第 6 章 数値解析の基礎

畔上 秀幸

December 27, 2021

名古屋大学 情報学研究科 複雑系科学専攻

はじめに

本章では，偏微分方程式の境界値問題に対する近似解の求め方についてみておきたい．

6.1 Galerkin 法

§6.1 Galerkin 法

楕円型偏微分方程式の境界値問題に対する近似解の求め方として，Galerkin 法についてみてみよう．ここでは，1 次元 Poisson 問題を Galerkin 法で解くところをみてから，$d \in \{2, 3\}$ 次元 Poisson 問題も同様に解けるところをみていくことにする．

次のような混合境界条件をもつ 1 次元 Poisson 問題を考えよう．

問題 6.1.1 (1 次元 Poisson 問題)

$b : (0,1) \to \mathbb{R}$, $p_{\mathrm{N}} \in \mathbb{R}$ および $u_{\mathrm{D}} : (0,1) \to \mathbb{R}$ が与えられたとき，

$$-\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = b \quad \text{in } (0,1), \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(1) = p_{\mathrm{N}}, \quad u(0) = u_{\mathrm{D}}(0)$$

を満たす $u : (0,1) \to \mathbb{R}$ を求めよ．

問題 6.1.1 に対して，

$$U = \left\{ v \in H^1\left((0,1);\mathbb{R}\right) \;\middle|\; v(0) = 0 \right\} \tag{6.1.1}$$

とおく．また，$u, v \in U$ に対して

$$a(u,v) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x, \tag{6.1.2}$$

$$l(v) = \int_0^1 bv\,\mathrm{d}x + p_{\mathrm{N}} v(1) \tag{6.1.3}$$

とおく．この問題の弱形式は次のようになる．

問題 6.1.2 (1 次元 Poisson 問題の弱形式)

$a(\cdot,\cdot)$ と $l(\cdot)$ はそれぞれ式 (6.1.2) と式 (6.1.3) とする．$b \in L^2((0,1);\mathbb{R})$, $p_{\mathrm{N}} \in \mathbb{R}$ および $u_{\mathrm{D}} \in H^1((0,1);\mathbb{R})$ が与えられたとき，任意の $v \in U$ に対して

$$a(u,v) = l(v) \tag{6.1.4}$$

を満たす $u - u_{\mathrm{D}} \in U$ を求めよ．

問題 6.1.2 に対して，Galerkin 法では近似関数を次のように構成する．m を自然数とする．

定義 6.1.3 (近似関数の集合)

$\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \ldots, \phi_m)^\top \in U^m$ を m 個の 1 次独立な既知関数とする．U に対する近似関数の集合を，$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_i)_i \in \mathbb{R}^m$ を未定乗数として，

$$U_h = \left\{ v_h(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i \in \{1,\ldots,m\}} \alpha_i \phi_i = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\phi} \;\middle|\; \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^m \right\}$$

とおく．このとき，$\boldsymbol{\phi}$ を基底関数とよぶ．

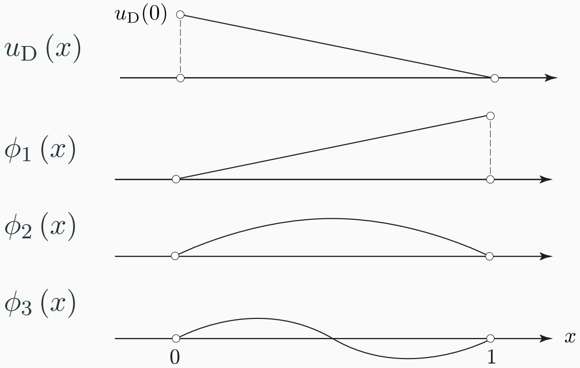


図 6.1: 基底関数 u_{D}, ϕ の例

図 6.1 に u_{D} と ϕ の例を示す．このように定義された u_{D} と U_h を用いて，$u - u_{\mathrm{D}} \in U$ と $v \in U$ の近似関数を $u_h - u_{\mathrm{D}} \in U_h$ と $v_h \in U_h$ と仮定する．このことは，定義 4.2.6 に従えば，

$$
\begin{aligned}
u_h &= u_{\mathrm{D}} + \operatorname{span} \boldsymbol{\phi}, \\
v_h &= \operatorname{span} \boldsymbol{\phi}
\end{aligned}
$$

ともかける．このとき，U_h は ϕ を含む最小の部分線形空間 (すなわち線形空間) となる．さらに，$H^1((0,1);\mathbb{R})$ に対して定義された内積を用いることにすれば，U_h は Hilbert 空間となる．このとき，U_h の中で独立に選べるベクトルの数は m である．そこで，U_h は m 次元の Hilbert 空間であることになる．

近似関数の集合 U_h と u_{D} が定義されたので，それらを使って問題 6.1.2 に対する Galerkin 法を次のように定義する．

定義 6.1.4 (Galerkin 法)

u_{D} と U_h を定義 6.1.3 のとおりとする．$u_h(\boldsymbol{\alpha}) - u_{\mathrm{D}} \in U_h$ と $v_h(\boldsymbol{\beta}) \in U_h$ を式 (6.1.4) の $u - u_{\mathrm{D}} \in U$ と $v \in U$ に代入すれば，$\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^m$ を未知ベクトルとする連立 1 次方程式が得られる．その方程式の解 $\boldsymbol{\alpha}$ を用いて，問題 6.1.2 の近似解を $u_h(\boldsymbol{\alpha}) = u_{\mathrm{D}} + \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\alpha}$ によって求める方法を Galerkin 法という．

U_h は Hilbert 空間であることから，Lax-Milgram の定理を適用すれば，Galerkin 法の解 $u_h(\boldsymbol{\alpha})$ の一意存在はいえる．実際，$a(\cdot,\cdot)$ は有界で，U_h は同次基本境界条件を満たすので，$U_h \times U_h$ 上で $a(\cdot,\cdot)$ の強圧性はいえて，例題 5.2.5 のような $\hat{l}(\cdot)$ が U_h' に入ることがいえるためである．さらに，$a(\cdot,\cdot)$ は対称にもなっている．$a(\cdot,\cdot)$ の対称性と強圧性は，後で示される解くべき連立 1 次方程式における係数行列の対称性と正定値性となって現れる．

実際に問題 6.1.2 を Galerkin 法で解く過程を詳細にみていこう．定義 6.1.3 の u_{D} と U_h を用いて，$u_h - u_{\mathrm{D}} \in U_h$ と $v_h \in U_h$ を弱形式 (式 (6.1.4)) に代入して，任意の $v_h \in U_h$ に対して

$$a\left(u_h, v_h\right) = l\left(v_h\right) \tag{6.1.5}$$

が満たされるような u_h を求めることを目指す．式 (6.1.5) の両辺はそれぞれ

$$\begin{aligned} a\left(u_h, v_h\right) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u_h}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v_h}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x, \\ l\left(v_h\right) &= \int_0^1 b v_h\,\mathrm{d}x + p_{\mathrm{N}} v_h\left(1\right) \end{aligned}$$

である．$a\left(u_h, v_h\right)$ の被積分項は

$$
\frac{\mathrm{d}u_h}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{D}}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\phi}}{\mathrm{d}x} \cdot \boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{D}}}{\mathrm{d}x} + \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}x} & \cdots & \frac{\mathrm{d}\phi_m}{\mathrm{d}x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix},
$$

$$
\frac{\mathrm{d}v_h}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\phi}}{\mathrm{d}x} \cdot \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}x} & \cdots & \frac{\mathrm{d}\phi_m}{\mathrm{d}x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}
$$

によって与えられる．そこで，$a\left(u_h, v_h\right)$ は

$$
\begin{aligned}
a\left(u_h, v_h\right) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u_h}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v_h}{\mathrm{d}x}\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}x} \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}\phi_m}{\mathrm{d}x} \end{pmatrix} \left(\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{D}}}{\mathrm{d}x} + \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}x} & \cdots & \frac{\mathrm{d}\phi_m}{\mathrm{d}x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \right)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_m \end{pmatrix} \\
&\quad \times \left(\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}x} & \cdots & \frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\phi_m}{\mathrm{d}x} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\mathrm{d}\phi_m}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}x} & \cdots & \frac{\mathrm{d}\phi_m}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\phi_m}{\mathrm{d}x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{D}}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}x} \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{D}}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\phi_m}{\mathrm{d}x} \end{pmatrix} \right) \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_m \end{pmatrix} \\
&\quad \times \left(\begin{pmatrix} a\left(\phi_1, \phi_1\right) & \cdots & a\left(\phi_1, \phi_m\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a\left(\phi_m, \phi_1\right) & \cdots & a\left(\phi_m, \phi_m\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a\left(u_{\mathrm{D}}, \phi_1\right) \\ \vdots \\ a\left(u_{\mathrm{D}}, \phi_m\right) \end{pmatrix} \right) \\
&= \boldsymbol{\beta} \cdot \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{D}} \right)
\end{aligned}
$$

となる．ただし，$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{(i,j)\in\{1,\cdots,m\}^2}$ および $\boldsymbol{a}_{\mathrm{D}} = (a_{\mathrm{D}i})_{i\in\{1,\dots,m\}}$ とかいて，

$$a_{ij} = a(\phi_i, \phi_j) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\phi_i}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\phi_j}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x, \tag{6.1.6}$$

$$a_{\mathrm{D}i} = a(u_{\mathrm{D}}, \phi_i) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{D}}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\phi_i}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \tag{6.1.7}$$

とおいた．一方，$l(v_h)$ は

$$
\begin{aligned}
l\left(v_h\right) &= \int_0^1 b v_h \,\mathrm{d}x + p_{\mathrm{N}} v_h(1) \\
&= \int_0^1 b \begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_m \end{pmatrix} \mathrm{d}x + p_{\mathrm{N}} \begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(1) \\ \vdots \\ \phi_m(1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l\left(\phi_1\right) \\ \vdots \\ l\left(\phi_m\right) \end{pmatrix} = \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{l}
\end{aligned}
$$

となる．ただし，$\boldsymbol{l} = \left(l_i\right)_{i \in \{1,\ldots,m\}}$ とかいて，

$$
l_i = l\left(\phi_i\right) = \int_0^1 b \phi_i \,\mathrm{d}x + p_{\mathrm{N}} \phi_i(1) \tag{6.1.8}
$$

とおいた．したがって，式 (6.1.5) は

$$\boldsymbol{\beta} \cdot (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{D}}) = \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{l}$$

とかける．ここで，任意の $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^m$ を考慮すれば，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{l} - \boldsymbol{a}_{\mathrm{D}} = \hat{\boldsymbol{l}} \tag{6.1.9}$$

となる．確認のために式 (6.1.9) の行列とベクトルの要素をかけば

$$\begin{pmatrix} a(\phi_1, \phi_1) & \cdots & a(\phi_1, \phi_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\phi_m, \phi_1) & \cdots & a(\phi_m, \phi_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l(\phi_1) - a(u_{\mathrm{D}}, \phi_1) \\ \vdots \\ l(\phi_m) - a(u_{\mathrm{D}}, \phi_m) \end{pmatrix}$$

となる．$\boldsymbol{A}$ は係数行列，$\hat{\boldsymbol{l}}$ は既知項ベクトルとよばれる．$\boldsymbol{A}$ は，$a(\phi_i, \phi_j) = a(\phi_j, \phi_i)$ より対称である．また，$a(\cdot, \cdot)$ の U_h における強圧性により，任意の $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^m$ に対して

$$\boldsymbol{\beta} \cdot (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}) = a(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{v}_h) \geq c_0 \|\boldsymbol{\beta}\|^2_{\mathbb{R}^m}$$

を満たす $c_0 > 0$ が存在する．したがって，$\boldsymbol{A}$ は正定値対称行列 (よって正則行列) となり，$\boldsymbol{A}$ の逆行列がとれて，

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{A}^{-1}\hat{\boldsymbol{l}} \tag{6.1.10}$$

によって $\boldsymbol{\alpha}$ が計算される．近似解 u_h は，この $\boldsymbol{\alpha}$ を用いて

$$u_h = u_{\mathrm{D}} + \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\alpha} \tag{6.1.11}$$

によって得られることになる．

このようにみてくると，基底関数 u_{D} と ϕ には，$\int_0^1 (\mathrm{d}\phi_i/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}\phi_j/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x$ の計算が容易にできるようなものを選ぶ必要がある． さらに，基底関数の微分が互いに直交しているように選べたならば，$\boldsymbol{A}$ は対角行列になり，逆行列の計算は容易になる．

次の例題を Galerkin 法で解いてみよう．

例題 6.1.5 (1 次元 Dirichlet 問題に対する Galerkin 法)

基底関数を

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 & \cdots & \phi_m \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} \sin(1\pi x) & \cdots & \sin(m\pi x) \end{pmatrix}^\top$$

とおいて，Galerkin 法により

$$-\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = 1 \quad \text{in } (0,1), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

を満たす近似解 $u_h : (0,1) \to \mathbb{R}$ を求めよ．

解答　$U = H_0^1((0,1);\mathbb{R})$ とおいて，この問題の弱形式を，任意の $v \in U$ に対して

$$a(u,v) = l_1(v)$$

とかく．ただし，$a(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ を式 (6.1.2)，$l_1(\,\cdot\,)$ を式 (6.1.3) において $b=1$ および $p=0$ のときの $l(\,\cdot\,)$ とする．近似関数を $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^m$ に対して

$$u_h = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\phi}(x), \quad v_h = \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\phi}(x)$$

とおく．これらを弱形式に代入すれば，

$$\boldsymbol{\beta} \cdot (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{l}_1$$

が得られる．ここで，$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{(i,j)\in\{1,\dots,m\}^2}$ および $\boldsymbol{l}_1 = (l_{1i})_{i\in\{1,\dots,m\}}$ とかいて，

$$
\begin{aligned}
a_{ij} &= a\left(\phi_i, \phi_j\right) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\phi_i}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\phi_j}{\mathrm{d}x}\ \mathrm{d}x = ij\pi^2 \int_0^1 \cos\left(i\pi x\right)\cos\left(j\pi x\right)\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}ij\pi^2 \int_0^1 \left[\cos\left\{\left(i+j\right)\pi x\right\} + \cos\left\{\left(i-j\right)\pi x\right\}\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2}ij\pi^2\delta_{ij}, \\
l_{1i} &= \int_0^1 \sin\left(i\pi x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{i\pi}\left[-\cos\left(i\pi x\right)\right]_0^1 = \frac{\left(-1\right)^{i+1}+1}{i\pi}
\end{aligned}
$$

となる．ただし，

$$
\delta_{ij} = \begin{cases} 1\ \left(i = j\right) \\ 0\ \left(i \neq j\right) \end{cases}
$$

は Kronecker デルタを表す．そこで，$\boldsymbol{A\alpha} = \boldsymbol{l}_1$ は

$$\frac{\pi^2}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 9 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2/3 \\ \vdots \\ \dfrac{(-1)^{m+1}+1}{m} \end{pmatrix}$$

となる．この連立 1 次方程式を解けば，

$$\alpha_i = \frac{2\left\{(-1)^{i+1}+1\right\}}{i^3\pi^3}$$

が得られる．したがって，近似解は

$$u_h = \sum_{i \in \{1,\dots,m\}} \frac{2\left\{(-1)^{i+1} + 1\right\}}{i^3\pi^3} \sin(i\pi x)$$

となる．一方，厳密解は

$$u = \frac{1}{2} x (x-1)$$

である．図 6.2 に近似解と厳密解の比較を示す． □

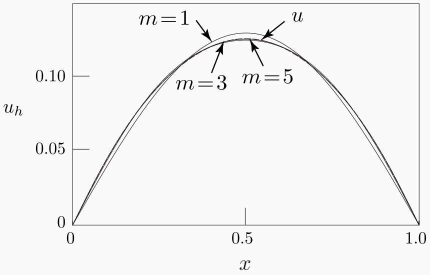


図 6.2: 例題 6.1.5 の厳密解と近似解

§6.1.2 d 次元 Poisson 問題

次に，$d \in \{2,3\}$ 次元 Poisson 問題を Galerkin 法で解くことを考えよう． 問題 5.1.1 を再記しよう．

問題 6.1.6 (d 次元 Poisson 問題)

$b : \Omega \to \mathbb{R}$, $p_{\mathrm{N}} : \Gamma_{\mathrm{N}} \to \mathbb{R}$ および $u_{\mathrm{D}} : \Omega \to \mathbb{R}$ が与えられたとき，

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= b \quad \text{in } \Omega, \\
\frac{\partial u}{\partial \nu} &= p_{\mathrm{N}} \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{N}}, \\
u &= u_{\mathrm{D}} \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{D}}
\end{aligned}
$$

を満たす $u : \Omega \to \mathbb{R}$ を求めよ．

問題 6.1.6 に対して，

$$U = \left\{ u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}) \;\middle|\; u = 0 \text{ on } \Gamma_{\mathrm{D}} \right\} \tag{6.1.12}$$

とおく．また，$u, v \in U$ に対して

$$a(u, v) = \int_\Omega \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v \, \mathrm{d}x, \tag{6.1.13}$$

$$l(v) = \int_\Omega b v \, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_{\mathrm{N}}} p_{\mathrm{N}} v \, \mathrm{d}\gamma \tag{6.1.14}$$

とおく．この問題の弱形式は次のようになる

問題 6.1.7 (d 次元 Poisson 問題の弱形式)

$b \in L^2(\Omega; \mathbb{R})$, $p_\mathrm{N} \in L^2(\Gamma_\mathrm{N}; \mathbb{R})$ および $u_\mathrm{D} \in H^1(\Omega; \mathbb{R})$ が与えられたとき，任意の $v \in U$ に対して

$$a(u, v) = l(v) \tag{6.1.15}$$

を満たす $u - u_\mathrm{D} \in U$ を求めよ．

問題 6.1.6 に対して，近似関数を次のように構成する．m を自然数とする．

定義 6.1.8 (近似関数の集合)

$\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \ldots, \phi_m)^\top \in U^m$ を m 個の 1 次独立な既知関数とする．U に対する近似関数の集合を，$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_i)_i \in \mathbb{R}^m$ を未定乗数として，

$$U_h = \left\{ v_h(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i \in \{1,\ldots,m\}} \alpha_i \phi_i = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\phi} \,\middle|\, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^m \right\}$$

とおく．このとき，$\boldsymbol{\phi}$ を基底関数とよぶ．

定義 6.1.3 と定義 6.1.8 を比較すれば，関数の定義域が変更されただけで，同一の表現が使われている．そこで，d 次元 Poisson 問題に対しても，1 次元 Poisson 問題に対して使われた多くの式がそのまま使われることになる．そのことを以下で確認しよう．定義 6.1.8 の u_{D} と U_h を用いて，$u_h - u_{\mathrm{D}} \in U_h$ と $v_h \in U_h$ が弱形式 (式 (6.1.15)) に代入された

$$a\left(u_h, v_h\right) = l\left(v_h\right) \tag{6.1.16}$$

は式 (6.1.5) と同じになる．ただし，$a\left(\,\cdot\,,\,\cdot\,\right)$ と $l\left(\,\cdot\,\right)$ の定義は

$$\begin{aligned} a\left(u_h, v_h\right) &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\nabla} u_h \cdot \boldsymbol{\nabla} v_h \, \mathrm{d}x, \\ l\left(v_h\right) &= \int_{\Omega} b v_h \, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_{\mathrm{N}}} p_{\mathrm{N}} v_h \, \mathrm{d}\gamma \end{aligned}$$

