは限らない (注意 9.8.7)．

5. 評価関数の形状微分を用いた H^1 勾配法は X 上で定義される (9.9 節)．H^1 勾配法の解は，特異点を除いて許容集合にはいる (定理 9.9.6)．さらに，評価関数の 2 階形状微分が計算可能であれば，H^1 Newton 法により，評価関数の降下方向が求められる (9.9.2 項)．
6. 領域変動型形状最適化問題は，第 3 章で示された制約つき問題に対する勾配法および制約つき問題に対する Newton 法と同じ枠組みで構成される (9.10 節)．
7. 状態決定問題，随伴問題および H^1 勾配法の数値解を有限要素法で求めるとき，探索ベクトル φ_g に対する有限要素解のオーダー評価が得られる (定理 9.11.5)．

8. 線形弾性問題を状態決定問題とする領域の大きさ制約つき平均コンプライアンス最小化問題に対して，評価関数の形状微分と 2 階形状微分が得られる (9.12 節)．
9. Stokes 問題を状態決定問題とする領域の大きさ制約つき平均流れ抵抗最小化問題に対して，評価関数の形状微分と 2 階形状微分が得られる (9.13 節)．

本書では，主題の形状最適化問題に対して，第 8 章と第 9 章でそれぞれ密度変動型の位相最適化問題と領域変動型の形状最適化問題の定式化と解法についてみてきた．最後に，両者を比較して，それぞれの利点と欠点について考えてみたい．

密度変動型の定式化では，固定された領域上で設計変数である密度が定義されていることが利点と欠点を生んでいる．利点は，標準的な関数最適化問題の枠組みに入るために，理論展開を見通しよく進めることができることである．また，設計変数を密度に限定せずに，さまざまな材料パラメータに置き換えることによって，位相最適化問題ではない様々な問題を構成することができる．例えば，設計変数を剛性の健全率に変更すれば，欠陥同定問題を

構成することができる [90]．一方，欠点としては，密度から連続体の境界を求める際に，何らかの工夫が必要になることが挙げられる．

それに対して，領域変動型の定式化では，状態決定問題を定義する領域が変動するために評価関数の形状微分を求めるために，さまざまな公式を準備しておく必要があった．特に，2 階形状微分を求める際，1 階微分の定義で用いた領域変動の補正 (式 (9.1.9) および式 (9.3.11) 参照) が必要なことに気づくのは容易ではない．一方，数値解析では，連続体の境界をそのままの自由度で動かすことができるために，精度よく形状を求められる点が優れている．

実際の形状最適化問題では，これらの特徴を踏まえて，有利な方法を選択することが望まれる．

9.15 第 9 章の演習問題

9.1 定理 9.8.2 において，条件 (2) が成り立つとき，g_{pi} を与える式 (9.8.9) の右辺第 2 項が $L^{\infty}\left(\Gamma_p\left(\phi\right);\mathbb{R}^d\right)$ にはいることを示せ．

9.2 本章でとりあげた状態決定問題のうち，Poisson 問題 (問題 9.5.4) と線形弾性問題 (問題 9.12.1) では Dirichlet 境界 と Neumann 境界の混合境界条件が仮定された．しかし，定理 9.8.2 の結果を得るためには，開き角 β に対して，仮定 9.5.3 の (2) (混合境界上にあるとき $\beta < \pi/2$) が満たされていなければならない．混合境界条件を Robin 条件におきかえたならば，仮定 9.5.3 の (1) (同一種境界上にあるとき $\beta < \pi$) が適用できることになる．そこで，第 5 章でとりあげた拡張 Poisson 問題 (問題 5.1.3) において境界条件に関連しない項を省略して，領域変動型に変更すれば，次のようになる．

問題 9.15.1 (Robin 型 Poisson 問題)

$\phi \in \mathcal{D}$ に対して $c_{\partial\Omega}(\phi) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ と $p_{\mathrm{R}}(\phi) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ は物質固定の関数として与えられたとき，