に置き換えられる．それ以後は 1 次元 Poisson 問題のときと同様の式展開がおこなわれ，式 (6.1.9) と同じ

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{l} - \boldsymbol{a}_{\mathrm{D}} = \hat{\boldsymbol{l}} \tag{6.1.17}$$

が得られる．ただし，$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{(i,j)\in\{1,\dots,m\}^2}$，$\boldsymbol{a}_{\mathrm{D}} = (a_{\mathrm{D}i})_{i\in\{1,\dots,m\}}$ および $\boldsymbol{l} = (l_i)_{i\in\{1,\dots,m\}}$ はそれぞれ

$$a_{ij} = a(\phi_i, \phi_j) = \int_\Omega \boldsymbol{\nabla}\phi_i \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi_j \,\mathrm{d}x, \tag{6.1.18}$$

$$a_{\mathrm{D}i} = a(u_{\mathrm{D}}, \phi_j) = \int_\Omega \boldsymbol{\nabla}u_{\mathrm{D}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi_j \,\mathrm{d}x, \tag{6.1.19}$$

$$l_i = l(\phi_i) = \int_\Omega b\phi_i \,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_{\mathrm{N}}} p_{\mathrm{N}}\phi_i \,\mathrm{d}\gamma \tag{6.1.20}$$

のように変更される．$\boldsymbol{A}$ は正定値対称行列となり，$\boldsymbol{A}$ の逆行列がとれて，式 (6.1.10) と式 (6.1.11) の表記はそのまま成り立つことになる．

正方領域に対する 2 次元 Dirichlet 問題を Galerkin 法で解いてみよう．それをみれば，式 (6.1.10) と式 (6.1.11) の表記がそのまま成り立つことが了解されるであろう ([3, 例 3.2, p. 30])．

例題 6.1.9 (2 次元 Dirichlet 問題に対する Galerkin 法)

基底関数を

$$\boldsymbol{\phi} = \left(\phi_{ij}\left(\boldsymbol{x}\right)\right)_{(i,j)\in\{1,\ldots,m\}^2} = \left(\sin\left(i\pi x_1\right)\sin\left(j\pi x_2\right)\right)_{(i,j)\in\{1,\ldots,m\}^2}$$

として，Galerkin 法により

$$-\Delta u = 1 \quad \text{in } \Omega = (0,1)^2, \quad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

を満たす近似解 $u_h : (0,1)^2 \to \mathbb{R}$ を求めよ．

解答　$U = H_0^1\left((0,1)^2;\mathbb{R}\right)$ とおいて，この問題の弱形式を，任意の $v \in U$ に対して

$$a\left(u, v\right) = l_1\left(v\right)$$

とかく．ただし，$a(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ を式 (6.1.13)，$l_1\left(\,\cdot\,\right)$ を式 (6.1.14) において $b=1$ および $p=0$ のときの $l\left(\,\cdot\,\right)$ とする．近似関数を $\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ に対して

$$u_h = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\phi}\left(\boldsymbol{x}\right) = \sum_{(i,j)\in\{1,\dots,m\}^2} \alpha_{ij}\phi_{ij}\left(\boldsymbol{x}\right),$$

$$v_h = \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\phi}\left(\boldsymbol{x}\right) = \sum_{(i,j)\in\{1,\dots,m\}^2} \beta_{ij}\phi_{ij}\left(\boldsymbol{x}\right)$$

とおく．u_h, v_h を弱形式に代入すれば，

$$\boldsymbol{\beta} \cdot (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{l}_1$$

が得られる．ここで，$\boldsymbol{A} = (a(\phi_{ij}, \phi_{kl}))_{(i,j,k,l)\in\{1,\dots,m\}^4}$ および
$\boldsymbol{l}_1 = (l_1(\phi_{ij}))_{(i,j)\in\{1,\dots,m\}^2}$ とかけば，

$$\begin{aligned}
a(\phi_{ij}, \phi_{kl}) &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial \phi_{ij}}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_{kl}}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_{kl}}{\partial x_2} \right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left\{ ki\pi^2 \cos(k\pi x_1) \sin(l\pi x_2) \cos(i\pi x_1) \sin(j\pi x_2) \right. \\
&\qquad \left. + lj\pi^2 \sin(k\pi x_1) \cos(l\pi x_2) \sin(i\pi x_1) \cos(j\pi x_2) \right\} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \\
&= \frac{\pi^2}{4} (ki + lj) \delta_{ki} \delta_{lj},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
l_1\left(\phi_{ij}\right) &= \int_0^1 \int_0^1 \sin\left(i\pi x_1\right)\sin\left(j\pi x_2\right)\ \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \\
&= \frac{\left\{(-1)^{i+1}+1\right\}\left\{(-1)^{j+1}+1\right\}}{ij\pi^2}
\end{aligned}
$$

が得られる．そこで，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{l}_1$ は

$$
\sum_{(k,l)\in\{1,\ldots,m\}^2} \frac{\pi^2}{4}\left(ki+lj\right)\delta_{ki}\delta_{lj}\alpha_{ij} = \frac{\left\{(-1)^{i+1}+1\right\}\left\{(-1)^{j+1}+1\right\}}{ij\pi^2}
$$

となる．この連立 1 次方程式を解けば，$i, j \in \{1, \ldots, m\}$ に対して

$$
\alpha_{ij} = \frac{4\left\{(-1)^{i+1}+1\right\}\left\{(-1)^{j+1}+1\right\}}{ij\left(i^2+j^2\right)\pi^4}
$$

が得られる．したがって，近似解 u_h は

$$u_h = \sum_{(i,j)\in\{1,\ldots,m\}^2} \frac{4\left\{(-1)^{i+1}+1\right\}\left\{(-1)^{j+1}+1\right\}}{ij\left(i^2+j^2\right)\pi^4}\sin(i\pi x)\sin(j\pi x) \qquad (6.1.21)$$

となる． □

§6.1.3 Ritz 法

Galerkin 法では近似関数が弱形式に代入された．しかし，近似関数を最小化問題に代入しても同一の近似解が得られる．その方法は Ritz 法とよばれる．

問題 6.1.7 を最小化問題にかきかえた次の問題を考えよう．$a(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$, $l\,(\,\cdot\,)$, u_{D} および U は問題 6.1.7 で使われたものと同じであるとする．

問題 6.1.10 (d 次元 Poisson 問題の最小化問題)

$b \in L^2\,(\Omega;\mathbb{R})$, $p_{\mathrm{N}} \in L^2\,(\Gamma_{\mathrm{N}};\mathbb{R})$ および $u_{\mathrm{D}} \in H^1\,(\Omega;\mathbb{R})$ に対して，

$$\min_{u-u_{\mathrm{D}}\in U}\left\{f\,(u)=\frac{1}{2}a\,(u,u)-l\,(u)\right\}$$

を満たす u を求めよ．

問題 6.1.10 に対して Ritz 法は次のように定義される．

定義 6.1.11 (Ritz 法)

U_h を定義 6.1.8 のとおりとする．$u_h(\boldsymbol{\alpha}) - u_{\mathrm{D}} \in U_h$ を問題 6.1.10 の $u - u_{\mathrm{D}} \in U$ に代入すれば，$f(u)$ の $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^m$ の変動に対する停留条件 ($\boldsymbol{\alpha}$ を未知ベクトルとする連立 1 次方程式) が得られる．その方程式の解 $\boldsymbol{\alpha}$ を用いて問題 6.1.10 の近似解を $u_h(\boldsymbol{\alpha}) = u_{\mathrm{D}} + \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\alpha}$ によって求める方法を Ritz 法という．

問題 6.1.10 を Ritz 法で解いてみよう．u_h を $f(u_h)$ に代入すれば，

$$f(u_h) = \frac{1}{2}\{a(u_{\mathrm{D}}, u_{\mathrm{D}}) + \boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}) + 2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{D}}\} - (l(u_{\mathrm{D}}) + \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{l})$$

が得られる．ただし，$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{a}_{\mathrm{D}}$ および $\boldsymbol{l}$ はそれぞれ式 (6.1.18), 式 (6.1.19) および式 (6.1.20) である．$f(u_h)$ の最小条件より，

$$\frac{\partial f(u_h)}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{D}} - \boldsymbol{l} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^m}$$

が得られる．この式は，Galerkin 法の式 (6.1.17) と一致する．

このように，Ritz 法は，近似関数を u に対してのみ構成すればよいことから，理論がコンパクトにおさまるという利点をもつ．しかし，Galerkin 法と比較すれば，楕円型偏微分方程式の境界値問題が最小化問題にかきかえられるとき，すなわち，5.2 節でみてきたように，$a(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ が対称のときに限られる

ことに注意しなければならない．また，$a(\cdot\,,\,\cdot)$ が対称のときには Galerkin 法と Ritz 法によって得られる方程式は同一になることから，二つの方法を合わせて Ritz-Galerkin 法とよぶことがある．

§6.1.4 基本誤差評価

Galerkin 法の解 $u_h(\boldsymbol{\alpha})$ が一意に存在することは，近似関数の集合 U_h が Hilbert 空間であることから，Lax-Milgram の定理によって保証されることをみてきた．さらに，厳密解の属する Hilbert 空間のノルムを用いれば，近似解の誤差について明快な結果が得られる．

ここでは，問題 6.1.1 に対して，

$$
\begin{aligned}
V &= H^1\left((0,1);\mathbb{R}\right), \\
U &= \left\{v \in V \mid v(0) = 0\right\}, \\
U(u_{\mathrm{D}}) &= \left\{v \in V \mid v - u_{\mathrm{D}} \in U,\ u_{\mathrm{D}} \in V\right\}
\end{aligned}
$$

とおく．問題 6.1.6 に対して，

$$
\begin{aligned}
V &= H^1\left(\Omega;\mathbb{R}\right), \\
U &= \left\{v \in V \mid v = 0 \text{ on } \Gamma_{\mathrm{D}}\right\}, \\
U(u_{\mathrm{D}}) &= \left\{v \in V \mid v - u_{\mathrm{D}} \in U,\ u_{\mathrm{D}} \in V\right\}
\end{aligned}
$$

とおく．V' を V の双対空間とする．また，近似関数の集合 U_h を問題 6.1.1 に対して定義 6.1.3，問題 6.1.6 に対して定義 6.1.8 とする．さらに，これまでは u_{D} の近似関数は考えてこなかったが，ここではその近似関数を $u_{\mathrm{D}h}$ とおき，

$$U_h\left(u_{\mathrm{D}h}\right) = \left\{u_h \in V \mid h_h - u_{\mathrm{D}h} \in U_h\right\}$$

とかくことにする．

　結果の一つは，既知関数の誤差が近似解に及ぼす影響に関する次のような結果である (たとえば，[1, Remark 1.2, p. 30], [2, 定理 2.3, p. 34])．

定理 6.1.12 (近似解の安定性)

$a : V \times V \to \mathbb{R}$ を有界かつ強圧的な双 1 次形式とする．任意の $l_1, l_2 \in V'$ に対する問題 6.1.2 あるいは問題 6.1.7 の Galerkin 法による近似解を $u_{h1}, u_{h2} \in U_h(u_{\mathrm{D}h}) \subset U(u_{\mathrm{D}})$ とする．このとき，

$$\|u_{h1} - u_{h2}\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|l_1 - l_2\|_{V'}$$

が成り立つ．ただし，$\alpha > 0$ は $a(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ の強圧性を与える定数とする (定義 5.2.1)．

もう一つは，Galerkin 法の近似解 u_h は，近似解の集合 $U_h(u_{\mathrm{D}h})$ の中で最良の (厳密解にもっとも近い) 要素になっていることを示す結果である．ただし，

厳密解 $u \in U(u_{\mathrm{D}})$ と $u_h \in U_h(u_{\mathrm{D}h})$ の距離を $\sqrt{a(u-u_h, u-u_h)}$ あるいは V のノルム $\|u-u_h\|_V$ で計るものとする．次の結果は Cea の補題とよばれる (たとえば，[1, Theorem 13.1, p. 113], [5, 補題 2.3, p. 54], [2, 定理 2.4, p. 42])．

定理 6.1.13 (基本誤差評価)

任意の $l \in U'$ に対する問題 6.1.2 あるいは 6.1.7 の解を $u \in U\ (u_{\mathrm{D}})$，Galerkin 法による近似解を $u_h \in U_h\ (u_{\mathrm{D}h})$ とする．このとき，

$$a\left(u - u_h, u - u_h\right) \leq \inf_{v_h \in U_h(u_{\mathrm{D}h})} a\left(u - v_h, u - v_h\right),$$

$$\left\|u - u_h\right\|_V \leq \sqrt{\frac{\|a\|}{\alpha}} \inf_{v_h \in U_h(u_{\mathrm{D}h})} \left\|u - v_h\right\|_V + \left(1 + \sqrt{\frac{\|a\|}{\alpha}}\right) \left\|u_{\mathrm{D}} - u_{\mathrm{D}h}\right\|_V$$

が成り立つ．ただし，$\|a\|$ は双線形作用素のノルム (4.4.4 項)，$\alpha > 0$ は $a(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ の強圧性を与える定数である．

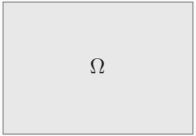
定理 6.1.13 は，Galerkin 法による近似解は U_h の中で最良であることを示している．そこで，Galerkin 法による近似解の誤差を小さくするためには，厳密解に近づく能力をもった近似関数を U_h の中にそろえておくことが有効であることを示している．そのことは，Galerkin 法を基礎にした数値解法の誤差評価をおこなう際にも使われる．有限要素法に対する誤差評価は，6.6 節で詳しくみることにしよう．

6.2 1次元有限要素法

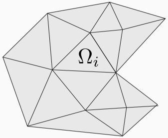
Galerkin 法では基底関数の線形結合で近似関数が構成され，それらを弱形式に代入することで未定乗数が決定されていた．その枠組みを変えないで，基底関数の選び方について再考することにしよう．

6.1 節でみてきた Galerkin 法では，基底関数は領域全体で定義された関数の中から選ばれていた．例題 6.1.9 では $(\sin(i\pi x_1)\sin(j\pi x_2))_{(i,j)\in\{1,\ldots,m\}^2}$ が基底関数に選ばれていた．これらの関数は偏微分方程式の境界値問題の定義域 $\Omega=(0,1)^2$ を台としている．このような基底関数の選び方をする限りにおいては，境界値問題が定義された領域形状は，図 6.3 (a) のような矩形や楕円などに制限されることになる．

それに対して，図 6.3 (b) のような多角形領域 Ω を単純な 3 角形領域 $\{\Omega_i\}_i$ に分割して，それぞれの 3 角形領域を台にもつ基底関数で U_h を構成することを考える．このようにすれば，Galerkin 法の枠組みは変更せずに，基底関数の選び方を変更するだけで，任意の多角形上で定義された境界値問題の近似解がえられそうである．このような方針で臨んだ Galerkin 法が有限要素法である．このときにえらばれた単純な領域を**有限要素**とよぶ．



(a) Ω：6.1 節の Galerkin 法



(b) $\{\Omega_i\}_i$：有限要素法

図 6.3: 近似関数の台

本節では，1 次元 Poisson 問題を有限要素法で解く過程を詳しくみてみることにしよう．最初に，有限要素法で使われる近似関数を Galerkin 法の枠組みで定義する．その後で，その近似関数は分割された有限要素の領域ごとに定義された近似関数であるとみなす．それによって，弱形式の積分が有限要素の領域ごとの積分に置き換えられることになる．

1 次元 Poisson 問題 (問題 6.1.1 とその弱形式表現である問題 6.1.2) に対する有限要素法を考えよう.

有限要素法では，領域 $\Omega = (0,1)$ を図 6.4 のように (x_0, x_1), (x_1, x_2), . . . , (x_{m-1}, x_m) に分割する．ここで，x_0, x_1, . . . , x_m を**節点**とよび，(x_0, x_1), (x_1, x_2), . . . , (x_{m-1}, x_m) を**1 次元有限要素**あるいは有限要素の領域とよぶ．有限要素に番号をつけて，その番号の集合を $\mathcal{E} = \{1, \dots, m\}$ とかくことにする．また，節点にも番号をつけて，その番号の集合を $\mathcal{N} = \{0, \dots, m\}$ とかくことにする．

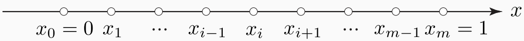


図 6.4: 1 次元領域 $\Omega = (0,1)$ における有限要素と節点

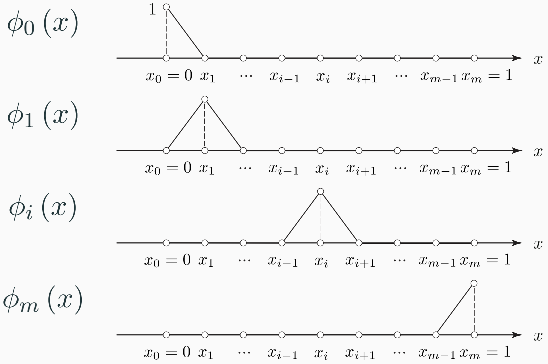


図 6.5: 1 次元有限要素法における基底関数 $\phi_0, \ldots, \phi_m$

問題 6.1.1 に対する 1 次元有限要素法の基底関数を，図 6.5 のような高さ 1 の山形の関数

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \text{ in } (0, x_1) \\ 0 \text{ in } (x_1, 1) \end{cases}$$

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \text{ in } (x_{i-1}, x_i) \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \text{ in } (x_i, x_{i+1}) \\ 0 \text{ in } (0, x_{i-1}) \cup (x_{i+1}, 1) \end{cases} \quad \text{for } i \in \{1, 2, \ldots, m\}$$

$$\phi_m(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{m-1}}{x_m - x_{m-1}} \text{ in } (x_{m-1}, 1) \\ 0 \text{ in } (0, x_{m-1}) \end{cases}$$

に選ぶ．近似関数は

$$u_h\left(\bar{\boldsymbol{u}}\right) = u_0\phi_0 + \sum_{i\in\{1,\dots,m\}} u_i\phi_i = \begin{pmatrix} \bar{u}_{\mathrm{D}} \\ \bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi_{\mathrm{D}} \\ \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix} = \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{\phi}, \tag{6.2.1}$$

$$v_h\left(\bar{\boldsymbol{v}}\right) = v_0\phi_0 + \sum_{i\in\{1,\dots,m\}} v_i\phi_i = \begin{pmatrix} \bar{v}_{\mathrm{D}} \\ \bar{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi_{\mathrm{D}} \\ \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix} = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{\phi} \tag{6.2.2}$$

のように構成する．ただし，$u_0 = \bar{u}_{\mathrm{D}} = u_{\mathrm{D}}$ および $v_0 = \bar{v}_{\mathrm{D}} = 0$ とするが，代入はあとでおこなう．ここで，$\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}} = (u_1, \dots, u_m)^\top$ と $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{N}} = (v_1, \dots, v_m)^\top$ が未定乗数である．なお，$(\bar{\cdot})$ はベクトルの意味でつけたが，$\bar{u}_{\mathrm{D}}$ と $\bar{v}_{\mathrm{D}}$ は，たまたま問題 6.1.1 では基本境界条件が与えられた節点が 1 つであったために 1 次元ベクトルとなった．

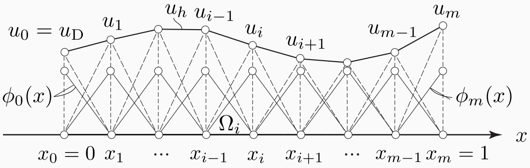


図 6.6: 1 次元有限要素法における節点値ベクトル $\bar{u}$

このように定義された近似関数の特徴についてみておこう．まず，基底関数がこのような連続関数であることは，$H^1(\Omega;\mathbb{R})$ に含まれることになり (Sobolev の埋蔵定理 (定理 4.3.14))，弱形式に代入するための要件を満たしている．有限要素上で 1 次多項式であることは，$a(\phi_i, \phi_j)$ の中に現れる ϕ_i と ϕ_j の微分の評価が容易になることを意味する．また，節点ごとに定義された

基底関数は節点に隣接する有限要素だけを台にもつことになり，$a(\phi_i, \phi_j)$ の積分領域はそれらの有限要素に限定される．さらに，節点 $i \in \mathcal{N}$ で 1 となる基底関数 ϕ_i に対する未定乗数 u_i は，図 6.6 のように，近似関数の節点値と一致する．このことから，$\bar{\boldsymbol{u}}$ と $\bar{\boldsymbol{v}}$ は節点値ベクトルとよばれる．本書では，$\bar{\boldsymbol{u}}$ と $\bar{\boldsymbol{v}}$ の要素を二つに分けて，基本境界条件を与える $\bar{u}_{\mathrm{D}} = u_0$ と $\bar{v}_{\mathrm{D}} = v_0$ を Dirichlet 型節点値ベクトル (この場合は実数) とおよび，$\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}} = (u_1, \ldots, u_m)^{\top}$ と $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{N}} = (v_1, \ldots, v_m)^{\top}$ を Neumann 型節点値ベクトルとよぶことにする．

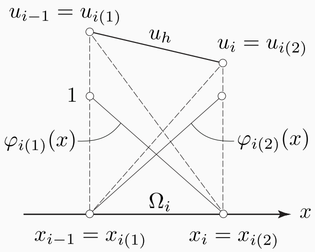


図 6.7: 1 次元有限要素法における有限要素上の基底関数 $\varphi_{i(1)}$，$\varphi_{i(2)}$

　これまでは，有限要素法が Galerkin 法の一つであるとの認識のもとで，近似関数の定義域は Ω であるとみなしてきた．しかし，有限要素 $i \in \mathcal{E}$ の領域 $\Omega_i = (x_{i-1}, x_i)$ を台にもつ基底関数の集合に注目すれば，図 6.7 に示されるような節点 $i-1 \in \mathcal{N}$ と $i \in \mathcal{N}$ に対する二つの基底関数 $\phi_{i-1}(x)$ と $\phi_i(x)$ を用いて

$$\varphi_{i(1)}(x) = \phi_{i-1}(x) = \frac{x_{i(2)} - x}{x_{i(2)} - x_{i(1)}}, \tag{6.2.3}$$

$$\varphi_{i(2)}(x) = \phi_i(x) = \frac{x - x_{i(1)}}{x_{i(2)} - x_{i(1)}} \tag{6.2.4}$$

とおき，すべての $i \in \mathcal{E}$ に対して Ω_i 上の近似関数を

$$u_h(\bar{\boldsymbol{u}}_i) = \begin{pmatrix} \varphi_{i(1)} & \varphi_{i(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i(1)} \\ u_{i(2)} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\varphi}_i \cdot \bar{\boldsymbol{u}}_i, \tag{6.2.5}$$

$$v_h(\bar{\boldsymbol{v}}_i) = \begin{pmatrix} \varphi_{i(1)} & \varphi_{i(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{i(1)} \\ v_{i(2)} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\varphi}_i \cdot \bar{\boldsymbol{v}}_i \tag{6.2.6}$$

のように定義する方法もある．このとき，$\boldsymbol{\varphi}_i(x) = (\varphi_{i-1}(x), \varphi_i(x))^\top = (\varphi_{i(1)}(x), \varphi_{i(2)}(x))^\top$ を有限要素上の基底関数とよぶことにする．なお，有限要素法の専門書では，$\varphi_i(x)$ を形状関数あるいは内挿関数とよぶことが一般的である．しかし，本書の主題は形状最適化問題であることから，形状関数の用語は混乱をきたす可能性がある．そこ

で，本書では $\varphi_i(x)$ を有限要素上の基底関数あるいは混乱のおそれがないときは基底関数とよぶことにする．また，式 (6.2.5) と式 (6.2.6) において

$$\bar{\boldsymbol{u}}_i = \begin{pmatrix} u_{i-1} \\ u_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{i(1)} \\ u_{i(2)} \end{pmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{v}}_i = \begin{pmatrix} v_{i-1} \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{i(1)} \\ v_{i(2)} \end{pmatrix}$$

を有限要素 $i \in \mathcal{E}$ に対する u と v の要素節点値ベクトルという．ここで，$(\,\cdot\,)_{i(\alpha)}$ の表現によって有限要素 $i \in \mathcal{E}$ における局所節点番号 $\alpha \in \{1, 2\}$ に対応した関数あるいは値を表すことにして，$u_{i(\alpha)}$ と $v_{i(\alpha)}$ を有限要素 $i \in \mathcal{E}$ の局所節点番号表示とよぶことにする．なお，式 (6.2.5) と式 (6.2.6) の $u_h(\bar{\boldsymbol{u}}_i)$ と $v_h(\bar{\boldsymbol{v}}_i)$ は関数 $\Omega_i \to \mathbb{R}$ であることから，$x \in \Omega_i$ に対して $u_h(\bar{\boldsymbol{u}}_i)(x)$ と $v_h(\bar{\boldsymbol{v}}_i)(x)$ のようにかけることに注意されたい．$\bar{\boldsymbol{u}}_i$ と $\bar{\boldsymbol{v}}_i$ の関数でもあるような表示が使われたのは，$\bar{\boldsymbol{u}}_i$ と $\bar{\boldsymbol{v}}_i$ は未定乗数として $u_h(\bar{\boldsymbol{u}}_i)$ と $v_h(\bar{\boldsymbol{v}}_i)$ の変数

になっているためである．一方，有限要素上の基底関数
$\boldsymbol{\varphi}_i(x) = \left(\varphi_{i(1)}(x), \varphi_{i(2)}(x)\right)^\top$ は，$x \in \Omega_i$ の関数ではあるが

$$\bar{\boldsymbol{x}}_i = \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{i(1)} \\ x_{i(2)} \end{pmatrix}$$

を使って構成されている．このときの $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ は有限要素 $i \in \mathcal{E}$ に対する要素節点ベクトルという．

このように定義された有限要素上の基底関数は，$\alpha, \beta \in \{1, 2\}$ に対して

$$\varphi_{i(\alpha)}\left(x_{i(\beta)}\right) = \delta_{\alpha\beta} \tag{6.2.7}$$

を満たしている．また，すべての $i \in \mathcal{E}$ に対する $x \in \Omega_i$ において

$$\sum_{\alpha\in\{1,2\}} \varphi_{i(\alpha)}\left(x\right) = 1 \tag{6.2.8}$$

が成り立つ．式 (6.2.7) は，未定乗数 $\bar{\boldsymbol{u}}_i$ と $\bar{\boldsymbol{v}}_i$ が近似関数の節点値の意味をもつための条件となっている．また，式 (6.2.8) は，Ω_i 上で $u = 1$ を $\bar{\boldsymbol{u}}_i = (1, 1)^\top$ によって厳密に表現できるための条件になっている．

式 (6.2.5) と式 (6.2.6) で定義された $\Omega_i = (x_{i-1}, x_i)$ 上の関数 $u_h(\bar{\boldsymbol{u}}_i)$ と $v_h(\bar{\boldsymbol{v}}_i)$ を全体の節点値ベクトル $\bar{\boldsymbol{u}} = (u_0, \ldots, u_m)^\top$ と $\bar{\boldsymbol{v}} = (v_0, \ldots, v_m)^\top$ に関連づけるためには，

$$\begin{aligned} u_h(\bar{\boldsymbol{u}}_i) &= \begin{pmatrix} \varphi_{i(1)} & \varphi_{i(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{i-1} \\ u_i \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{\varphi}_i \cdot (\boldsymbol{Z}_i \bar{\boldsymbol{u}}), \qquad (6.2.9) \\ v_h(\bar{\boldsymbol{v}}_i) &= \boldsymbol{\varphi}_i \cdot (\boldsymbol{Z}_i \bar{\boldsymbol{v}}) \qquad (6.2.10) \end{aligned}$$

のような行列 $\boldsymbol{Z}_i \in \mathbb{R}^{2\times(m+1)}$ が使われる．このような $\boldsymbol{Z}_i$ は Boole 行列とよばれる．

有限要素ごとの近似関数が式 (6.2.9) と式 (6.2.10) のように構成されたので，これらを 1 次元 Poisson 問題の弱形式 (問題 6.1.2) に代入して，$\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}}$ を未知数とする離散化方程式が得られるまでをみてみよう．

式 (6.2.1) と式 (6.2.2) の $u_h(\bar{\boldsymbol{u}})$ と $v_h(\bar{\boldsymbol{v}})$ を弱形式に代入すれば，

$$a\left(u_h\left(\bar{\boldsymbol{u}}\right), v_h\left(\bar{\boldsymbol{v}}\right)\right) = l\left(v_h\left(\bar{\boldsymbol{v}}\right)\right) \tag{6.2.11}$$

となる．ここで，式 (6.2.11) の左辺は，積分領域を要素ごとに分けることができて，

$$
\begin{aligned}
a\left(u_h\left(\bar{\boldsymbol{u}}\right), v_h\left(\bar{\boldsymbol{v}}\right)\right) &= \sum_{i \in \{1,\ldots,m\}} \int_{x_{i(1)}}^{x_{i(2)}} \frac{\mathrm{d}u_h}{\mathrm{d}x}\left(\bar{\boldsymbol{u}}_i\right) \frac{\mathrm{d}v_h}{\mathrm{d}x}\left(\bar{\boldsymbol{v}}_i\right)\, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{i \in \{1,\ldots,m\}} a_i\left(u_h\left(\bar{\boldsymbol{u}}_i\right), v_h\left(\bar{\boldsymbol{v}}_i\right)\right) \qquad (6.2.12)
\end{aligned}
$$

のようにかける．式 (6.2.12) 右辺の各項は，式 (6.2.9) と式 (6.2.10) の $u_h\left(\bar{\boldsymbol{u}}_i\right)$ と $v_h\left(\bar{\boldsymbol{v}}_i\right)$ を用いて，

$$
\begin{aligned}
& a_i\left(u_h\left(\bar{\boldsymbol{u}}_i\right), v_h\left(\bar{\boldsymbol{v}}_i\right)\right) \\
&\quad = \begin{pmatrix} v_{i(1)} & v_{i(2)} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times \begin{pmatrix} \displaystyle\int_{x_{i(1)}}^{x_{i(2)}} \frac{\mathrm{d}\varphi_{i(1)}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\varphi_{i(1)}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x & \displaystyle\int_{x_{i(1)}}^{x_{i(2)}} \frac{\mathrm{d}\varphi_{i(1)}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\varphi_{i(2)}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \\ \displaystyle\int_{x_{i(1)}}^{x_{i(2)}} \frac{\mathrm{d}\varphi_{i(2)}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\varphi_{i(1)}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x & \displaystyle\int_{x_{i(1)}}^{x_{i(2)}} \frac{\mathrm{d}\varphi_{i(2)}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\varphi_{i(2)}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i(1)} \\ u_{i(2)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} v_{i(1)} & v_{i(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i\left(\varphi_{i(1)}, \varphi_{i(1)}\right) & a_i\left(\varphi_{i(1)}, \varphi_{i(2)}\right) \\ a_i\left(\varphi_{i(2)}, \varphi_{i(1)}\right) & a_i\left(\varphi_{i(2)}, \varphi_{i(2)}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i(1)} \\ u_{i(2)} \end{pmatrix} \\
&= \bar{\boldsymbol{v}}_i \cdot \left(\bar{\boldsymbol{A}}_i \bar{\boldsymbol{u}}_i\right) = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \left(\boldsymbol{Z}_i^\top \bar{\boldsymbol{A}}_i \boldsymbol{Z}_i \bar{\boldsymbol{u}}\right) = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \left(\tilde{\boldsymbol{A}}_i \bar{\boldsymbol{u}}\right)
\end{aligned} \tag{6.2.13}
$$

のようにまとめられる．ここで，$\bar{\boldsymbol{A}}_i = \left(\bar{a}_{i(\alpha\beta)}\right)_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ を有限要素 $i \in \mathcal{E}$ の係数行列とよぶ．$\tilde{\boldsymbol{A}}_i \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)}$ は，それを全体の節点値ベクトルに合わせて 0 を補充して拡大された行列とする．ここで，$\bar{\boldsymbol{u}}_i$ と $\bar{\boldsymbol{v}}_i$ は有限要素

$i \in \mathcal{E}$ の要素節点値ベクトルで $\mathbb{R}^2$ の要素であるのに対して，$\bar{\boldsymbol{u}}$ と $\bar{\boldsymbol{v}}$ は全体の節点値ベクトルで $\mathbb{R}^{m+1}$ の要素であることに注意されたい．

式 (6.2.3) と式 (6.2.4) を用いて $\bar{\boldsymbol{A}}_i$ を計算すれば，

$$
\begin{aligned}
\bar{a}_{i(11)} &= \int_{x_{i(1)}}^{x_{i(2)}} \frac{\mathrm{d}\varphi_{i(1)}}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}\varphi_{i(1)}}{\mathrm{d}x} \ \mathrm{d}x = \frac{1}{\left(x_{i(2)} - x_{i(1)}\right)^2} \int_{x_{i(1)}}^{x_{i(2)}} (-1)^2 \ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{x_{i(2)} - x_{i(1)}}, \\
\bar{a}_{i(12)} &= \int_{x_{i(1)}}^{x_{i(2)}} \frac{\mathrm{d}\varphi_{i(1)}}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}\varphi_{i(2)}}{\mathrm{d}x} \ \mathrm{d}x = \frac{1}{\left(x_{i(2)} - x_{i(1)}\right)^2} \int_{x_{i(1)}}^{x_{i(2)}} 1 \cdot (-1) \ \mathrm{d}x \\
&= \frac{-1}{x_{i(2)} - x_{i(1)}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{a}_{i(21)} &= \bar{a}_{i(12)} \\
\bar{a}_{i(22)} &= \int_{x_{i(1)}}^{x_{i(2)}} \frac{\mathrm{d}\varphi_{i(2)}}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}\varphi_{i(2)}}{\mathrm{d}x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\left(x_{i(2)} - x_{i(1)}\right)^2} \int_{x_{i(1)}}^{x_{i(2)}} 1^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{x_{i(2)} - x_{i(1)}}
\end{aligned}
$$

となり，

$$
\bar{\boldsymbol{A}}_i = \begin{pmatrix} \bar{a}_{i(11)} & \bar{a}_{i(12)} \\ \bar{a}_{i(21)} & \bar{a}_{i(22)} \end{pmatrix} = \frac{1}{x_{i(2)} - x_{i(1)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.2.14}
$$

が得られる．

一方，式 (6.2.11) の右辺も

$$
\begin{aligned}
l\left(v_h\left(\bar{\boldsymbol{v}}\right)\right) &= \sum_{i\in\{1,\ldots,m\}} \int_{x_{i(1)}}^{x_{i(2)}} b v_h\left(\bar{\boldsymbol{v}}_i\right)\,\mathrm{d}x + p_{\mathrm{N}} v_h\left(\bar{\boldsymbol{v}}_m\right) \\
&= \sum_{i\in\{1,\ldots,m\}} l_i\left(v_h\left(\bar{\boldsymbol{v}}_i\right)\right)
\end{aligned}
\tag{6.2.15}
$$

のように要素ごとに分けることができる．ただし，有限要素 $i \in \{1,\ldots,m-1\}$ と m に対して，それぞれ

$$
l_i\left(v_h\left(\bar{\boldsymbol{v}}_i\right)\right) = \begin{pmatrix} v_{i(1)} & v_{i(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_{x_{i(1)}}^{x_{i(2)}} b\varphi_{i(1)}\,\mathrm{d}x \\ \int_{x_{i(1)}}^{x_{i(2)}} b\varphi_{i(2)}\,\mathrm{d}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{i(1)} & v_{i(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_{i(1)} \\ \bar{b}_{i(2)} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \bar{\boldsymbol{v}}_i \cdot \bar{\boldsymbol{b}}_i = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \left(\boldsymbol{Z}_i^\top \bar{\boldsymbol{b}}_i\right) = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \tilde{\boldsymbol{b}}_i \\
&= \bar{\boldsymbol{v}}_i \cdot \bar{\boldsymbol{l}}_i = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \left(\boldsymbol{Z}_i^\top \bar{\boldsymbol{l}}_i\right) = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \tilde{\boldsymbol{l}}_i, \qquad (6.2.16)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l_m\left(v_h\left(\bar{\boldsymbol{v}}_m\right)\right) &= \begin{pmatrix} v_{m(1)} & v_{m(2)} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \int_{x_{m(1)}}^{x_{m(2)}} b\varphi_{i(1)} \, \mathrm{d}x \\ \int_{x_{m(1)}}^{x_{m(2)}} b\varphi_{i(2)} \, \mathrm{d}x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ p_{\mathrm{N}} \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} v_{m(1)} & v_{m(2)} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \bar{b}_{m(1)} \\ \bar{b}_{m(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{p}_{m(1)} \\ \bar{p}_{m(2)} \end{pmatrix} \right) \\
&= \bar{\boldsymbol{v}}_m \cdot \left(\bar{\boldsymbol{b}}_m + \bar{\boldsymbol{p}}_m\right) = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \left\{\boldsymbol{Z}_m^\top \left(\bar{\boldsymbol{b}}_m + \bar{\boldsymbol{p}}_m\right)\right\} = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \left(\tilde{\boldsymbol{b}}_m + \tilde{\boldsymbol{p}}_m\right) \\
&= \bar{\boldsymbol{v}}_m \cdot \bar{\boldsymbol{l}}_m = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \left(\boldsymbol{Z}_m^\top \bar{\boldsymbol{l}}_m\right) = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \tilde{\boldsymbol{l}}_m \qquad (6.2.17)
\end{aligned}
$$

とおく．ここで，$i \in \mathcal{E} = \{1, \ldots, m\}$ に対して，$\bar{\boldsymbol{l}}_i$ を有限要素 i の**既知項ベクトル**とよぶ．$\bar{\boldsymbol{b}}_i$ と $\bar{\boldsymbol{p}}_i$ はそれぞれ既知項ベクトルの b および p_{N} による成分を表す．$\tilde{\boldsymbol{l}}_i$, $\tilde{\boldsymbol{b}}_i$ および $\tilde{\boldsymbol{p}}_i$ は，それぞれ $\bar{\boldsymbol{l}}_i$, $\bar{\boldsymbol{b}}_i$ および $\bar{\boldsymbol{p}}_i$ を全体の節点値ベクトルに合わせて 0 を補充して拡大されたベクトルとする．

b が定数関数のとき，$\bar{\boldsymbol{b}}_i = \left(\bar{b}_{i(1)}, \bar{b}_{i(2)}\right)^\top$ を計算すれば，

$$
\begin{aligned}
\bar{b}_{i(1)} &= b \int_{x_{i(1)}}^{x_{i(2)}} \varphi_{i(1)} \, \mathrm{d}x = b \int_{x_{i(1)}}^{x_{i(2)}} \frac{x_{i(2)} - x}{x_{i(2)} - x_{i(1)}} \, \mathrm{d}x = b \frac{x_{i(2)} - x_{i(1)}}{2}, \\
\bar{b}_{i(2)} &= b \int_{x_{i(1)}}^{x_{i(2)}} \varphi_{i(2)} \, \mathrm{d}x = b \int_{x_{i(1)}}^{x_{i(2)}} \frac{x - x_{i(1)}}{x_{i(2)} - x_{i(1)}} \, \mathrm{d}x = b \frac{x_{i(2)} - x_{i(1)}}{2}
\end{aligned}
$$