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega(\phi), \\
\partial_\nu u + c_{\partial\Omega}(\phi) u &= p_{\mathrm{R}}(\phi) \quad \text{on } \partial\Omega(\phi)
\end{aligned}
$$

を満たす $u : \Omega(\phi) \to \mathbb{R}$ を求めよ．

ここで，問題 9.15.1 を状態決定問題に選び，評価関数を $i \in \{0, 1, \cdots, m\}$ に対して，

$$f_i(\boldsymbol{\phi}, u) = \int_{\partial\Omega(\boldsymbol{\phi})} \eta_{\mathrm{R}i}(\boldsymbol{\phi}, u) \, \mathrm{d}\gamma \tag{9.15.1}$$

とおく．ただし，$\eta_{\mathrm{R}i}(\boldsymbol{\phi}, u)$ は物質固定の関数とする．このとき，関数の形状微分公式を用いた形状微分 $\boldsymbol{g}_i$ を求めよ．また，定理 9.8.2 の $\boldsymbol{g}_i$ と同程度の正則性をもつために必要となるような，$c_{\partial\Omega}$, p_{R}, $\eta_{\mathrm{R}i}$ および $\eta_{\mathrm{R}iu}$ の正則性と角点の開き角の条件を示せ．

9.3 本章でとりあげた領域変動型の形状最適化問題では，$\partial\Omega(\phi)$ 上にき裂 (開き角 $\beta = 2\pi$) がある場合や Dirichlet 境界 と Neumann 境界の境界が滑らかな境界上 (開き角 $\beta = \pi$) にある場合，仮定 9.5.3 が満たされないことから，定理 9.8.2 の仮定 ($u \in \mathcal{S}$) は満たされず，形状微分を X' の要素として求められるかは不明であった．しかし，設計変数 (領域変動) の線形空間を

$$X = \left\{ \phi \in C^{0,1}\left(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d\right) \;\middle|\; \phi = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \bar{\Omega}_{\mathrm{C0}} \right\}$$

におきかえれば，この X に対する有界線形汎関数として形状微分を求めることが可能となる．この形状微分は，一般化 J 積分を利用して得られている [5]．

ここでは，途中の結果から形状微分を求めるまでの演算をおこなってみよう．$\Omega(\phi)$ は 2 次元領域として，その境界上の点 x_{C} は同次 Neumann 境界あるいは同次 Dirichlet 境界 の内点で，かつき裂の先端 (開き角 $\beta_{\mathrm{C}} = 2\pi$) であるとする．また，$x_{\mathrm{M}}$ は，図 9.28 のように，Dirichlet 境界と Neumann 境界の境界で，かつ滑らかな境界上 (開き角 $\beta_{\mathrm{M}} = \pi$) にあるとする．このとき，x_{C} と x_{M} における評価関数の形状微分を求めることを考える．状態決定問題を次のように定義する．

問題 9.15.2 (領域変動型 Poisson 問題)

$\phi \in \mathcal{D}$ に対して $b(\phi)$ は物質固定の関数として与えられたとき,

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= b(\phi) \quad \text{in } \Omega(\phi), \\
\partial_\nu u &= 0 \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{N}}(\phi), \\
u &= 0 \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{D}}(\phi)
\end{aligned}
$$

を満たす $u : \Omega(\phi) \to \mathbb{R}$ を求めよ.

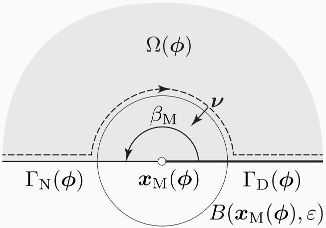


図 9.28: 境界積分 $\mathscr{P}_u$ の経路

また，式 (9.6.1) の評価関数を

$$f_i\left(\boldsymbol{\phi}, u\right) = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \zeta_i\left(\boldsymbol{\phi}, u\right) \mathrm{d}x - c_i$$