となり，

$$\bar{\boldsymbol{b}}_i = b\frac{x_{i(2)} - x_{i(1)}}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \tag{6.2.18}$$

が得られる．

　ここで，式 (6.2.13) が代入された式 (6.2.12)，および 式 (6.2.16) と式 (6.2.17) が代入された式 (6.2.15) を弱形式 (式 (6.2.11)) に代入すれば，

$$\bar{\boldsymbol{v}} \cdot \sum_{i\in\{1,\ldots,m\}} \left(\tilde{\boldsymbol{A}}_i\bar{\boldsymbol{u}}\right) = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \sum_{i\in\{1,\ldots,m\}} \tilde{\boldsymbol{l}}_i$$

となる．この式を

$$\bar{\boldsymbol{v}} \cdot \left(\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{u}}\right) = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \bar{\boldsymbol{l}} \tag{6.2.19}$$

かく．すなわち，

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{A}} &= \sum_{i\in\{1,\dots,m\}} \tilde{\boldsymbol{A}}_i \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)}, \\ \bar{\boldsymbol{l}} &= \sum_{i\in\{1,\dots,m\}} \tilde{\boldsymbol{l}}_i = \sum_{i\in\{1,\dots,m\}} \tilde{\boldsymbol{b}}_i + \tilde{\boldsymbol{p}}_m = \bar{\boldsymbol{b}} + \bar{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^{m+1} \end{aligned}$$

とおいた．$\bar{\boldsymbol{A}}$ と $\bar{\boldsymbol{l}}$ をそれぞれ全体係数行列と全体既知項ベクトルとよぶ．また，$\bar{\boldsymbol{b}}$ と $\bar{\boldsymbol{p}}$ をそれぞれ b と p_{N} の全体節点値ベクトルとよぶ．

式 (6.2.19) は弱形式を与えているが，u_h と v_h に対する基本境界条件が仮定されてこなかった．そこで，式 (6.2.19) に基本境界条件を代入することを考えよう．基本境界条件は $u_0 = \bar{u}_{\mathrm{D}} = u_{\mathrm{D}}$ ($\bar{u}_{\mathrm{D}}$ は基本境界条件の節点値，u_{D} は境界値問題の既定値を意味する) と $v_0 = \bar{v}_{\mathrm{D}} = 0$ であった．これらを式 (6.2.19) に代入すれば，

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & v_1 & \cdots & v_m \end{array}\right)\left(\left(\begin{array}{c|ccc} \bar{a}_{00} & \bar{a}_{01} & \cdots & \bar{a}_{0m} \\ \hline \bar{a}_{10} & \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{m0} & \bar{a}_{m1} & \cdots & \bar{a}_{mm} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} u_{\mathrm{D}} \\ \hline u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c} l_0 \\ \hline l_1 \\ \vdots \\ l_m \end{array}\right)\right) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \bar{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{N}}^{\top} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} \bar{A}_{\mathrm{DD}} & \bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{DN}} \\ \bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{ND}} & \bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{NN}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{u}_{\mathrm{D}} \\ \bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{l}_{\mathrm{D}} \\ \bar{\boldsymbol{l}}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix}\right) = 0 \qquad (6.2.20)
\end{aligned}$$

となる．式 (6.2.20) を並び替えれば

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{m1} & \cdots & \bar{a}_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{\mathrm{D}} \bar{a}_{10} \\ \vdots \\ u_{\mathrm{D}} \bar{a}_{m0} \end{pmatrix} \right) \\
&\quad = \bar{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{N}}^{\top} \left(\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{NN}} \bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}} - \bar{\boldsymbol{l}}_{\mathrm{N}} + \bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{D}} \bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{ND}} \right) = 0
\end{aligned}
$$

となる．$\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{N}}$ は任意であるので，

$$
\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{NN}} \bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}} = \bar{\boldsymbol{l}}_{\mathrm{N}} - \bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{D}} \bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{ND}} = \hat{\boldsymbol{l}} \tag{6.2.21}
$$

とかける．式 (6.2.21) は未知ベクトル $\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}}$ に対する連立 1 次方程式となっており，有限要素法による離散化方程式とよばれる．式 (6.2.21) を $\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}}$ について解けば，

$$\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}} = \bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{NN}}^{-1} \hat{\boldsymbol{l}} \tag{6.2.22}$$

となる．これにより，有限要素解 $u_h(\bar{\boldsymbol{u}})$ は $\bar{\boldsymbol{u}} = \left(\bar{u}_{\mathrm{D}}, \bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}}^{\top}\right)^{\top}$ を式 (6.2.1) に代入することによって得られることになる．また，有限要素 $i \in \mathcal{E}$ の領域 Ω_i 上の有限要素解 $u_h(\bar{\boldsymbol{u}}_i)$ は式 (6.2.9) によって求められることになる．

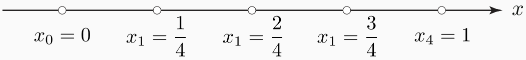


図 6.8: 有限要素分割 $m = 4$

実際に 1 次元 Poisson 問題を有限要素法で解いてみよう．

例題 6.2.1 (1 次元 Poisson 問題に対する有限要素法)

問題 6.1.1 において b は定数関数とする．このとき，図 6.8 の有限要素分割を用いて上記の 1 次元有限要素法で近似解を求める際の連立 1 次方程式を示せ．また，$b = 1$, $u_{\mathrm{D}} = 0$, $p_{\mathrm{N}} = 0$ とおいたときの近似解を求めよ．

解答　有限要素の大きさを $h = 1/4$ とおく．式 (6.2.14), 式 (6.2.18) および式 (6.2.17) より

$$\bar{\boldsymbol{A}}_i = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{b}}_i = \frac{hb}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{p}}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ p_{\mathrm{N}} \end{pmatrix}$$

が得られる．$\bar{\boldsymbol{A}}_1$ と $\bar{\boldsymbol{b}}_1$ を全体の節点値ベクトルに合わせて拡大して

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_1 = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{b}}_1 = \frac{hb}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が得られる．$\tilde{\boldsymbol{A}}_2$ と $\tilde{\boldsymbol{b}}_2$ をそれぞれ $\tilde{\boldsymbol{A}}_1$ と $\tilde{\boldsymbol{b}}_1$ に重ね合わせれば，

$$
\tilde{\boldsymbol{A}}_1 + \tilde{\boldsymbol{A}}_2 = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{b}}_1 + \tilde{\boldsymbol{b}}_2 = \frac{hb}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

が得られる．同様にして，$\tilde{\boldsymbol{A}}_3$ と $\tilde{\boldsymbol{b}}_3$, $\tilde{\boldsymbol{A}}_4$ と $\tilde{\boldsymbol{b}}_4$ および $\tilde{\boldsymbol{p}}_4$ を重ね合わせれば，

$$
\bar{\boldsymbol{A}} = \sum_{i\in\{1,\ldots,4\}} \tilde{\boldsymbol{A}}_i = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},
$$

$$\bar{\boldsymbol{l}} = \sum_{i \in \{1,\dots,4\}} \tilde{\boldsymbol{b}}_i + \tilde{\boldsymbol{p}}_4 = \frac{hb}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_{\mathrm{N}} \end{pmatrix}$$

が得られる．これらを用いた式 (6.2.19) に基本境界条件 $u_0 = \bar{u}_{\mathrm{D}} = u_{\mathrm{D}}$ と $v_0 = \bar{v}_{\mathrm{D}} = 0$ を代入すれば，

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\mathrm{D}} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} - \frac{hb}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_{\mathrm{N}} \end{pmatrix} \right) = 0$$

となる．この式を並び替えて，

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} - \frac{hb}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_{\mathrm{N}} \end{pmatrix} - \frac{1}{h} \begin{pmatrix} u_{\mathrm{D}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$
$$= 0$$

が得られる．(v_1, v_2, v_3, v_4) は任意であるので，

$$\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \frac{hb}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_{\mathrm{N}} \end{pmatrix} + \frac{1}{h} \begin{pmatrix} u_{\mathrm{D}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が得られる．この式は，

$$\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{NN}}\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}} = \hat{\boldsymbol{l}}$$

のような $\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}}$ に対する連立 1 次方程式である．ここで，$b = 1$, $u_{\mathrm{D}} = 0$, $p_{\mathrm{N}} = 0$ のとき，

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/32 \\ 3/8 \\ 15/32 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

となる．一方，厳密解は

$$u = -\frac{1}{2}x^2 + x$$

である．図 6.9 に数値解 u_h と厳密解 u の比較を示す． □

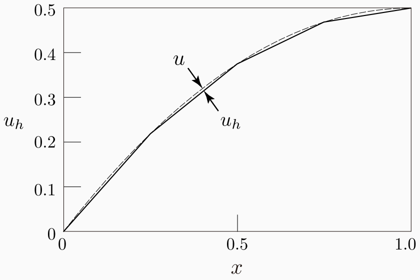


図 6.9: 例題 6.2.1 の厳密解 u と 近似解 u_h

例題 6.2.1 の境界条件を変更して，次の問題を考えてみよう．

例題 6.2.2 (1 次元 Dirichlet 問題)

$b,\ u_{\mathrm{D0}},\ u_{\mathrm{D1}},\ p_{\mathrm{N}} \in \mathbb{R}$ が与えられたとき，

$$-\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = b \quad \text{in} \ (0,1)\,, \quad u\,(0) = u_{\mathrm{D0}}, \quad u\,(1) = u_{\mathrm{D1}}$$

を満たす $u : (0,1) \to \mathbb{R}$ を求める問題を考える．図 6.8 の有限要素分割を用いて有限要素法による近似解を求める際の連立 1 次方程式を示せ．また，$b = 1$ および $u_{\mathrm{D0}} = u_{\mathrm{D1}} = 0$ とおいたときの数値解を求めよ．

解答　$\bar{A}$ の計算は，例題 6.2.1 と同じである．また，$\bar{\boldsymbol{l}} = \sum_{i\in\{1,\dots,4\}} \tilde{\boldsymbol{b}}_i$ となる．これらを用いた式 (6.2.19) に基本境界条件 $u_0 = \bar{u}_{\mathrm{D}0} = u_{\mathrm{D}0}$，$u_4 = \bar{u}_{\mathrm{D}4} = u_{\mathrm{D}1}$，$v_0 = \bar{v}_{\mathrm{D}0} = 0$ および $v_4 = \bar{v}_{\mathrm{D}4} = 0$ を代入すれば，

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\mathrm{D}0} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_{\mathrm{D}1} \end{pmatrix} - \frac{hb}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

となる．この式を並び替えて，

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} - \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{h} \begin{pmatrix} u_{\mathrm{D}0} \\ 0 \\ u_{\mathrm{D}1} \end{pmatrix} \right) = 0$$

となる．(v_1, v_2, v_3) は任意であるので，

$$\frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \frac{h}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{h}\begin{pmatrix} u_{\mathrm{D0}} \\ 0 \\ u_{\mathrm{D1}} \end{pmatrix}$$

が得られる．この式は，

$$\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{NN}}\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}} = \hat{\boldsymbol{l}}$$

のような連立 1 次方程式である．$b = 1$ および $u_{\mathrm{D0}} = u_{\mathrm{D1}} = 0$ のとき，

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4^3}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/32 \\ 1/8 \\ 3/32 \end{pmatrix}$$

となる．図 6.10 に数値解 u_h と厳密解 $u = \dfrac{1}{2}x\,(x-1)$ の比較を示す． □

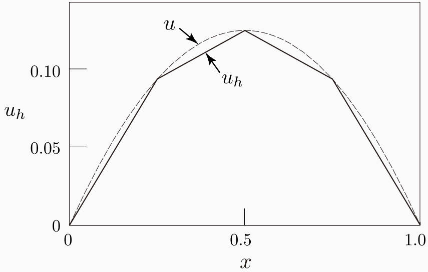


図 **6.10:** 例題 6.2.2 の厳密解 u と 近似解 u_h

例題 6.2.1 と例題 6.2.2 から，有限要素法の特徴の一つとして次のことがいえる．6.1 節 でみてきた Galerkin 法では，基本境界条件の変更は基底関数の変更が必要とされた．しかし，有限要素法では，係数行列と既知項ベクトルを求めた後で境界条件を代入することになることから，基本境界条件の変更は容易である．

6.3 2次元有限要素法

§6.3 2 次元有限要素法

次に，2 次元 Poisson 問題 (問題 6.1.6 において $d = 2$ とおく) に対する有限要素法を考えよう．ここでも，Galerkin 法の枠組みで有限要素法で使われる近似関数を定義する．その後で，その近似関数は分割された有限要素の領域ごとに定義された近似関数であるとみなすことにする．

§6.3.1 Galerkin 法における近似関数

図 6.11 のように，2 次元領域 Ω と Dirichlet 境界 Γ_{D} はそれぞれ多角形領域 Ω_h と折れ線 $\Gamma_{\mathrm{D}h}$ によって近似されると仮定する．さらに，Ω_h は 3 角形領域の集合 $\{\Omega_i\}_i$ に分割されると仮定する．このとき，Ω_i を 3 角形有限要素の領域とよび，有限要素番号 i の集合を $\mathcal{E}$ とかく．ただし，すべての $i \in \mathcal{E}$ に対して 3 角形領域 Ω_i の互いの重なりはなく，図 6.12 のように Ω_i の頂点以外の境界上に i 以外の 3 角形領域の頂点があることもないものとする．

また，3 角形の頂点 $\boldsymbol{x}_j = (x_{j1}, x_{j2})^{\top}$ を節点とよび，節点番号 j の集合を $\mathcal{N}$ とかく．さらに，$\mathcal{N}$ を二つの集合に分けて，$\Gamma_{\mathrm{D}h}$ 上におかれた節点番号の集合を $\mathcal{N}_{\mathrm{D}}$ とかいて，それ以外の節点番号の集合を $\mathcal{N}_{\mathrm{N}} = \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_{\mathrm{D}}$ とかくことにする．$\mathcal{N}$ は $\mathcal{N}_{\mathrm{D}}$ が最初にくるように並び替えられているとする．

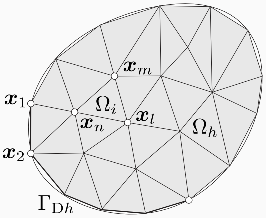


図 6.11: 2 次元領域 Ω における 3 角形有限要素と節点

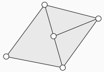


図 6.12: 3 角形有限要素と節点の反例

　このような 3 角形有限要素分割に対して，問題 6.1.6 に対する 2 次元有限要素法の基底関数を，節点 $j \in \mathcal{N}$ に対して図 6.13 のような高さ 1 のピラミッド関数 ϕ_j によって定義する．すなわち，ϕ_j は節点 j を頂点にもつ有限要素上で台をもつ 1 次多項式で，節点 j において 1, それ以外の節点で 0 をとる連続関数であると仮定する．これらの特徴は，1 次元有限要素法でみたとおり，弱形式に代入して積分計算をおこなうのに都合がよくて，次に示す近似関数の構成において未定乗数が節点値になるという都合のよい結果につながる．

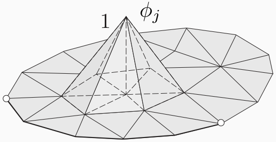


図 6.13: 基底関数 ϕ_j

このような基底関数を用いて，有限要素法では近似関数を

$$u_h(\bar{\boldsymbol{u}}) = \sum_{j\in\mathcal{N}_\mathrm{D}} u_j\phi_j + \sum_{j\in\mathcal{N}_\mathrm{N}} u_j\phi_j = \begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{u}}_\mathrm{D}\\ \bar{\boldsymbol{u}}_\mathrm{N}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{\phi}_\mathrm{D}\\ \boldsymbol{\phi}_\mathrm{N}\end{pmatrix} = \bar{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{\phi}, \tag{6.3.1}$$

$$v_h(\bar{\boldsymbol{v}}) = \sum_{j\in\mathcal{N}_\mathrm{D}} v_j\phi_j + \sum_{j\in\mathcal{N}_\mathrm{N}} v_j\phi_j = \begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{v}}_\mathrm{D}\\ \bar{\boldsymbol{v}}_\mathrm{N}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{\phi}_\mathrm{D}\\ \boldsymbol{\phi}_\mathrm{N}\end{pmatrix} = \bar{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{\phi} \tag{6.3.2}$$

とおく．このとき，$\bar{\boldsymbol{u}}$ と $\bar{\boldsymbol{v}}$ は近似関数 u_h と v_h の節点値の意味をもつことから，$\bar{\boldsymbol{u}}$ と $\bar{\boldsymbol{v}}$ を**節点値ベクトル**とよぶ．また，$\bar{\boldsymbol{u}}_\mathrm{D} = (u_\mathrm{D}(\boldsymbol{x}_j))_{j\in\mathcal{N}_\mathrm{D}}$ と $\bar{\boldsymbol{v}}_\mathrm{D} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^{|\mathcal{N}_\mathrm{D}|}}$ を **Dirichlet 型節点値ベクトル**とおよび，$\bar{\boldsymbol{u}}_\mathrm{N} = (u_j)_{j\in\mathcal{N}_\mathrm{N}}$ と $\bar{\boldsymbol{v}}_\mathrm{N} = (v_j)_{j\in\mathcal{N}_\mathrm{N}}$ を **Neumann 型節点値ベクトル**とよぶことにする．

有限要素法では，Ω_h 上で定義された基底関数 ϕ は，すべての $i \in \mathcal{E}$ に対して Ω_i 上で定義された基底関数にかきかえられる．それにより，Ω_i 上の近似関数を

$$u_h\left(\bar{\boldsymbol{u}}_i\right) = \begin{pmatrix} \varphi_{i(1)} & \varphi_{i(2)} & \varphi_{i(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i(1)} \\ u_{i(2)} \\ u_{i(3)} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\varphi}_i \cdot \bar{\boldsymbol{u}}_i, \tag{6.3.3}$$

$$v_h\left(\bar{\boldsymbol{v}}_i\right) = \begin{pmatrix} \varphi_{i(1)} & \varphi_{i(2)} & \varphi_{i(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{i(1)} \\ v_{i(2)} \\ v_{i(3)} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\varphi}_i \cdot \bar{\boldsymbol{v}}_i \tag{6.3.4}$$

とおく．ここで，有限要素 $i \in \mathcal{E}$ の三つの節点番号が $l,\ m,\ n \in \mathcal{N}$ であるとき，$\boldsymbol{\varphi}_i = (\varphi_l, \varphi_m, \varphi_n)^\top = \left(\varphi_{i(1)}, \varphi_{i(2)}, \varphi_{i(3)}\right)^\top : \Omega_i \to \mathbb{R}^3$ を**有限要素上の基底関数**という．また，

$$
\bar{\boldsymbol{x}}_i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_l \\ \boldsymbol{x}_m \\ \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{i(1)} \\ \boldsymbol{x}_{i(2)} \\ \boldsymbol{x}_{i(3)} \end{pmatrix},
$$

$$
\bar{\boldsymbol{u}}_i = \begin{pmatrix} u_l \\ u_m \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{i(1)} \\ u_{i(2)} \\ u_{i(3)} \end{pmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{v}}_i = \begin{pmatrix} v_l \\ v_m \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{i(1)} \\ v_{i(2)} \\ v_{i(3)} \end{pmatrix}
$$