におきかえる．ここでは，簡単のために ζ_i は $\boldsymbol{\nabla} u$ の関数ではないと仮定する．このとき，f_i の形状微分は，一般化 J 積分の中で定義された $\mathscr{P}$ 積分を用いて，

$$\langle \boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{\varphi} \rangle = -\mathscr{P}_u \left(\partial\Omega \left(\boldsymbol{\phi} \right), \boldsymbol{\varphi}, u \right) \left[v_i \right] + \langle \hat{\boldsymbol{g}}_{i\mathrm{C}}, \boldsymbol{\varphi} \rangle + \langle \hat{\boldsymbol{g}}_{i\mathrm{M}}, \boldsymbol{\varphi} \rangle + \langle \boldsymbol{g}_{i\mathrm{R}}, \boldsymbol{\varphi} \rangle$$

によって与えられる [5]．ただし，$j \in \{\mathrm{C}, \mathrm{M}\}$ に対して，$\beta_{\mathrm{C}} = 2\pi$ および $\beta_{\mathrm{M}} = \pi$ として，

$$\begin{aligned} & -\mathscr{P}_u \left(\partial\Omega \left(\boldsymbol{\phi} \right), \boldsymbol{\varphi}, u \right) \left[v_i \right] \\ & \qquad = \int_{\partial\Omega(\boldsymbol{\phi})} \left\{ \left(\boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v_i \right) \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} \right. \end{aligned}$$

$$
- \partial_\nu u \boldsymbol{\nabla} v_i \cdot \boldsymbol{\varphi} - \partial_\nu v_i \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\varphi} \} \mathrm{d}\gamma, \tag{9.15.1}
$$

$$
\langle \hat{\boldsymbol{g}}_{ij}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \lim_{\epsilon \to 0} - \int_0^{\beta_j} \{ (\boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v_i) \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \partial_\nu u \boldsymbol{\nabla} v_i \cdot \boldsymbol{\varphi}
$$

$$
- \partial_\nu v_i \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\varphi} \} \epsilon \, \mathrm{d}\theta, \tag{9.15.2}
$$

$$
\langle \boldsymbol{g}_{i\mathrm{R}}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \int_{\partial\Omega(\boldsymbol{\phi})} b v_i \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\gamma + \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} (\boldsymbol{\zeta}_{i\boldsymbol{\phi}} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \zeta_i \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \, \mathrm{d}x \tag{9.15.3}
$$

である．ここで，式 (9.15.2) は特異点の変動に対する f_i の形状微分を与えている．u と v_i は，5.3 節でみたように，$j \in \{\mathrm{C}, \mathrm{M}\}$ に対して $\boldsymbol{x}_j$ を原点とする (r, θ) 座標を用いて

$$
u(r, \theta) = k_j r^{\pi/\beta_j} \cos \frac{\pi}{\beta_j} \theta + u_{\mathrm{R}}, \tag{9.15.4}
$$

$$v_i(r,\theta) = l_{ij} r^{\pi/\beta_j} \cos \frac{\pi}{\beta_j}\theta + v_{i\mathrm{R}} \tag{9.15.5}$$

で与えられる．ただし，k_j と l_{ij} は定数，u_{R} と $v_{i\mathrm{R}}$ は $H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ の要素とする．このとき，式 (9.15.4) と式 (9.15.5) を式 (9.15.2) に代入して，$\hat{\boldsymbol{g}}_{i\mathrm{C}}$ と $\hat{\boldsymbol{g}}_{i\mathrm{M}}$ を求めよ．

9.16 参考文献

[1] Allaire, G., Jouve, F., and Toader, A. M.
Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method.
J. Comput. Phys., Vol. 194, pp. 363–393, 2004.

[2] 畔上秀幸.
領域最適化問題の一解法.
日本機械学会論文集 A 編, Vol. 60, No. 574, pp. 1479–1486, 1994.

[3] 畔上秀幸.
形状最適化問題の正則化解法.
日本応用数理学会論文誌, Vol. 23, No. 2, pp. 83–138, 2014.

[4] Azegami, H., Fukumoto, S., and Aoyama, T.
Shape optimization of continua using NURBS as basis functions.
Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 47, No. 2, pp. 247–258, 2013.

[5] Azegami, H., Ohtsuka, K., and Kimura, M.
Shape derivative of cost function for singular point: Evaluation by the generalized J integral.
JSIAM Letters, Vol. 6, pp. 29–32, 2014.

[6] 畔上秀幸, 須貝康弘, 下田昌利.
座屈に対する形状最適化.
日本機械学会論文集 A 編, Vol. 66, No. 647, pp. 1262–1267, 2000.

[7] Azegami, H. and Takeuchi, K.
A smoothing method for shape optimization: Traction method using the Robin condition.
International Journal of Computational Methods, Vol. 3, No. 1, pp. 21–33, 2006.

[8] 畔上秀幸, 呉志強.
線形弾性問題における領域最適化解析 (力法によるアプローチ).
日本機械学会論文集 A 編, Vol. 60, No. 578, pp. 2312–2318, 1994.

[9] Azegami, H., Yokoyama, S., and Katamine, E.
Solution to shape optimization problems of continua on thermal elastic deformation.
In Tanaka, M. and Dulikravich, G. S., editors, Inverse Problems in Engineering Mechanics III, pp. 61–66. Elsevier, Tokyo, 2002.

[10] Azegami, H., Zhou, L., Umemura, K., and Kondo, N.
Shape optimization for a link mechanism.
Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 48, No. 1, pp. 115–125, 2013.

[11] Banichuk, N. V.
Optimality conditions and analytical methods of shape optimization.
In Haug, E. J. and Cea, J., editors, Optimization of Distributed Parameter Structures, Vol. 2, pp. 973–1004. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1981.

[12] Banichuk, N. V.
Problems and Methods of Optimal Structural Design.
Plenum Press, New York, 1983.

[13] Banichuk, N. V.
Introduction to Optimization of Structures.
Springer, New York, 1990.

[14] Belegundu, A. D. and Rajan, S. D.
A shape optimization approach based on natural design varibles and shape functions.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 66, pp. 87–106, 1988.

[15] Boulkhemair, A., Chakib, A., and Nachaoui, A.
Uniform trace theorem and application to shape optimization.
Applied and Computational Mathematics, Vol. 7, pp. 192–205, 2008.

[16] Braibant, V. and Fleury, C.
Shape optimal design using B-splines.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 44, pp. 247–267, 1984.

[17] Braibant, V. and Fleury, C.
An approximation concepts approach to shape optimal design.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 53, pp. 119–148, 1985.

[18] Burger, M.
A framework for the construction of level set methods for shape optimization and reconstruction.
Interfaces and Free boundaries, Vol. 5, pp. 301–329, 2003.

[19] Cea, J.
Numerical methods of shape optimal design.
In Haug, E. J. and Cea, J., editors, Optimization of Distributed Parameter Structures, Vol. 2, pp. 1049–1088. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, 1981.

[20] Cea, J.
Problems of shape optimization.
In Haug, E. J. and Cea, J., editors, Optimization of Distributed Parameter Structures, Vol. 2, pp. 1005–1048. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, 1981.

[21] Chenais, D.
On the existence of a solution in a domain identification problem.
Journal of mathematical analysis and applications, Vol. 52, pp. 189–219, 1975.

[22] Choi, K. K.
Shape design sensitivity analysis of displacement and stress constraints.
Journal of Structural Mechanics, Vol. 13, pp. 27–41, 1985.

[23] Choi, K. K. and Haug, E. J.
Shape design sensitivity analysis of elastic structures.
Journal of Structural Mechanics, Vol. 11, pp. 231–269, 1983.

[24] Choi, K. K. and Kim, N. H.
Structural Sensitivity Analysis and Optimization, 1 & 2.
Springer, New York, 2005.

[25] Ciarlet, P. G.
Three-Dimensional Elasticity.
North-Holland, Amsterdam; Tokyo, 1988.

[26] Delfour, M. C. and Zolésio, J. P.
Tangent culculus and shape derivatives.
In Cagnol, J., Polis, M. P., and Zolésio, J. P., editors, Shape Optimization and Optimal Design: Proceedings of the IFIP Conference, pp. 37–60.
Marcel Dekker, New York; Basel, 2001.