を有限要素 $i \in \mathcal{E}$ に対する要素節点ベクトルおよび u と v に対する要素節点値ベクトルという．$\boldsymbol{x}_{i(\alpha)}$，$u_{i(\alpha)}$ および $v_{i(\alpha)}$ で使われた添え字の $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ を有限要素 $i \in \mathcal{E}$ の局所節点番号という．図 6.14 に φ_i と $\bar{\boldsymbol{u}}_i$ によって有限要素 $i \in \mathcal{E}$ 上の近似関数 u_h が構成される様子が示されている．

このように構成された $i \in \mathcal{E}$ 上の基底関数 φ_i は，$\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}$ に対して，

$$\varphi_{i(\alpha)}\left(\boldsymbol{x}_{i(\beta)}\right) = \delta_{\alpha\beta} \tag{6.3.5}$$

を満たす．また，すべての点 $\boldsymbol{x} \in \Omega_i$ で

$$\sum_{\alpha \in \{1,2,3\}} \varphi_{i(\alpha)}\left(\boldsymbol{x}\right) = 1$$

が成り立つ．

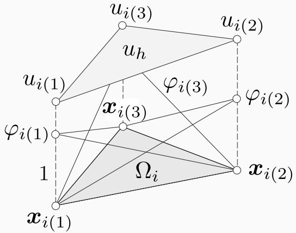


図 6.14: 3 角形有限要素 $i \in \mathcal{E}$ 上の基底関数 $\varphi_{i(1)}, \varphi_{i(2)}, \varphi_{i(3)}$

ここで，有限要素 $i \in \mathcal{E}$ 上の基底関数 $\varphi_{i(1)}$，$\varphi_{i(2)}$ および $\varphi_{i(3)}$ の式を具体的に求めてみよう．$\alpha \in \{1, 2, 3\}$ に対して，$\varphi_{i(\alpha)}$ は，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^\top \in \Omega_i$ に対する 1 次式であることから，未定乗数三つで構成された完全 1 次多項式となる．これを

$$\varphi_{i(\alpha)} = \zeta_\alpha + \eta_\alpha x_1 + \theta_\alpha x_2 \tag{6.3.6}$$

とおく．未定乗数 ζ_α, η_α および θ_α は三つの節点における $\varphi_{i(\alpha)}$ の値を与えることで決定される．その値は，式 (6.3.5) で与えられる．すなわち，$\beta \in \{1, 2, 3\}$ に対して

$$\varphi_{i(\alpha)}\left(\boldsymbol{x}_{i(\beta)}\right) = \zeta_\alpha + \eta_\alpha x_{i(\beta)1} + \theta_\alpha x_{i(\beta)2} = \delta_{\alpha\beta}$$

によって決定される．この式は

$$
\begin{pmatrix} 1 & x_{i(1)1} & x_{i(1)2} \\ 1 & x_{i(2)1} & x_{i(2)2} \\ 1 & x_{i(3)1} & x_{i(3)2} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

のように展開される．そこで，未定乗数について解けば

$$
\begin{pmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{pmatrix}
= \frac{1}{\gamma}
\begin{pmatrix}
x_{i(2)1}x_{i(3)2} - x_{i(3)1}x_{i(2)2} & x_{i(3)1}x_{i(1)2} - x_{i(1)1}x_{i(3)2} & x_{i(1)1}x_{i(2)2} - x_{i(2)1}x_{i(1)2} \\
x_{i(2)2} - x_{i(3)2} & x_{i(3)2} - x_{i(1)2} & x_{i(1)2} - x_{i(2)2} \\
x_{i(3)1} - x_{i(2)1} & x_{i(1)1} - x_{i(3)1} & x_{i(2)1} - x_{i(1)1}
\end{pmatrix}
\tag{6.3.7}
$$

となる．ただし，

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \begin{vmatrix} x_{i(1)1} & x_{i(1)2} & 1 \\ x_{i(2)1} & x_{i(2)2} & 1 \\ x_{i(3)1} & x_{i(3)2} & 1 \end{vmatrix} \\
&= x_{i(1)1}\left(x_{i(2)2} - x_{i(3)2}\right) + x_{i(2)1}\left(x_{i(3)2} - x_{i(1)2}\right) \\
&\quad + x_{i(3)1}\left(x_{i(1)2} - x_{i(2)2}\right)
\end{aligned}
\tag{6.3.8}
$$

である．ここで，3 角形有限要素の三つの節点 $\boldsymbol{x}_{i(1)}$, $\boldsymbol{x}_{i(2)}$ および $\boldsymbol{x}_{i(3)}$ を反時計回りになるように選んだとき， γ は 3 角形 Ω_i の面積 $|\Omega_i|$ の 2 倍に等しいことになる (演習問題 **6.3**)．

有限要素上の基底関数 $\varphi_{i(1)}$，$\varphi_{i(2)}$ および $\varphi_{i(3)}$ は，式 (6.3.7) と式 (6.3.8) を式 (6.3.6) に代入することよってえられた．それらを用いれば，式 (6.3.3) と式 (6.3.4) で定義された近似関数 $u_h(\bar{\boldsymbol{u}}_i)$ と $v_h(\bar{\boldsymbol{v}}_i)$ は，

$$u_h(\bar{\boldsymbol{u}}_i) = \begin{pmatrix} \varphi_{i(1)} & \varphi_{i(2)} & \varphi_{i(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_l \\ u_m \\ u_n \\ \vdots \\ u_{|\mathcal{N}|} \end{pmatrix}$$

$$
= \boldsymbol{\varphi}_i \cdot \left(\boldsymbol{Z}_i \bar{\boldsymbol{u}}\right), \tag{6.3.9}
$$

$$
v_h\left(\bar{\boldsymbol{v}}_i\right) = \boldsymbol{\varphi}_i \cdot \left(\boldsymbol{Z}_i \bar{\boldsymbol{v}}\right) \tag{6.3.10}
$$

のようにかける．ただし，Z_i は全体の節点値ベクトル $\bar{u}$ と有限要素 $i \in \mathcal{E}$ の節点値ベクトル $\bar{\boldsymbol{u}}_i = \left(u_l, u_m, u_n\right)^\top$ を関連づける Boole 行列である．

§6.3.3　離散化方程式

Ω_i 上の近似関数 $u_h(\bar{\boldsymbol{u}}_i)$ と $v_h(\bar{\boldsymbol{v}}_i)$ が定義されたので，式 (6.3.9) と式 (6.3.10) を 2 次元 Poisson 問題の弱形式 (問題 6.1.7) に代入して，$\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}}$ を未知数とする離散化方程式が得られるまでをみてみよう．

式 (6.3.1) と式 (6.3.2) の $u_h(\bar{\boldsymbol{u}})$ と $v_h(\bar{\boldsymbol{v}})$ を弱形式に代入すれば，

$$a(u_h(\bar{\boldsymbol{u}}), v_h(\bar{\boldsymbol{v}})) = l(v_h(\bar{\boldsymbol{v}})) \tag{6.3.11}$$

となる．式 (6.3.11) の左辺は

$$\begin{aligned} a(u_h(\bar{\boldsymbol{u}}), v_h(\bar{\boldsymbol{v}})) &= \sum_{i\in\mathcal{E}} \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\nabla} u_h(\bar{\boldsymbol{u}}_i) \cdot \boldsymbol{\nabla} v_h(\bar{\boldsymbol{v}}_i)\ \mathrm{d}x \\ &= \sum_{i\in\mathcal{E}} a_i(u_h(\bar{\boldsymbol{u}}_i), v_h(\bar{\boldsymbol{v}}_i)) \end{aligned} \tag{6.3.12}$$

のようにかける．このとき，式 (6.3.12) 右辺の各項は，

$$
\begin{aligned}
& a_i\left(u_h\left(\bar{\boldsymbol{u}}_i\right), v_h\left(\bar{\boldsymbol{v}}_i\right)\right) \\
& \quad=\begin{pmatrix} v_{i(1)} & v_{i(2)} & v_{i(3)} \end{pmatrix} \\
& \qquad \times\begin{pmatrix}
\int_{\Omega_i} \boldsymbol{\nabla} \varphi_{i(1)} \cdot \boldsymbol{\nabla} \varphi_{i(1)} \mathrm{~d} x & \cdots & \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\nabla} \varphi_{i(1)} \cdot \boldsymbol{\nabla} \varphi_{i(3)} \mathrm{~d} x \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
\int_{\Omega_i} \boldsymbol{\nabla} \varphi_{i(3)} \cdot \boldsymbol{\nabla} \varphi_{i(1)} \mathrm{~d} x & \cdots & \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\nabla} \varphi_{i(3)} \cdot \boldsymbol{\nabla} \varphi_{i(3)} \mathrm{~d} x
\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{i(1)} \\ u_{i(2)} \\ u_{i(3)} \end{pmatrix} \\
& \quad=\begin{pmatrix} v_{i(1)} & v_{i(2)} & v_{i(3)} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\times \begin{pmatrix} a_i\left(\varphi_{i(1)}, \varphi_{i(1)}\right) & \cdots & a_i\left(\varphi_{i(1)}, \varphi_{i(3)}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_i\left(\varphi_{i(3)}, \varphi_{i(1)}\right) & \cdots & a_i\left(\varphi_{i(3)}, \varphi_{i(3)}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i(1)} \\ u_{i(2)} \\ u_{i(3)} \end{pmatrix}
$$

$$
= \bar{\boldsymbol{v}}_i \cdot \left(\bar{\boldsymbol{A}}_i \bar{\boldsymbol{u}}_i\right) = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \left(\boldsymbol{Z}_i^\top \bar{\boldsymbol{A}}_i \boldsymbol{Z}_i \bar{\boldsymbol{u}}\right) = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \left(\tilde{\boldsymbol{A}}_i \bar{\boldsymbol{u}}\right) \tag{6.3.13}
$$

のようにまとめられる．$\bar{\boldsymbol{A}}_i$ を有限要素 $i \in \mathcal{E}$ の係数行列とよぶ．$\tilde{\boldsymbol{A}}_i$ はそれを全体の節点値ベクトルに合わせて 0 を補充して拡大された行列とする．

式 (6.3.7) の η_α と θ_α が式 (6.3.6) に代入された関係を用いて，$\bar{\boldsymbol{A}}_i = \left(\bar{a}_{i(\alpha\beta)}\right)_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ を計算すれば，

$$
\bar{a}_{i(\alpha\beta)} = \int_{\Omega_i} \left(\frac{\partial \varphi_{i(\alpha)}}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_{i(\beta)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_{i(\alpha)}}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_{i(\beta)}}{\partial x_2} \right) \mathrm{d}x
$$

$$= \int_{\Omega_i} \left(\eta_\alpha \eta_\beta + \theta_\alpha \theta_\beta\right) \, \mathrm{d}x = \left|\Omega_i\right| \left(\eta_\alpha \eta_\beta + \theta_\alpha \theta_\beta\right) \tag{6.3.14}$$

となる．ただし，$|\Omega_i| = \gamma/2$ である．γ は式 (6.3.8) で与えられる．

一方，式 (6.3.11) の右辺も

$$\begin{aligned} l\left(v_h\left(\bar{\boldsymbol{v}}\right)\right) &= \sum_{i \in \mathcal{E}} \int_{\Omega_i} b v_h\left(\bar{\boldsymbol{v}}_i\right) \, \mathrm{d}x + \sum_{i \in \mathcal{E}} \int_{\partial\Omega_i \cap \Gamma_{\mathrm{N}}} p_{\mathrm{N}} v_h\left(\bar{\boldsymbol{v}}_i\right) \, \mathrm{d}\gamma \\ &= \sum_{i \in \mathcal{E}} l_i\left(v_h\left(\bar{\boldsymbol{v}}_i\right)\right) \end{aligned} \tag{6.3.15}$$

のように要素ごとに分けることができる．ただし，$i \in \mathcal{E}$ に対して

$$l_i\left(v_h\left(\bar{\boldsymbol{v}}_i\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} v_{i(1)} & v_{i(2)} & v_{i(3)} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \displaystyle\int_{\Omega_i} b\varphi_{i(1)} \;\mathrm{d}x \\ \displaystyle\int_{\Omega_i} b\varphi_{i(2)} \;\mathrm{d}x \\ \displaystyle\int_{\Omega_i} b\varphi_{i(3)} \;\mathrm{d}x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \displaystyle\int_{\partial\Omega_i \cap \Gamma_{\mathrm{N}}} p_{\mathrm{N}}\varphi_{i(1)} \;\mathrm{d}\gamma \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega_i \cap \Gamma_{\mathrm{N}}} p_{\mathrm{N}}\varphi_{i(2)} \;\mathrm{d}\gamma \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega_i \cap \Gamma_{\mathrm{N}}} p_{\mathrm{N}}\varphi_{i(3)} \;\mathrm{d}\gamma \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} v_{i(1)} & v_{i(2)} & v_{i(3)} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} b_{i(1)} \\ b_{i(2)} \\ b_{i(3)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{i(1)} \\ p_{i(2)} \\ p_{i(3)} \end{pmatrix} \right) \\
&= \bar{\boldsymbol{v}}_i \cdot \left(\bar{\boldsymbol{b}}_i + \bar{\boldsymbol{p}}_i \right) = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \left\{ \boldsymbol{Z}_i^{\top} \left(\bar{\boldsymbol{b}}_i + \bar{\boldsymbol{p}}_i \right) \right\} = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \left(\tilde{\boldsymbol{b}}_i + \tilde{\boldsymbol{p}}_i \right) \\
&= \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \left(\boldsymbol{Z}_i^{\top} \bar{\boldsymbol{l}}_i \right) = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \tilde{\boldsymbol{l}}_i \qquad (6.3.16)
\end{aligned}
$$

とおく．ここで，$\bar{\boldsymbol{l}}_i$ を有限要素 $i \in \mathcal{E}$ の**既知項ベクトル**とよぶ．$\bar{\boldsymbol{b}}_i$ と $\bar{\boldsymbol{p}}_i$ はそれぞれ既知項ベクトルの b および p_{N} による成分を表す．$\tilde{\boldsymbol{l}}_i$, $\tilde{\boldsymbol{b}}_i$ および $\tilde{\boldsymbol{p}}_i$ は，それぞれ $\bar{\boldsymbol{l}}_i$, $\bar{\boldsymbol{b}}_i$ および $\bar{\boldsymbol{p}}_i$ を全体の節点値ベクトルに合わせて 0 を補充して拡大されたベクトルとする．

b が定数関数のとき，$\bar{\boldsymbol{b}}_i = \left(b_{i(1)}, b_{i(2)}, b_{i(3)}\right)^{\top}$ を計算すれば，

$$\bar{\boldsymbol{b}}_i = b \begin{pmatrix} \displaystyle\int_{\Omega_i} \varphi_{i(1)} \,\mathrm{d}x \\ \displaystyle\int_{\Omega_i} \varphi_{i(2)} \,\mathrm{d}x \\ \displaystyle\int_{\Omega_i} \varphi_{i(3)} \,\mathrm{d}x \end{pmatrix} = \frac{b\,|\Omega_i|}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6.3.17}$$

となる．ただし，次の面積座標の積分公式を用いた．面積座標とは，3 角形有限要素上の点 $\boldsymbol{x} \in \Omega_i$ を 3 角形有限要素の基底関数 $\varphi_{i(1)}(\boldsymbol{x})$, $\varphi_{i(2)}(\boldsymbol{x})$ および $\varphi_{i(3)}(\boldsymbol{x})$ の値を要素とする 3 次元ベクトルで表した座標である (詳細は 6.4.2 項参照)．

定理 6.3.1 (面積座標の積分)

$\left(\varphi_{i(1)}, \varphi_{i(2)}, \varphi_{i(3)}\right)$ を 2 次元 3 角形領域 Ω_i 上の面積座標とするとき，非負整数 l, m, n に対して

$$\int_{\Omega_i} \left(\varphi_{i(1)}\right)^l \left(\varphi_{i(2)}\right)^m \left(\varphi_{i(3)}\right)^n \, \mathrm{d}x = 2\left|\Omega_i\right| \frac{l!m!n!}{(l+m+n+2)!}$$

が成り立つ．ただし，$|\Omega_i| = \gamma/2$, γ は式 (6.3.8) で与えられる．

さらに，p_{N} が定数関数のとき，$\bar{\boldsymbol{p}}_i = \left(p_{i(1)}, p_{i(2)}, p_{i(3)}\right)^\top$ は，

$$\bar{\boldsymbol{p}}_i = p_{\mathrm{N}} \begin{pmatrix} 0 \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega_i \cap \Gamma_{\mathrm{N}}} \varphi_{i(2)} \, \mathrm{d}\gamma \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega_i \cap \Gamma_{\mathrm{N}}} \varphi_{i(3)} \, \mathrm{d}\gamma \end{pmatrix} = \frac{p_{\mathrm{N}} h}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる．ただし，h は $\partial\Omega_i \cap \Gamma_{\mathrm{N}}$ の長さである (図 6.15 参照)．

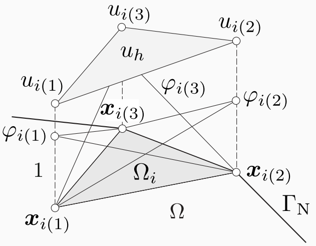


図 6.15: 境界を含む有限要素

ここで，式 (6.3.13) が代入された式 (6.3.12) および式 (6.3.16) が代入された式 (6.3.15) を弱形式 (式 (6.3.11)) に代入すれば，

$$\bar{\boldsymbol{v}} \cdot \left(\sum_{i \in \mathcal{E}} \tilde{\boldsymbol{A}}_i \bar{\boldsymbol{u}} \right) = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \sum_{i \in \mathcal{E}} \tilde{\boldsymbol{l}}_i$$

となる．この式を

$$\bar{\boldsymbol{v}} \cdot \left(\bar{\boldsymbol{A}} \bar{\boldsymbol{u}} \right) = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \bar{\boldsymbol{l}} \tag{6.3.18}$$

とかく．すなわち，

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \sum_{i \in \mathcal{E}} \tilde{\boldsymbol{A}}_i \in \mathbb{R}^{|\mathcal{N}| \times |\mathcal{N}|},$$

$$\bar{\boldsymbol{l}} = \sum_{i \in \mathcal{E}} \tilde{\boldsymbol{l}}_i = \sum_{i \in \mathcal{E}} \left(\tilde{\boldsymbol{b}}_i + \tilde{\boldsymbol{p}}_i \right) = \bar{\boldsymbol{b}} + \bar{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{N}|}$$

とおいた．$\bar{\boldsymbol{A}}$ と $\bar{\boldsymbol{l}}$ をそれぞれ全体係数行列と全体既知項ベクトルとよぶ．また，$\bar{\boldsymbol{b}}$ と $\bar{\boldsymbol{p}}$ をそれぞれ b と p_{N} の全体節点値ベクトルとよぶ．

式 (6.3.18) に基本境界条件を代入する．すなわち，$j \in \mathcal{N}_{\mathrm{D}}$ に対して $u_j = u_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}_j)$ と $v_j = 0$ を代入すれば，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{0}^{\top} & \bar{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{N}}^{\top} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{DD}} & \bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{DN}} \\ \bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{ND}} & \bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{NN}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{D}} \\ \bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{l}}_{\mathrm{D}} \\ \bar{\boldsymbol{l}}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix} \right) = 0 \qquad (6.3.19)$$

となる．ただし，$\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{D}}$ と $\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}}$ は式 (6.3.1) で定義されたベクトル，$\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{D}}$ と $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{N}}$ は式 (6.3.2) で定義されたベクトルである．また，

$$
\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{DD}} &= \left(\bar{A}_{ij}\right)_{(i,j)\in\mathcal{N}_{\mathrm{D}}\times\mathcal{N}_{\mathrm{D}}}, \quad \bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{DN}} = \left(\bar{A}_{ij}\right)_{(i,j)\in\mathcal{N}_{\mathrm{D}}\times\mathcal{N}_{\mathrm{N}}}, \\
\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{ND}} &= \left(\bar{A}_{ij}\right)_{(i,j)\in\mathcal{N}_{\mathrm{N}}\times\mathcal{N}_{\mathrm{D}}}, \quad \bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{NN}} = \left(\bar{A}_{ij}\right)_{(i,j)\in\mathcal{N}_{\mathrm{N}}\times\mathcal{N}_{\mathrm{N}}}, \\
\bar{\boldsymbol{l}}_{\mathrm{D}} &= \left(l_i\right)_{i\in\mathcal{N}_{\mathrm{D}}}, \quad \bar{\boldsymbol{l}}_{\mathrm{N}} = \left(l_i\right)_{i\in\mathcal{N}_{\mathrm{N}}}.
\end{aligned}
$$

とおく．式 (6.3.19) を並び替えれば

$$
\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{N}}^{\top}\left(\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{NN}}\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}} - \bar{\boldsymbol{l}}_{\mathrm{N}} + \bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{D}}\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{ND}}\right) = 0
$$

となる．$\bar{v}_{\mathrm{N}}$ は任意であるので，

$$\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{NN}}\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}} = \bar{\boldsymbol{l}}_{\mathrm{N}} - \bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{D}}\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{ND}} = \hat{\boldsymbol{l}} \tag{6.3.20}$$

とかける．式 (6.3.20) は未知ベクトル $\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}}$ に対する連立 1 次方程式となっており，有限要素法による離散化方程式とよばれる．式 (6.3.20) を $\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}}$ ni ついて解けば，

$$\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}} = \bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{NN}}^{-1}\hat{\boldsymbol{l}} \tag{6.3.21}$$

となる．これにより，有限要素解 $u_h(\bar{\boldsymbol{u}})$ は $\bar{\boldsymbol{u}} = \left(\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{D}}, \bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}}^{\top}\right)^{\top}$ を式 (6.3.1) に代入することによって得られることになる．また，有限要素 $i \in \mathcal{E}$ の領域 Ω_i 上の有限要素解 $u_h(\bar{\boldsymbol{u}}_i)$ は式 (6.3.9) によって求められることになる．

§6.3.4　例題

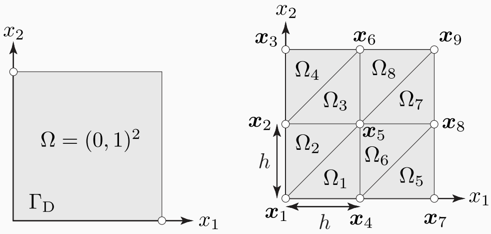
上で示された 3 角形有限要素を使って 2 次元 Poisson 問題の近似解を求めるまでを詳しくみてみよう [3, 5.3 節, p. 67]．

例題 6.3.2 (2 次元 Poisson 問題に対する有限要素法)

領域 Ω を $(0,1)^2$ とする．$\Gamma_{\mathrm{D}} = \{\boldsymbol{x} \in \partial\Omega \mid x_1 = 0,\ x_2 = 0\}$ および $\Gamma_{\mathrm{N}} = \partial\Omega \setminus \bar{\Gamma}_{\mathrm{D}}$ とする．このとき，

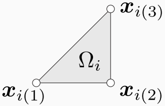
$$-\Delta u = 1 \quad \text{in } \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{N}}, \qquad u = 0 \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{D}}$$

を満たす $u : (0,1)^2 \to \mathbb{R}$ の有限要素法による近似解を求めよ．ただし，図 6.16 の要素分割を用いよ．

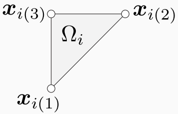


(a) 領域 Ω (b) 有限要素分割

図 6.16: 2 次元 Poisson 問題の例



(a) Type 1



(b) Type 2

図 6.17: 有限要素タイプ

解答　有限要素の大きさを $h = 1/2$ とおく．このとき，式 (6.3.8) より $\gamma = h^2$ および $|\Omega_i| = \gamma/2 = h^2/2$ となる．係数行列 $\bar{\boldsymbol{A}}_i$ と $\bar{\boldsymbol{b}}_i$ を式 (6.3.14) と式 (6.3.17) を用いて計算しよう．有限要素を二つのタイプに分けて考える．図 6.17 (a) のような形状の有限要素 $i \in \{1, 3, 5, 7\}$ を Type 1 とおく．Type 1 の基底関数は式 (6.3.6) で与えられ，$\alpha \in \{1, 2, 3\}$ に対して $\varphi_{i(\alpha)}$ によって定義された．そこで使われた未定乗数の中

で，係数行列 $\bar{A}_i$ の計算で必要となる未定乗数は η_α と θ_α である．Type 1 に対するこれらの値は，式 (6.3.7) より

$$\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma}\begin{pmatrix}x_{i(2)2}-x_{i(3)2}\\ x_{i(3)2}-x_{i(1)2}\\ x_{i(1)2}-x_{i(2)2}\end{pmatrix} = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix}-h\\ h\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma}\begin{pmatrix}x_{i(3)1}-x_{i(2)1}\\ x_{i(1)1}-x_{i(3)1}\\ x_{i(2)1}-x_{i(1)1}\end{pmatrix} = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix}0\\ -h\\ h\end{pmatrix}$$

となる．これらを，式 (6.3.14) と式 (6.3.17) に代入すれば，Type 1 の係数行列と既知項ベクトル

$$\bar{\boldsymbol{A}}_i = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{l}}_i = \bar{\boldsymbol{b}}_i = \frac{h^2}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が得られる．

一方，図 6.17 (b) のような形状の有限要素 $i \in \{2, 4, 6, 8\}$ を Type 2 とおく．これらに対しても同様にして，基底関数の未定乗数

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma}\begin{pmatrix} x_{i(2)2} - x_{i(3)2} \\ x_{i(3)2} - x_{i(1)2} \\ x_{i(1)2} - x_{i(2)2} \end{pmatrix} = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 0 \\ h \\ -h \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} x_{i(3)1} - x_{i(2)1} \\ x_{i(1)1} - x_{i(3)1} \\ x_{i(2)1} - x_{i(1)1} \end{pmatrix} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -h \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$$

が得られる．これらを，式 (6.3.14) と式 (6.3.17) に代入すれば，Type 2 の係数行列と既知項ベクトル

$$\bar{\boldsymbol{A}}_i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{l}}_i = \bar{\boldsymbol{b}}_i = \frac{h^2}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が得られる．

有限要素 $i \in \mathcal{E} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ における局所節点 $\boldsymbol{x}_{i(1)}$，$\boldsymbol{x}_{i(2)}$，$\boldsymbol{x}_{i(3)}$ と全体節点 $j \in \mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ に対する $\boldsymbol{x}_j$ の関係は表 6.1 のとおりである．

表 **6.1:** 例題 6.3.2 の局所節点 $\boldsymbol{x}_{i(1)}$, $\boldsymbol{x}_{i(2)}$, $\boldsymbol{x}_{i(3)}$ と全体節点 $\boldsymbol{x}_j$ の関係

$i \in \mathcal{E}$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\boldsymbol{x}_{i(1)}$	$\boldsymbol{x}_1$	$\boldsymbol{x}_1$	$\boldsymbol{x}_2$	$\boldsymbol{x}_2$	$\boldsymbol{x}_4$	$\boldsymbol{x}_4$	$\boldsymbol{x}_5$	$\boldsymbol{x}_5$
$\boldsymbol{x}_{i(2)}$	$\boldsymbol{x}_4$	$\boldsymbol{x}_5$	$\boldsymbol{x}_5$	$\boldsymbol{x}_6$	$\boldsymbol{x}_7$	$\boldsymbol{x}_8$	$\boldsymbol{x}_8$	$\boldsymbol{x}_9$
$\boldsymbol{x}_{i(3)}$	$\boldsymbol{x}_5$	$\boldsymbol{x}_2$	$\boldsymbol{x}_6$	$\boldsymbol{x}_3$	$\boldsymbol{x}_8$	$\boldsymbol{x}_5$	$\boldsymbol{x}_9$	$\boldsymbol{x}_6$
Type	1	2	1	2	1	2	1	2

$\bar{\boldsymbol{A}}_1$ と $\bar{\boldsymbol{l}}_1$ を，全体の節点値ベクトルに合わせて拡大して

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{l}}_1 = \frac{h^2}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をつくる． 同様に，$i \in \{2, \ldots, 8\}$ に対して $\bar{\boldsymbol{A}}_i$ と $\bar{\boldsymbol{l}}_i$ から $\tilde{\boldsymbol{A}}_i$ と $\tilde{\boldsymbol{l}}_i$ をつくり，重ね合

わせれば，

$$
\bar{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 4 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2
\end{pmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{l}} = \frac{h^2}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}
$$

となる．ここで，式 (6.3.19) のように，基本境界条件 $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_7 = 0$, $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v_7 = 0$ を代入すれば，

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となる．この連立 1 次方程式を解いて

$$\begin{pmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix} = \frac{1}{192}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{96}\begin{pmatrix} 17 \\ 22 \\ 22 \\ 30 \end{pmatrix}$$

が得られる．図 6.18 は，この結果を節点値においた近似解 $u_h(\bar{\boldsymbol{u}})$ を示す． □

図 6.19 は，例題 6.3.2 の分割数を増やして，36 節点，50 有限要素に変更したときの結果を示す．

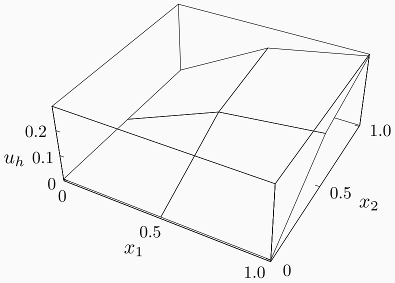


図 6.18: 例題 6.3.2 の近似解

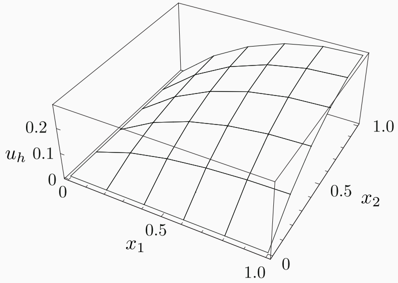


図 **6.19:** 例題 6.3.2 の分割数を増やしたときの近似解

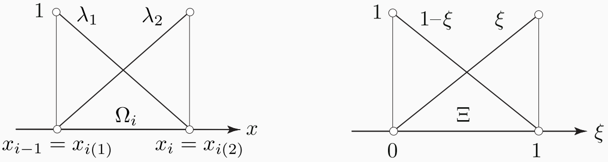
6.4 種々の有限要素

§6.4 種々の有限要素

6.2 節と 6.3 節で基底関数が 1 次関数で構成されたときの 1 次元と 2 次元の有限要素法を詳しくみてきた．次に，これらの内容をふまえて基底関数を高次関数に変更することや有限要素の形状を 4 角形に変更すること，さらに，3 次元の有限要素法についての見通しを示しておきたい．いずれも基底関数の構成法が異なるだけで，それを弱形式に代入して未定乗数を求めるという Galerkin 法としての手続きは同一である．そこで，ここでは有限要素上の基底関数を定義して近似関数を構成するところまでをみていくことにしよう．

本章では，基底関数の定義域を大きさが規準化された領域 (規準領域) に変更し，その上で定義された有限要素を規準要素とよぶことにする．任意の大きさの有限要素は規準要素からの写像によって与えられると考えることにする．

§6.4.1 1次元高次有限要素



(a) 長さ座標 (λ_1, λ_2)　(b) 規準座標 $\xi = \lambda_2 = 1 - \lambda_1$

図 6.20: 1 次元有限要素の長さ座標と規準座標

まず，1 次元有限要素の高次化について考えよう．1 次元有限要素に対する規準領域を $\Xi = (0,1)$ とおく．1 次元有限要素 $i \in \mathcal{E}$ の領域 $\Omega_i = (x_{i-1}, x_i)$ 上の点 $x \in \Omega_i$ は，式 (6.2.3) と式 (6.2.4) で定義された 1 次元有限要素 (1 次要素) の基底関数 $\varphi_{i(1)}$ と $\varphi_{i(2)}$ を用いて $\xi = \varphi_{i(2)}(x) = 1 - \varphi_{i(1)}(x)$ によって規準領域上の点 $\xi \in \Xi$ に変換することができる．そこで，$\varphi_{i(2)}(x) = 1 - \varphi_{i(1)}(x)$ を $\xi \in \Xi$ と同一視して，$\left(\varphi_{i(1)}(x), \varphi_{i(2)}(x)\right)$ を長さ座標と定義する．長さを表すのに 2 次元ベクトルとなっているが，$\varphi_{i(1)}(x) + \varphi_{i(2)}(x) = 1$ の条件が課されていることに注意されたい．さらに，$\left(\varphi_{i(1)}(x), \varphi_{i(2)}(x)\right)$ のような x の関数を座標として用いることは混乱を招くことから，長さ座標を (λ_1, λ_2) とかくことにする．図 6.20 に長さ座標 (λ_1, λ_2) と規準座標 ξ の関係を示している．

これより，規準領域 $\Xi = (0,1)$ 上で基底関数を定義して，基底関数の高次化をはかることにする．そのための準備として，6.2 節でみてきた $x \in \Omega_i$ に対して定義された基底関数 $\left(\varphi_{i(1)}(x), \varphi_{i(2)}(x)\right)$ が $\xi \in \Xi$ に対して定義された基底関数を用いてどのように表されるのかを確認しておくことにしよう．本章では，規準領域上で定義された節点と基底関数をそれぞれ $\xi_{(\cdot)}$ と $\hat{\varphi}_{(\cdot)}$ のように表すことにする．すなわち，1 次の基底関数に対して，節点を

$$\begin{pmatrix} \xi_{(1)} & \xi_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.4.1}$$

とおき，基底関数を

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{(1)}(\xi) & \hat{\varphi}_{(2)}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\xi & \xi \end{pmatrix} \tag{6.4.2}$$

とおく．一方，規準座標 $\xi \in \Xi$ から全体座標 $x \in \Omega_i$ への写像 $f_i : \Xi \to \Omega_i$ は

$$x = f_i(\xi) = x_{i(1)} + \xi \left(x_{i(2)} - x_{i(1)} \right) \tag{6.4.3}$$

によって与えられる．このとき，Ω_i 上で定義された 1 次の基底関数 $\left(\varphi_{i(1)}, \varphi_{i(2)} \right)$ と規準領域上で定義された 1 次の基底関数 $\left(\hat{\varphi}_{(1)}, \hat{\varphi}_{(2)} \right)$ の間には

$$\begin{pmatrix} \varphi_{i(1)}(f_i(\xi)) & \varphi_{i(2)}(f_i(\xi)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{(1)}(\xi) & \hat{\varphi}_{(2)}(\xi) \end{pmatrix} \tag{6.4.4}$$

が成り立つことになる．

1 次の基底関数に対する定義に対応させて，2 次の基底関数を定義しよう．2 次関数は三つの未定乗数をもつ．そこで，中間節点を追加して，節点を

$$\begin{pmatrix} \xi_{i(1)} & \xi_{i(2)} & \xi_{i(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \tag{6.4.5}$$

とおく．このとき，規準要素の基底関数 $\hat{\varphi}_{(1)}, \hat{\varphi}_{(2)}$ および $\hat{\varphi}_{(3)}$ は，それぞれ $\xi_{(1)}, \xi_{(2)}$ および $\xi_{(3)}$ における境界条件を満たすように決定される．それらの条件は，$\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}$ に対して

$$\hat{\varphi}_{(\alpha)}\left(\xi_{(\beta)}\right) = \delta_{\alpha\beta} \tag{6.4.6}$$

によって与えられる．式 (6.4.6) の条件は，未定乗数が近似関数の節点値の意味をもつための条件となっている．この条件より 2 次関数の三つの未定乗数を決定すれば，

$$\begin{pmatrix}\hat{\varphi}_{(1)} & \hat{\varphi}_{(2)} & \hat{\varphi}_{(3)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 (2\lambda_1 - 1) & \lambda_2 (2\lambda_2 - 1) & 4\lambda_1\lambda_2\end{pmatrix} \tag{6.4.7}$$

となる．このように決定された基底関数は，任意の $\xi \in \Xi$ に対して

$$\sum_{\alpha\in\{1,2,3\}} \hat{\varphi}_{(\alpha)} (\xi) = 1 \tag{6.4.8}$$

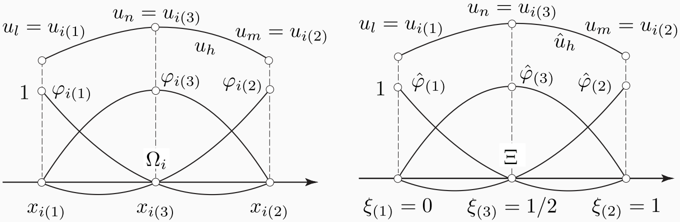
を満たす．式 (6.4.8) は，厳密解が $u = 1$ のとき，近似解が厳密解と一致するための条件になっている．図 6.21 にこれらの基底関数と Ω_i 上で定義された

基底関数を示す．ただし，図中 l, m および n は全体で割り当てられた節点番号を表すものとする．

したがって，2 次の 1 次元有限要素で使われる近似関数は，規準領域上で

$$\hat{u}_h\left(\xi\right) = \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{(1)}\left(\xi\right) & \hat{\varphi}_{(2)}\left(\xi\right) & \hat{\varphi}_{(3)}\left(\xi\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i(1)} \\ u_{i(2)} \\ u_{i(3)} \end{pmatrix} = \hat{\boldsymbol{\varphi}}\left(\xi\right) \cdot \boldsymbol{u}_i$$

のように構成される．ただし，本章では，規準領域上で定義された近似関数を $\hat{u}_h$ のように表すことにする．



(a) Ω_i 上の基底関数　　(b) Ξ 上の基底関数

図 6.21: 2 次の 1 次元有限要素で使われる基底関数と近似関数

同様にして，$m \in \mathbb{N}$ 次の 1 次元有限要素は次のように構成される．

定義 6.4.1 (m 次の 1 次元有限要素)

$\Xi = (0, 1)$ を規準領域とする．$m \in \mathbb{N}$ に対して，節点を

$$\begin{pmatrix} \xi_{i(1)} & \xi_{i(2)} & \cdots & \xi_{i(m+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

のように配置する．$\alpha \in \{1, \ldots, m+1\}$ に対して基底関数 $\hat{\varphi}_{(\alpha)}$ を m 次多項式で構成し，$\beta \in \{1, \ldots, m+1\}$ に対して式 (6.4.6) が満たされるように未定乗数を決定する．このように構成された基底関数を用いた有限要素を 1 次元 m 次有限要素という．