[27] Delfour, M. C. and Zolésio, J. P.
Shapes and Geometries: Metrics, Analysis, Differential Calculus, and Optimization, 2nd Ed.
Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2011.

[28] Evans, L. C. and Gariepy, R. F.
Measure Theory and Fine Properties of Functions.
CRC Press, Boca Raton, 1992.

[29] Hadamard, J.
Mémoire des Savants Étragers. OEuvres de J. Hadamard, chapter Mémoire sur le probléme d'analyse relatif á l'équilibre des plaques élastiques encastrées, Mémoire des savants étragers, pp. 515–629.
CNRS, Paris, 1968.

[30] Haslinger, J. and Mäkinen, R. A. E.
Introduction to Shape Optimization: Theory, Approximation, and Computation.
SIAM, Philadelphia, 2003.

[31] Haslinger, J. and Neittaanmäki, P.
Finite Element Approximation for Optimal Shape Design: Theory and Application.
John Wiley & Sons, Chichester, 1988.

[32] Haslinger, J. and Neittaanmäki, P.
Finite Element Approximation for Optimal Shape, Material and Topology Design, 2nd Ed.
John Wiley & Sons, Chichester, 1996.

[33] Haug, E. J., Choi, K. K., and Komkov, V.
Design Sensitivity Analysis of Structural Systems.
Academic Press, Orlando, 1986.

[34] Hecht, F.
New development in freefem++.
Journal of Numerical Mathematics, Vol. 20, No. 3-4, pp. 251–265, 2012.

[35] Henrot, A. and Pierre, M.
Shape Variation and Optimization: A Geometrical Analysis.
Tracts in Mathematics 28. European Mathematical Society, Zürich, 2018.

[36] Horák, V.
Inverse Variational Principles of Continuum Mechanics.
Academia, nakladatelství Československé akademie véd, Praha, 1969.

[37] 井原久, 畔上秀幸, 下田昌利.
幾何学的非線形性を考慮した変位経路制御問題に対する形状最適化.
日本機械学会論文集 A 編, Vol. 67, No. 656, pp. 611–617, 2001.

[38] 井原久, 畔上秀幸, 下田昌利, 渡邊勝彦.
材料非線形性を考慮した形状最適化問題の解法.
日本機械学会論文集 A 編, Vol. 66, No. 646, pp. 1111–1118, 2000.

[39] 井原久, 下田昌利, 畔上秀幸, 桜井俊明.
位相最適化と形状最適化の統合による多目的構造物の形状設計 (均質化法と力法によるアプローチ).
日本機械学会論文集 A 編, Vol. 62, No. 596, pp. 1091–1097, 1996.

[40] **井原久, 下田昌利, 畔上秀幸, 桜井俊明.**
位相－形状最適化手法に基づく変位規定問題の数値解析法.
自動車技術会論文集, Vol. 29, No. 1, pp. 117–122, 1998.

[41] Imam, M. H.
Three-dimensional shape optimization.
International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 18, pp. 661–673, 1982.

[42] Inzarulfaisham, A. R. and Azegami, H.
Shape optimization of linear elastic continua for moving nodes of natural vibration modes to assigned positions and its application to chassis-like frame structures.
Transactions of the Japan Society for Computational Engineering and Science, Vol. 7, pp. 43–50, 2004.

[43] Inzarulfaisham, A. R. and Azegami, H.
Solution to boundary shape optimization problem of linear elastic continua with prescribed natural vibration mode shapes.
Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 27, No. 3, pp. 210–217, 2004.

[44] Iwai, T., Sugimoto, A., Aoyama, T., and Azegami, H.
Shape optimization problem of elastic bodies for controlling contact pressure.
JSIAM Letters, Vol. 2, pp. 1–4, 2010.

[45] Iwata, Y., Azegami, H., Aoyama, T., and Katamine, E.
Numerical solution to shape optimization problems for non-stationary Navier-Stokes problems.
JSIAM Letters, Vol. 2, pp. 37–40, 2010.