定義 6.4.1 のように構成された基底関数 $\hat{\varphi}_{(\alpha)}$ を用いるとき，近似関数は規準領域上で

$$\hat{u}_h = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_i} \hat{\varphi}_{(\alpha)} u_{i(\alpha)} = \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \bar{\boldsymbol{u}}_i \tag{6.4.9}$$

で構成される．ただし，$\mathcal{N}_i$ を局所節点番号の集合とする．式 (6.4.9) は，m 次の 1 次元有限要素に限らず，近似関数に対して成り立つ関係を表している．

このように，規準座標 $\xi \in \Xi$ 上で近似関数が与えられたならば，弱形式における有限要素ごとの双 1 次形式 (式 (6.2.13)) は，

$$a_i \left(u_h \left(\bar{\boldsymbol{u}}_i \right), v_h \left(\bar{\boldsymbol{v}}_i \right) \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} v_{i(1)} & \cdots & v_{i(m+1)} \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} a_i\left(\varphi_{i(1)}, \varphi_{i(1)}\right) & \cdots & a_i\left(\varphi_{i(1)}, \varphi_{i(m+1)}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_i\left(\varphi_{i(m+1)}, \varphi_{i(1)}\right) & \cdots & a_i\left(\varphi_{i(m+1)}, \varphi_{i(m+1)}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i(1)} \\ \vdots \\ u_{i(m+1)} \end{pmatrix} \\
&= \bar{\boldsymbol{v}}_i \cdot \left(\bar{\boldsymbol{A}}_i \bar{\boldsymbol{u}}_i\right) = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \left(\boldsymbol{Z}_i^\top \bar{\boldsymbol{A}}_i \boldsymbol{Z}_i \bar{\boldsymbol{u}}\right) = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \left(\tilde{\boldsymbol{A}}_i \bar{\boldsymbol{u}}\right)
\end{aligned} \tag{6.4.10}
$$

となる．ここで，

$$
\frac{\mathrm{d}\varphi_{i(\alpha)}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\hat{\varphi}_{(\alpha)}}{\mathrm{d}\xi} \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\omega_i} \frac{\mathrm{d}\hat{\varphi}_{(\alpha)}}{\mathrm{d}\xi}
$$

のようにかかれる．ただし，式 (6.4.3) より，

$$\omega_i = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\mathrm{d}f_i}{\mathrm{d}\xi} = x_{i(2)} - x_{i(1)}$$

となる．そこで，$\bar{\boldsymbol{A}}_i = \left(\bar{a}_{i(\alpha\beta)}\right)_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{N}_i|\times|\mathcal{N}_i|}$ の各要素は，

$$\bar{a}_{i(\alpha\beta)} = \int_{\Omega_i} \frac{\mathrm{d}\varphi_{i(\alpha)}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\varphi_{i(\beta)}}{\mathrm{d}x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\omega_i}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\hat{\varphi}_{(\alpha)}}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}\hat{\varphi}_{(\beta)}}{\mathrm{d}\xi}\ \mathrm{d}\xi$$

によって計算される．

また，弱形式における有限要素ごとの 1 次形式 (式 (6.2.16)) に対しても，

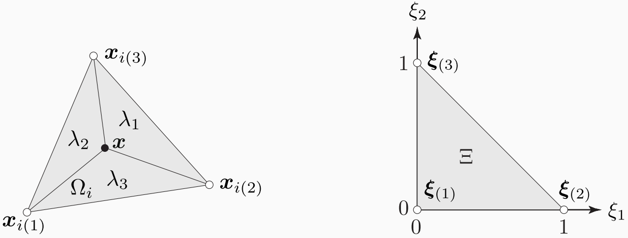
$$\begin{aligned} l_i\left(v_h\left(\bar{\boldsymbol{v}}_i\right)\right) &= \begin{pmatrix} v_{i(1)} & \cdots & v_{i(m+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{i(1)} \\ \vdots \\ b_{i(m+1)} \end{pmatrix} \\ &= \bar{\boldsymbol{v}}_i \cdot \bar{\boldsymbol{b}}_i = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \left(\boldsymbol{Z}_i^\top \bar{\boldsymbol{b}}_i\right) = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \tilde{\boldsymbol{b}}_i \\ &= \bar{\boldsymbol{v}}_i \cdot \bar{\boldsymbol{l}}_i = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \left(\boldsymbol{Z}_i^\top \bar{\boldsymbol{l}}_i\right) = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \tilde{\boldsymbol{l}}_i \end{aligned} \tag{6.4.11}$$

となる．ただし，$\bar{\boldsymbol{b}}_i = \left(\bar{b}_{i(\alpha)}\right)_\alpha \in \mathbb{R}^{|\mathcal{N}_i|}$ の各要素は，

$$\bar{b}_{i(\alpha)} = \int_{\Omega_i} b_0 \varphi_{i(\alpha)} \,\mathrm{d}x = \omega_i \int_0^1 b_0 \hat{\varphi}_{(\alpha)} \,\mathrm{d}\xi$$

によって計算される．式 (6.2.17) に対しても同様の関係が成り立つ．

次に，2 次元問題に対して使われる 3 角形有限要素の高次化について考えてみよう．式 (6.3.6) で定義された 1 次の 3 角形有限要素の基底関数 $\varphi_{i(1)}$，$\varphi_{i(2)}$ および $\varphi_{i(3)}$ は面積座標とよばれる．その理由は，図 6.22 のように，有限要素 $i \in \mathcal{E}$ の領域 Ω_i 上のある点 $\boldsymbol{x} \in \Omega_i$ を選んだとき，$\boldsymbol{x}$ を頂点とする三つの小 3 角形の $|\Omega_i|$ に対する面積比を λ_1, λ_2 および λ_3 とおいたとき，
$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \left(\varphi_{i(1)}, \varphi_{i(2)}, \varphi_{i(3)}\right)$ が成り立つためである．これより，
$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^\top = (\lambda_2, \lambda_3)^\top \in \mathbb{R}^2$ を規準座標とよび，
$\Xi = \left\{\boldsymbol{\xi} \in (0,1)^2 \;\middle|\; \xi_1 + \xi_2 < 1\right\}$ を規準領域とおく．



(a) 面積座標 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$　(b) 規準座標 $(\xi_1, \xi_2) = (\lambda_2, \lambda_3)$

図 6.22: 3 角形有限要素の面積座標と規準座標

ここでも，1 次の基底関数を規準領域上で定義してから高次化を考えることにしよう．規準要素に対して節点を

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_{(1)} & \boldsymbol{\xi}_{(2)} & \boldsymbol{\xi}_{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.4.12}$$

とおく．それに対して，6.3 節でみてきた基底関数は

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{(1)}(\boldsymbol{\xi}) & \hat{\varphi}_{(2)}(\boldsymbol{\xi}) & \hat{\varphi}_{(3)}(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{6.4.13}$$

であった．

1 次の基底関数に対する定義に対応させて，2 次の基底関数を定義しよう．ξ_1 と ξ_2 に対する完全 2 次多項式は

$$a_1 + a_2\xi_1 + a_3\xi_2 + a_4\xi_1^2 + a_5\xi_1\xi_2 + a_6\xi_2^2$$

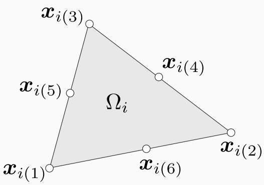
のように 6 つの未定乗数 $a_1, \ldots, a_6$ をもつ．そこで，図 6.23 のように 3 角形の 3 辺に中間節点を追加して，節点を

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_{(1)} & \boldsymbol{\xi}_{(2)} & \boldsymbol{\xi}_{(3)} & \boldsymbol{\xi}_{(4)} & \boldsymbol{\xi}_{(5)} & \boldsymbol{\xi}_{(6)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.4.14)$$

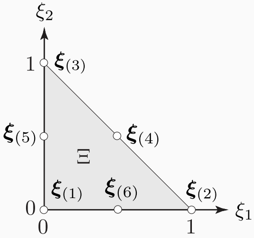
とおく．このとき，$\alpha \in \{1, \ldots, 6\}$ に対する規準要素の基底関数 $\hat{\varphi}_{(\alpha)}$ を $\beta \in \{1, \ldots, 6\}$ に対して，$\hat{\varphi}_{(\alpha)}\left(\boldsymbol{\xi}_{(\beta)}\right) = \delta_{\alpha\beta}$ が満たされるように決定すれば，

$$
\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{(1)} \\ \hat{\varphi}_{(2)} \\ \hat{\varphi}_{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 (2\lambda_1 - 1) \\ \lambda_2 (2\lambda_2 - 1) \\ \lambda_3 (2\lambda_3 - 1) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{(4)} \\ \hat{\varphi}_{(5)} \\ \hat{\varphi}_{(6)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\lambda_2\lambda_3 \\ 4\lambda_1\lambda_3 \\ 4\lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix}
$$

となる．図 6.24 は，これらの関数を示す．近似関数は，これらを用いて式 (6.4.9) のように構成される．



(a) Ω_i 上の節点



(b) Ξ 上の節点

図 6.23: 2 次の 3 角形有限要素で使われる節点

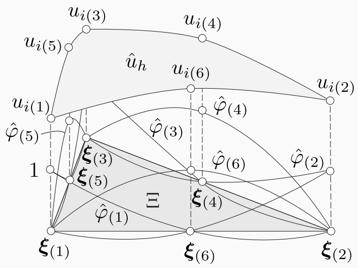
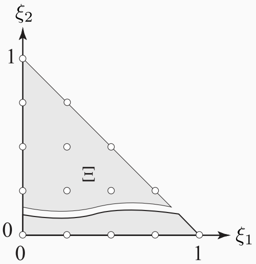


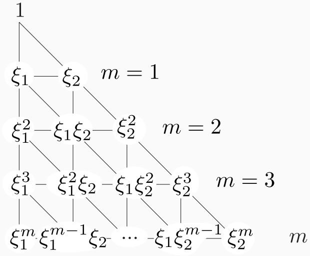
図 **6.24:** 2 次の 3 角形有限要素で使われる基底関数と近似関数

同様にして，$m \in \mathbb{N}$ 次の 3 角形有限要素は，2 次元の m 次完全多項式により次のように構成される．

定義 6.4.2 (m 次の 3 角形有限要素)

$\Xi = \left\{ \boldsymbol{\xi} \in (0,1)^2 \mid \xi_1 + \xi_2 < 1 \right\}$ を規準領域とする．$m \in \mathbb{N}$ に対して，図 6.25 のように $\alpha \in \mathcal{N}_i$ に対して節点 $\boldsymbol{\xi}_{(\alpha)}$ を配置する．基底関数 $\hat{\varphi}_{(\alpha)}$ を ξ_1 と ξ_2 に対する完全 m 次多項式で構成し，$\alpha, \beta \in \mathcal{N}_i$ に対して $\hat{\varphi}_{(\alpha)}\left(\boldsymbol{\xi}_{(\beta)}\right) = \delta_{\alpha\beta}$ が満たされるように未定乗数を決定する．このように構成された基底関数を用いた有限要素を 3 角形 m 次有限要素という．





(a) $\alpha \in \mathcal{N}_i$ に対する節点 $\boldsymbol{\xi}_{(\alpha)}$ の配置　(b) 完全 m 次多項式の項 ($|\mathcal{N}_i|$ 個)

図 6.25: m 次の 3 角形有限要素で使われる節点配置と完全 m 次多項式の項

定義 6.4.2 のように構成された基底関数 $\hat{\varphi}_{(\alpha)}$ を用いるとき，近似関数は規準領域上で式 (6.4.9) のように構成される．近似関数が与えられたならば，弱形式における有限要素ごとの双 1 次形式 (式 (6.3.14)) は，

$$\begin{aligned}\bar{a}_{i(\alpha\beta)} &= \int_{\Omega_i} \partial_{\boldsymbol{x}} \varphi_{i(\alpha)}\left(\boldsymbol{x}\right) \cdot \partial_{\boldsymbol{x}} \varphi_{i(\beta)}\left(\boldsymbol{x}\right) \ \mathrm{d}x \\ &= \int_{\Xi} \left\{\left(\boldsymbol{F}_i^{\top}\right)^{-1} \partial_{\boldsymbol{\xi}} \hat{\varphi}_{(\alpha)}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\right\} \cdot \left\{\left(\boldsymbol{F}_i^{\top}\right)^{-1} \partial_{\boldsymbol{\xi}} \hat{\varphi}_{(\beta)}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\right\} \omega_i \ \mathrm{d}\xi \end{aligned} \tag{6.4.15}$$

によって計算される．ここで，規準領域 Ξ から有限要素 $i \in \mathcal{E}$ の領域 Ω_i への写像は，$\alpha \in \{1, 2, 3\}$ に対して $\boldsymbol{x}_{i(\alpha)} = \left(x_{i(\alpha)1}, x_{i(\alpha)2}\right)^\top$ を有限要素 $i \in \mathcal{E}$ の局所節点の座標値とするとき，

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_{i(2)1} - x_{i(1)1} & x_{i(3)1} - x_{i(1)1} \\ x_{i(2)2} - x_{i(1)2} & x_{i(3)2} - x_{i(1)2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{i(1)1} \\ x_{i(1)2} \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{F}_i \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{x}_{i(1)}
\end{aligned}
\tag{6.4.16}
$$

によって与えられると仮定された．このような線形写像と固定元の平行移動を組み合わせた写像はアフィン写像とよばれる．この写像において，$\boldsymbol{F}_i$ は Jacobi 行列， ω_i は Jacobi 行列式 $\det \boldsymbol{F}_i$ を表す．また，式 (6.4.15) では

$$\partial_{\boldsymbol{\xi}} \hat{\varphi}_{(\alpha)}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} \partial \hat{\varphi}_{(\alpha)} / \partial \xi_1 \\ \partial \hat{\varphi}_{(\alpha)} / \partial \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial x_1 / \partial \xi_1 & \partial x_2 / \partial \xi_1 \\ \partial x_1 / \partial \xi_2 & \partial x_2 / \partial \xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \hat{\varphi}_{(\alpha)} / \partial x_1 \\ \partial \hat{\varphi}_{(\alpha)} / \partial x_2 \end{pmatrix}$$
$$= \boldsymbol{F}_i^{\top} \partial_{\boldsymbol{x}} \hat{\varphi}_{(\alpha)}(\boldsymbol{\xi}).$$

の関係が使われた．

さらに，弱形式における有限要素ごとの 1 次形式 (式 (6.3.16)) に対しても，

$$l_i(v_h(\bar{\boldsymbol{v}}_i)) = \bar{\boldsymbol{v}}_i \cdot (\bar{\boldsymbol{b}}_i + \bar{\boldsymbol{p}}_i) = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \left\{ \boldsymbol{Z}_i^{\top} (\bar{\boldsymbol{b}}_i + \bar{\boldsymbol{p}}_i) \right\} = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \left(\tilde{\boldsymbol{b}}_i + \tilde{\boldsymbol{p}}_i \right)$$

$$= \bar{\boldsymbol{v}}_i \cdot \bar{\boldsymbol{l}}_i = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \left(\boldsymbol{Z}_i^\top \bar{\boldsymbol{l}}_i\right) = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \tilde{\boldsymbol{l}}_i \tag{6.4.17}$$

となる．ここで，$\bar{\boldsymbol{b}}_i = \left(\bar{b}_{i(\alpha)}\right)_\alpha \in \mathbb{R}^{|\mathcal{N}_i|}$ と $\bar{\boldsymbol{p}}_i = \left(\bar{p}_{i(\alpha)}\right)_\alpha \in \mathbb{R}^{|\mathcal{N}_i|}$ の各要素は，

$$\bar{b}_{i(\alpha)} = \int_{\Omega_i} b_0 \varphi_{i(\alpha)} \,\mathrm{d}x = \omega_i \int_{\Xi} b_0 \hat{\varphi}_{(\alpha)} \,\mathrm{d}\xi, \tag{6.4.18}$$

$$\bar{p}_{i(\alpha)} = \int_{\partial\Omega_i \cap \Gamma_\mathrm{N}} \varphi_{i(2)} \,\mathrm{d}\gamma = \omega_{i1\mathrm{D}} \int_0^1 p_\mathrm{N} \hat{\varphi}_{(\alpha)} \,\mathrm{d}\xi_1 \tag{6.4.19}$$

によって計算される．ただし，$\omega_{i1\mathrm{D}} = \mathrm{d}\gamma / \mathrm{d}\xi_1 = |\partial\Omega_i \cap \Gamma_\mathrm{N}|$ である．

以上の計算式における 3 角形規準領域 Ξ 上の積分は，定理 6.3.1 の公式を用いて計算される．

2 次元問題に対しては長方形の有限要素も考えられる．2 次元領域 Ω は図 6.26 (a) のような長方形の領域 Ω_i $(i \in \mathcal{E})$ に分割可能とする．規準領域 Ξ を図 6.26 (b) のような $(0,1)^2$ とおく．$\boldsymbol{x} \in \Omega_i$ から $\boldsymbol{\xi} \in \Xi$ への変換は，x_1 方向の長さ座標 $(\lambda_{11}, \lambda_{12})$ と x_2 方向の長さ座標 $(\lambda_{21}, \lambda_{22})$ によって
$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^\top = (\lambda_{12}, \lambda_{22})^\top \in \Xi$ によって与えられる．ただし，

$$\lambda_{11}(\boldsymbol{x}) = \frac{x_{i(2)1} - x_1}{x_{i(2)1} - x_{i(1)1}}, \tag{6.4.20}$$

$$\lambda_{12}(\boldsymbol{x}) = \frac{x_1 - x_{i(1)1}}{x_{i(2)1} - x_{i(1)1}}, \tag{6.4.21}$$

$$\lambda_{21}(\boldsymbol{x}) = \frac{x_{i(4)2} - x_2}{x_{i(4)2} - x_{i(1)2}}, \tag{6.4.22}$$

$$\lambda_{22}(\boldsymbol{x}) = \frac{x_2 - x_{i(1)2}}{x_{i(4)2} - x_{i(1)2}} \tag{6.4.23}$$

である．

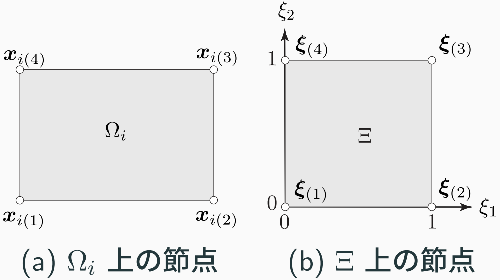


図 6.26: 長方形有限要素の節点

1 次の長方形有限要素では，基底関数に ξ_1 と ξ_2 に対する双 1 次多項式

$$a_1 + a_2\xi_1 + a_3\xi_2 + a_4\xi_1\xi_2$$

が使われる．4 つの未定乗数 $a_1, \ldots, a_4$ は，規準要素の 4 つの節点

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_{(1)} & \boldsymbol{\xi}_{(2)} & \boldsymbol{\xi}_{(3)} & \boldsymbol{\xi}_{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.4.24}$$

における境界条件によって決定される．実際，$\alpha, \beta \in \{1, 2, 3, 4\}$ に対して $\hat{\varphi}_{(\alpha)}\left(\boldsymbol{\xi}_{(\beta)}\right) = \delta_{\alpha\beta}$ を満たす条件から，規準要素の基底関数として

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{(1)} & \hat{\varphi}_{(2)} & \hat{\varphi}_{(3)} & \hat{\varphi}_{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11}\lambda_{21} & \lambda_{12}\lambda_{21} & \lambda_{12}\lambda_{22} & \lambda_{11}\lambda_{22} \end{pmatrix}$$