[46] 海津聰, 畔上秀幸.
最適形状問題と力法について.
日本応用数理学会論文誌, Vol. 16, No. 3, pp. 277–290, 2006.

[47] 片峯英次, 畔上秀幸.
粘性流れ場領域最適化問題の解法 (力法によるアプローチ).
日本機械学会論文集 B 編, Vol. 60, No. 579, pp. 3859–3866, 1994.

[48] 片峯英次, 畔上秀幸.
ポテンシャル流れ場の領域最適化解析.
日本機械学会論文集 B 編, Vol. 61, No. 581, pp. 103–108, 1995.

[49] 片峯英次, 畔上秀幸.
粘性流れ場の領域最適化解析 (対流項を考慮した場合).
日本機械学会論文集 B 編, Vol. 61, No. 585, pp. 1646–1653, 1995.

[50] Katamine, E., Azegami, H., and Hirai, M.
Solution of shape identification problems on thermoelastic solids.
International Journal of Computational Methods, Vol. 3, No. 3, pp. 279–293, 2006.

[51] 片峯英次, 畔上秀幸, 小嶋雅美.
定常熱伝導場における境界形状決定.
日本機械学会論文集 B 編, Vol. 65, No. 629, pp. 275–281, 1999.

[52] 片峯英次, 畔上秀幸, 松浦易広.
非定常熱伝導場における形状同定問題の解法.
日本機械学会論文集 B 編, Vol. 66, No. 641, pp. 227–234, 2000.

[53] Katamine, E., Azegami, H., Tsubata, T., and Itoh, S.
Solution to shape optimization problems of viscous flow fields.
International Journal of Computational Fluid Dynamics, Vol. 19, No. 1, pp. 45–51, 2005.

[54] 片峯英次, 畔上秀幸, 山口正太郎.
ポテンシャル流れ場の形状同定解析 (圧力分布規定問題と力法による解法).
日本機械学会論文集 B 編, Vol. 64, No. 620, pp. 1063–1070, 1998.

[55] 片峯英次, 岩田侑太朗, 畔上秀幸.
放熱量最大化を目的とした非定常熱伝導場の形状最適化.
日本機械学会論文集 B 編, Vol. 74, No. 743, pp. 1609–1616, 2008.

[56] 片峯英次, 河瀬賀行, 畔上秀幸.
強制熱対流場の形状最適化.
日本機械学会論文集 B 編, Vol. 73, No. 733, pp. 1884–1891, 2007.

[57] 片峯英次, 西橋直志, 畔上秀幸.
抗力最小化・揚力最大化を目的とした定常粘性流れ場の形状最適化.
日本機械学会論文集 B 編, Vol. 74, No. 748, pp. 2426–2434, 2008.

[58] Katamine, E., Tsubata, T., and Azegami, H.
Solution to shape optimization problem of viscous flow fields considering convection term.
In Tanaka, M., editor, Inverse Problems in Engineering Mechanics IV, pp. 401–408. Elsevier, Tokyo, 2003.

[59] 片峯英次, 吉岡広起, 松浦浩佑, 畔上秀幸.
平均コンプライアンス最小化を目的とした熱弾性場の形状最適化.
日本機械学会論文集 C 編, Vol. 77, No. 783, pp. 4015–4023, 2011.

[60] Kimura, M.
Shape derivative of minimum potential energy: abstract theory and applications.
Jindřich Nečas Center for Mathematical Modeling Lecture notes Volume IV, Topics in Mathematical Modeling, pp. 1–38, 2008.

[61] 木村正人, 若野功.
亀裂進展に伴うエネルギー解放率の数学解析に関する再考察.
日本応用数理学会論文誌, Vol. 16, No. 3, pp. 345–358, 2006.

[62] Lions, J. L.
Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations.
translated by S. K. Mitter. Springer, Berlin, 1971.

[63] McLean, W.
Strongly Elliptic Systems and Boundary Iintegral Equations.
Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[64] Meisters, G. H. and Olech, C.
Locally one-to-one mappings and a classical theorem on schlicht functions.
Duke Mathematical Journal, Vol. 30, pp. 63–80, 1963.

[65] Mohammadi, B. and Pironneau, O.
Applied Shape Optimization for Fluids.
Oxford University Press, Oxford, New York, 2001.

[66] Mohammadi, B. and Pironneau, O.
Applied Shape Optimization for Fluids, 2nd Edition.
Oxford University Press, Oxford, New York, 2010.

[67] Murai, D. and Azegami, H.
Error analysis of H1 gradient method for shape-optimization problems of continua.
JSIAM Letters, Vol. 5, pp. 29–32, 2013.

[68] 村井大介.
偏微分方程式の初期値境界値問題と形状最適化問題に対する数値解法の誤差解析.
博士論文, 名古屋大学, 2012.

[69] Murat, F. and Simon, S.
Etudes de problémes d'optimal design.
In Lecture Notes in Computer Science 41, pp. 54–62. Springer, Berlin, 1976.

[70] Ohtsuka, K. and Khludnev, A.
Generalized J-integral method for sensitivity analysis of static shape design.
Control and Cybernetics, Vol. 29, pp. 513–533, 2000.

[71] 大塚厚二, 高石武史.
有限要素法で学ぶ現象と数理: FreeFem++数理思考プログラミング.
共立出版, 東京, 2014.

[72] Pironneau, O.
On optimum profiles in Stokes flow.
Journal of Fluid Mechanics, Vol. 59, No. 1, pp. 117–128, 1973.

[73] Pironneau, O.
On optimum design in fluid mechanics.
Journal of Fluid Mechanics, Vol. 64, No. 1, pp. 97–110, 1974.

[74] Pironneau, O.
Optimal Shape Design for Elliptic Systems.
Springer, New York, 1984.

[75] Polya, G.
Torsion rigidity, principal frequency, electrostatic capacity and symmetrization.
Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 6, pp. 267–277, 1948.

[76] Raasch, I., Chargin, M. S., and Bruns, R.
Optimierung von pkw-bauteilen in bezug auf form und dimensionierung.
VDI Berichte, No. 699, pp. 713–748, 1988.

[77] Santosa, F.
A level-set approach for inverse problems involving obstacles.
ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, Vol. 1, pp. 17–33, 1996.

[78] 下田昌利, 畔上秀幸, 井原久, 桜井俊明.
複数荷重を考慮した線形弾性体の形状最適化 (力法による体積最小設計).
日本機械学会論文集 A 編, Vol. 61, No. 587, pp. 1545–1552, 1995.

[79] 下田昌利, 畔上秀幸, 桜井俊明.
複数荷重を考慮した線形弾性体の多目的形状最適化 (平均コンプライアンス最小化問題を例として).
日本機械学会論文集 A 編, Vol. 61, No. 582, pp. 359–366, 1995.

[80] 下田昌利, 畔上秀幸, 桜井俊明.
ホモロガス変形を目的とする連続体の形状決定.
日本機械学会論文集 A 編, Vol. 62, No. 604, pp. 2831–2837, 1996.

[81] 下田昌利, 畔上秀幸, 桜井俊明.
応力分布を規定した連続体の境界形状決定.
日本機械学会論文集 A 編, Vol. 62, No. 602, pp. 2393–2400, 1996.

[82] 下田昌利, 畔上秀幸, 桜井俊明.
形状最適化におけるミニマックス問題の数値解法 (最大応力と最大変位の最小設計).
日本機械学会論文集 A 編, Vol. 63, No. 607, pp. 610–617, 1997.

[83] Shimoda, M., Tsuji, J., and Azegami, H.
Minimum weight shape design for the natural vibration problem of plate and shell structures.
In Hernandez, S. and Brebbia, C. A., editors, Computer Aided Optimum Design in Engineering IX, pp. 147–156. WIT Press, Southampton, UK, 2005.

[84] Shimoda, M., Tsuji, J., and Azegami, H.
Non-parametric shape optimization method for thin-walled structures under strength criterion.

In Hernandez, S. and Brebbia, C. A., editors, Computer Aided Optimum Design in Engineering X, pp. 179–188. WIT Press, Southampton, UK, 2007.

[85] 下田昌利, 呉志強, 畔上秀幸, 桜井俊明.
汎用ＦＥＭコードを利用した領域最適化問題の数値解析.
日本機械学会論文集 A 編, Vol. 60, No. 578, pp. 2418–2425, 1994.

[86] 新谷浩平, 長谷高明, 伊藤聡, 畔上秀幸.
サスペンション部品の非線形座屈現象に関する形状最適化の検討.
日本機械学会論文集 A 編, Vol. 74, No. 748, pp. 1187–1198, 2011.

[87] Simon, J.
Differentiation with respect to the domain in boundary value problems.
Numerical Functional Analysis and Optimization, Vol. 2, No. 7-8, pp. 649–687, 1980.

[88] Simon, J.
Second variations for domain optimization problems.
Control Theory of Distributed Parameter Systems and Applications, Vol. 91, pp. 361–378, 1989.

[89] Sokolowski, J. and Zolésio, J. P.
Introduction to Shape Optimization: Shape Sensitivity Analysis.
Springer, New York, 1992.

[90] Tago, T., Aoki, T., and Azegami, H.
Identification of building damage using vibrational eigenvalue and eigenmode pairs.
Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, Vol. 32, No. 2, pp. 297–313, 2015.

[91] Tautenhahn, U.
On the asymptotical regularization of nonlinear ill-posed problems.
Inverse Problems, Vol. 10, pp. 1405–1418, 1994.

[92] Vanderplaats, G. N.
Numerical Optimization Techniques for Engineering Design: With Applications.
McGraw-Hill, NewYork, 1984.

[93] Vanderplaats, G. N. and Miura, H.
GENESIS-structural synthesis software using advanced approximation techniques.
AIAA Report (92-4839-CP), pp. 180–190, 1992.

[94] Wang, M. Y., Wang, X., and Guo, D.
A level set method for structural topology optimization.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 192, pp. 227–246, 2003.

[95] Wu, Z. Q., Sogabe, Y., Arimitsu, Y., and Azegami, H.
Shape optimization of transient response problems.
In Tanaka, M. and Dulikravich, G. S., editors, Inverse Problems in Engineering Mechanics II, pp. 285–294. Elsevier, Tokyo, 2000.

[96] Wu, Z. Q., Sogabe, Y., and Azegami, H.
Shape optimization analysis for frequency response problems of solids with proportional viscous damping.
Key Engineering Materials, Vol. 145-149, pp. 227–232, 1997.

[97] 呉志強, 畔上秀幸.
固有振動問題における領域最適化解析 (質量最小化問題).
日本機械学会論文集 C 編, Vol. 61, No. 587, pp. 2653–2696, 1995.

[98] 呉志強, 畔上秀幸.
固有振動問題における領域最適化解析 (力法によるアプローチ).
日本機械学会論文集 C 編, Vol. 61, No. 583, pp. 930–937, 1995.

[99] 呉志強, 畔上秀幸.
周波数応答問題における領域最適化解析 (力法によるアプローチ).
日本機械学会論文集 C 編, Vol. 61, No. 590, pp. 3968–3975, 1995.

[100] 呉志強, 曽我部雄次, 畔上秀幸.
比例粘性減衰を考慮した周波数応答問題における領域最適化解析.
日本機械学会論文集 C 編, Vol. 64, No. 623, pp. 2618–2624, 1998.

[101] Yamada, T., Izui, K., Nishiwaki, S., and Takezawa, A.
A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 199, pp. 2876–2891, 2010.

[102] Zolésio, J. P.
Domain variational formulation for free boundary problems.
In Haug, E. J. and Cea, J., editors, Optimization of Distributed Parameter Structures, Vol. 2, pp. 1152–1194. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, 1981.

[103] Zolésio, J. P.
The material derivative (or speed) method for shape optimization.
In Haug, E. J. and Cea, J., editors, Optimization of Distributed Parameter Structures, Vol. 2, pp. 1089–1151. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, 1981.