が得られる．図 6.27 にこれらの基底関数が示されている．これらを用いて，規準要素の近似関数は式 (6.4.9) のように構成される．

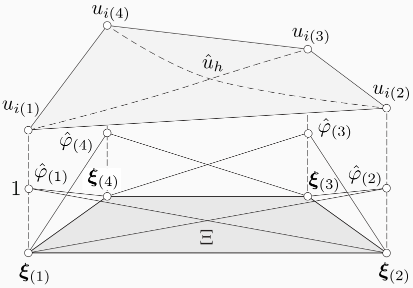


図 6.27: 1 次の長方形有限要素で使われる基底関数と近似関数

長方形有限要素の高次化については二つの方法が知られている．一つは双 m 次多項式を使う次のような方法である．

定義 6.4.3 (Lagrange 族長方形有限要素)

$\Xi = (0,1)^2$ を規準領域とする．$m \in \mathbb{N}$ に対して，図 6.28 のように $\alpha \in \mathcal{N}_i$ に対して節点 $\boldsymbol{\xi}_{(\alpha)}$ を配置する．基底関数 $\hat{\varphi}_{(\alpha)}$ を ξ_1 と ξ_2 に対する双 m 次多項式で構成し，$\alpha, \beta \in \mathcal{N}_i$ に対して $\hat{\varphi}_{(\alpha)}\left(\boldsymbol{\xi}_{(\beta)}\right) = \delta_{\alpha\beta}$ が満たされるように未定乗数を決定する．このように構成された基底関数を用いた有限要素を Lagrange 族長方形有限要素という．

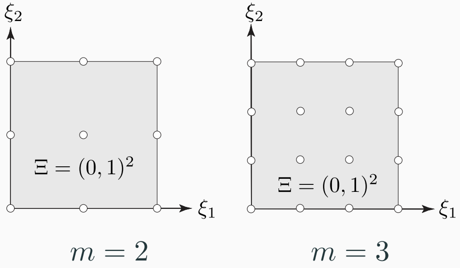


図 6.28: Lagrange 族長方形有限要素の節点

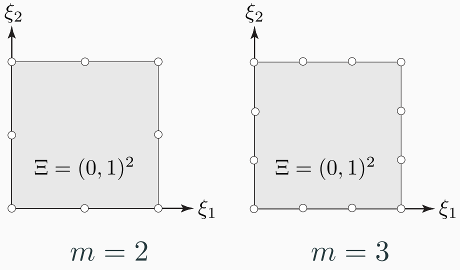


図 6.29: セレンディピティ族長方形有限要素の節点

もう一つの高次化の方法は，有限要素の境界上の節点だけを使う方法である．この方法は双 m 次多項式を使って演繹的にえられた Lagrange 族とは異なり，偶発的にみつかった方法であることからセレンディピティ族とよばれる．

定義 6.4.4 (セレンディピティ族長方形有限要素)

$\Xi = (0,1)^2$ を規準領域とする．$m \in \mathbb{N}$ に対して，図 6.29 のように $\alpha \in \mathcal{N}_i$ に対して節点 $\boldsymbol{\xi}_{(\alpha)}$ を配置する．基底関数 $\hat{\varphi}_{(\alpha)}$ を ξ_1 と ξ_2 に対する多項式で構成し，$\alpha, \beta \in \mathcal{N}_i$ に対して $\hat{\varphi}_{(\alpha)}\left(\boldsymbol{\xi}_{(\beta)}\right) = \delta_{\alpha\beta}$ が満たされるように未定乗数を決定する．このように構成された基底関数を用いた有限要素を**セレンディピティ族長方形有限要素**という．その多項式は，$m = 2$ のとき ξ_1 と ξ_2 に対する完全 2 次多項式に $\xi_1^2\xi_2$ と $\xi_1\xi_2^2$ が追加された項で構成される．また，$m = 3$ のとき ξ_1 と ξ_2 に対する完全 3 次多項式に $\xi_1^3\xi_2$ と $\xi_1\xi_2^3$ が追加された項で構成される．

以上のように，規準座標 $\boldsymbol{\xi} \in \Xi$ 上で近似関数 $\hat{u}_h(\boldsymbol{\xi})$ が与えられたならば，規準座標 Ξ から長方形有限要素 Ω_i へのアフィン写像を用いて，式 (6.4.15) と式 (6.4.17) により，Ω_i の要素係数行列や既知項ベクトルが求められる．このときのアフィン写像は，図 6.26 のような長方形要素の場合，$\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$ に対して $\boldsymbol{x}_{i(\alpha)} = \left(x_{i(\alpha)1}, x_{i(\alpha)2}\right)^\top$ を有限要素 $i \in \mathcal{E}$ の局所節点の座標値とするとき，

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_{i(2)1} - x_{i(1)1} & 0 \\ 0 & x_{i(4)2} - x_{i(1)2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{i(1)1} \\ x_{i(1)2} \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{F}_i \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{x}_{i(1)}
\end{aligned}
\tag{6.4.25}
$$

によって与えられる．

§6.4.4　4 面体有限要素

3 次元の有限要素も 2 次元のときと同様に構成することができる．まずは，図 6.30 のような 4 面体有限要素について考えてみよう．3 角形有限要素では面積座標が使われた．4 面体有限要素では図 6.31 (a) のような体積座標 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_4)$ と図 6.31 (b) のような規準領域 $\Xi = \left\{\boldsymbol{\xi} \in (0,1)^3 \;\middle|\; \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 < 1\right\}$ が使われる．1 次の 4 面体有限要素では，図 6.31 (b) のような節点 $\boldsymbol{\xi}_{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{(4)}$ に対して，$\hat{\varphi}_{(1)} = \lambda_1, \ldots, \hat{\varphi}_{(1)} = \lambda_4$ が基底関数に選ばれる．m 次の 4 面体有限要素は，3 角形有限要素と同様にして，完全 m 次多項式を使って基底関数が構成される．

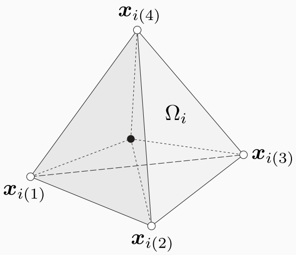
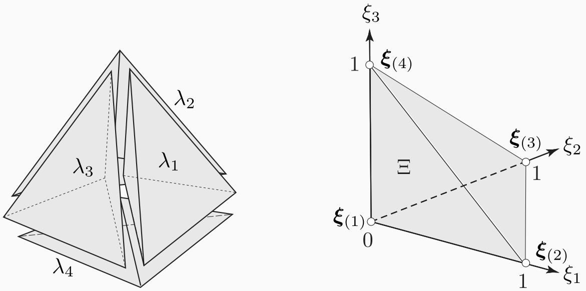


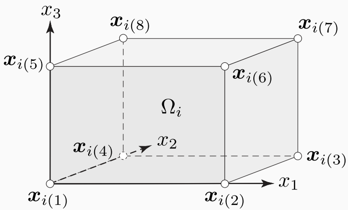
図 6.30: 1 次の 4 面体有限要素



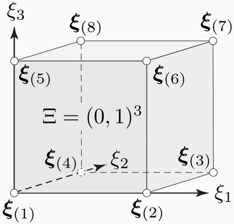
(a) 体積座標 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_4)$　(b) 規準座標 (ξ_1, ξ_2, ξ_3)

図 6.31: 4 面体有限要素の体積座標と規準座標

6 面体有限要素も 4 角形有限要素の 3 次元空間への拡張によってつくられる．図 6.32 に 1 次の 6 面体有限要素の節点を示す．ここでも，式 (6.4.20) から式 (6.4.23) と同様に，節点座標 $\boldsymbol{x}_{i(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}_{i(8)} \in \mathbb{R}^3$ に対して長さ座標 $\lambda_{11}, \ldots, \lambda_{33}$ と規準座標 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^\top = (\lambda_{12}, \lambda_{22}, \lambda_{32})^\top \in \Xi$ を定義することができる．規準要素に対して，Lagrange 族 m 次の 6 面体有限要素では，規準領域上で均等に節点を配置し，規準座標に対する 3 重 m 次多項式を使って基底関数 $\hat{\varphi}_{(1)}, \ldots, \hat{\varphi}_{((m+1)^3)}$ が構成される．セレンディピティ族 m 次の 6 面体有限要素では，有限要素の境界上で均等に節点を配置し，m 次多項式を使って基底関数が構成される．



(a) 6 面体 1 次有限要素

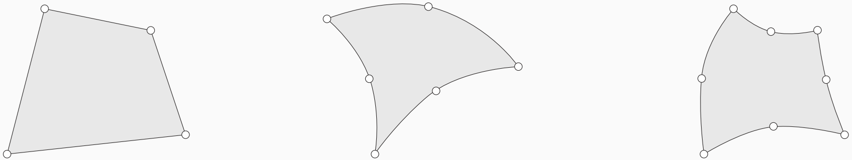


(b) 規準座標 (ξ_1, ξ_2, ξ_3)

図 6.32: 1 次の 6 面体有限要素と規準座標

6.5 アイソパラメトリック有限要素

6.4 節でみてきた有限要素の領域は，2 次元の場合は 3 角形あるいは 4 角形であると仮定され，3 次元の場合は 4 面体あるいは 6 面体であると仮定された．ここでは，図 6.33 のような一般の 4 角形，2 次曲線で構成された 3 角形や 4 角形およびそれらを 3 次元に拡張した形状などの有限要素について考えてみよう．



(a) 一般の 4 角形要素　(b) 2 次曲線の 3 角形要素　(c) 2 次曲線の 4 角形要素

図 6.33: アイソパラメトリック有限要素の例

6.4.2 項でみてきたように，3 角形有限要素の基底関数は面積座標によって与えられ，それらによって構成された近似関数が弱形式に代入されたときの領域積分は，定理 6.3.1 を使って計算された．4 角形有限要素の場合は 6.5.2 項で示される Gauss 求積によって計算することができる．これらの積分公式は，基底関数を高次化することで被積分関数の次数が上がっても有効である．しかし，積分領域が図 6.33 のような場合には，それらの積分公式は使えないことになる．

そこで，有限要素の領域 Ω_i を，2 次元の場合には 3 角形や 4 角形の規準領域 Ξ に，3 次元の場合には 4 面体や 6 面体の規準座標 Ξ に変換する関数 (写像) を用意すれば，その変換を通して，Ξ 上で定理 6.3.1 や Gauss 求積により積分がおこなえることになる．そのときの写像 $\hat{\boldsymbol{x}} : \Xi \to \Omega_i$ に対する近似関数 $\hat{\boldsymbol{x}}_h$ が u の近似関数と同じ基底関数で構成されたときの有限要素をアイソパラメトリック有限要素という．すなわち，次のように定義される．

定義 6.5.1 (アイソパラメトリック有限要素)

有限要素 $i \in \mathcal{E}$ の領域 $\Omega_i \subset \mathbb{R}^d$ に対する規準領域を $\Xi \subset \mathbb{R}^d$ とする．局所節点番号 $i \in \mathcal{N}_i = \{1, \ldots, |\mathcal{N}_i|\}$ に対して，規準要素の基底関数を $\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \left(\hat{\varphi}_{(1)}, \ldots, \hat{\varphi}_{(|\mathcal{N}_i|)}\right)$ とする．このとき，$\xi \in \Xi$ に対して u の近似関数と Ω_i 上の座標値が

$$\hat{u}_h\left(\boldsymbol{\xi}\right) = \hat{\boldsymbol{\varphi}}\left(\boldsymbol{\xi}\right) \cdot \bar{\boldsymbol{u}}_i, \quad \hat{v}_h\left(\boldsymbol{\xi}\right) = \hat{\boldsymbol{\varphi}}\left(\boldsymbol{\xi}\right) \cdot \bar{\boldsymbol{v}}_i,$$

$$\hat{x}_{h1}\left(\boldsymbol{\xi}\right) = \hat{\boldsymbol{\varphi}}\left(\boldsymbol{\xi}\right) \cdot \bar{\boldsymbol{x}}_{i1}, \quad \ldots \quad \hat{x}_{hd}\left(\boldsymbol{\xi}\right) = \hat{\boldsymbol{\varphi}}\left(\boldsymbol{\xi}\right) \cdot \bar{\boldsymbol{x}}_{id}$$

で構成されたときの有限要素をアイソパラメトリック有限要素という．ただし，$\bar{\boldsymbol{u}}_i, \bar{\boldsymbol{v}}_i \in \mathbb{R}^{|\mathcal{N}_i|}$ を u と v の局所節点値ベクトル，$\bar{\boldsymbol{x}}_{i1}, \ldots, \bar{\boldsymbol{x}}_{id} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{N}_i|}$ を Ω_i 上の局所節点座標値ベクトルとする．

アイソパラメトリック有限要素では，有限要素に対する弱形式に現れるすべての関数は規準座標 $\xi \in \Xi$ を媒介変数として与えられる．その結果，積分領域は規準領域に変換されて，積分公式が使えることになる．しかし，その反面，u の $x \in \Omega_i$ に対する偏微分や Jacobi 行列式の計算で苦労することになる．次の項でそのようすをみてみよう．

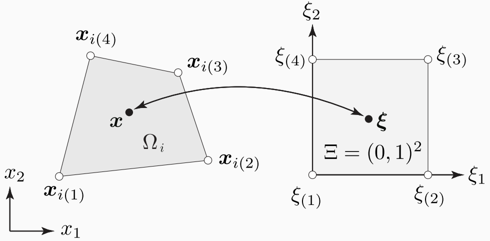


図 6.34: 4 節点アイソパラメトリック有限要素における座標変換

アイソパラメトリック有限要素の例として，図 6.34 のような 4 節点アイソパラメトリック有限要素について考えてみよう．$i \in \mathcal{E}$ に対して Ω_i を一般の 4 角形領域と仮定し，$\Xi = (0,1)^2$ を規準領域とする．このとき，$\boldsymbol{\xi} \in \Xi$ に対して

$$
\begin{aligned}
\hat{u}_h(\boldsymbol{\xi}) &= \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{(1)}(\boldsymbol{\xi}) & \hat{\varphi}_{(2)}(\boldsymbol{\xi}) & \hat{\varphi}_{(3)}(\boldsymbol{\xi}) & \hat{\varphi}_{(4)}(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i(1)} \\ u_{i(2)} \\ u_{i(3)} \\ u_{i(4)} \end{pmatrix} = \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \bar{\boldsymbol{u}}_i, \\
\hat{v}_h(\boldsymbol{\xi}) &= \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \bar{\boldsymbol{v}}_i, \\
\hat{x}_{h1}(\boldsymbol{\xi}) &= \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \bar{\boldsymbol{x}}_{i1}, \\
\hat{x}_{h2}(\boldsymbol{\xi}) &= \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \bar{\boldsymbol{x}}_{i2}
\end{aligned}
$$

と定義する．ただし，

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{(1)} \\ \hat{\varphi}_{(2)} \\ \hat{\varphi}_{(3)} \\ \hat{\varphi}_{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\xi_1)(1-\xi_2) \\ \xi_1(1-\xi_2) \\ \xi_1\xi_2 \\ (1-\xi_1)\xi_2 \end{pmatrix}$$

とする．ここで，$\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ の x_1 と x_2 に対する偏微分の計算について考えてみよう．
しかし，$\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ は $\boldsymbol{\xi}$ の関数である．ここで，微分の連鎖則を用いれば，
$\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$ に対して

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}_\xi \hat{\varphi}_{(\alpha)}(\boldsymbol{\xi}) &= \begin{pmatrix} \partial\hat{\varphi}_{(\alpha)}/\partial\xi_1 \\ \partial\hat{\varphi}_{(\alpha)}/\partial\xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial\hat{x}_1/\partial\xi_1 & \partial\hat{x}_2/\partial\xi_1 \\ \partial\hat{x}_1/\partial\xi_2 & \partial\hat{x}_2/\partial\xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial\hat{\varphi}_{(\alpha)}/\partial x_1 \\ \partial\hat{\varphi}_{(\alpha)}/\partial x_2 \end{pmatrix} \\ &= \left(\boldsymbol{\nabla}_\xi \hat{\boldsymbol{x}}^\top\right) \boldsymbol{\nabla}_x \hat{\varphi}_{(\alpha)}(\boldsymbol{\xi}) \end{aligned}$$

が成り立つ．そこで，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}_x \hat{\varphi}_{(\alpha)}(\boldsymbol{\xi}) &= \begin{pmatrix} \partial\hat{\varphi}_{(\alpha)}/\partial x_1 \\ \partial\hat{\varphi}_{(\alpha)}/\partial x_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\omega_i(\boldsymbol{\xi})} \begin{pmatrix} \partial\hat{x}_2/\partial\xi_2 & -\partial\hat{x}_2/\partial\xi_1 \\ -\partial\hat{x}_1/\partial\xi_2 & \partial\hat{x}_1/\partial\xi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial\hat{\varphi}_{(\alpha)}/\partial\xi_1 \\ \partial\hat{\varphi}_{(\alpha)}/\partial\xi_2 \end{pmatrix} \\ &= \left(\boldsymbol{\nabla}_\xi \hat{\boldsymbol{x}}^\top\right)^{-1} \boldsymbol{\nabla}_\xi \hat{\varphi}_{(\alpha)}(\boldsymbol{\xi}) \end{aligned} \tag{6.5.1}$$

が得られる．ここで，$\left(\boldsymbol{\nabla}_\xi \hat{\boldsymbol{x}}^\top\right)^\top$ と

$$\omega_i(\boldsymbol{\xi}) = \det\left(\boldsymbol{\nabla}_\xi \hat{\boldsymbol{x}}^\top\right) \tag{6.5.2}$$

はそれぞれ写像 $\hat{\boldsymbol{x}} : \Xi \to \Omega_i$ の Jacobi 行列と Jacobi 行列式である．

これらの結果を用いれば，要素係数行列 $\left(a_i\left(\varphi_{i(\alpha)}, \varphi_{i(\beta)}\right)\right)_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ は

$$
\begin{aligned}
a_i\left(\varphi_{i(\alpha)}, \varphi_{i(\beta)}\right) &= \int_{\Omega_i} \left(\frac{\partial \varphi_{i(\alpha)}}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_{i(\beta)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_{i(\alpha)}}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_{i(\beta)}}{\partial x_2} \right) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\nabla}_x \varphi_{i(\alpha)}\left(\boldsymbol{x}\right) \cdot \boldsymbol{\nabla}_x \varphi_{i(\beta)}\left(\boldsymbol{x}\right) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{(0,1)^2} \boldsymbol{\nabla}_x \hat{\varphi}_{(\alpha)}\left(\boldsymbol{\xi}\right) \cdot \boldsymbol{\nabla}_x \hat{\varphi}_{(\beta)}\left(\boldsymbol{\xi}\right) \omega_i\left(\boldsymbol{\xi}\right) \, \mathrm{d}\xi \qquad (6.5.3)
\end{aligned}
$$

のように変換される．式 (6.5.3) 右辺の被積分関数において，$\boldsymbol{\nabla}_x \hat{\varphi}_{(\alpha)}\left(\boldsymbol{\xi}\right)$ と $\omega_i\left(\boldsymbol{\xi}\right)$ はそれぞれ式 (6.5.1) と式 (6.5.2) で計算される．積分は次に示される Gauss 求積で計算される．

Gauss 求積の公式を具体的に示そう．$n \in \mathbb{N}$ に対して，$f_n : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ が n 次関数のとき，$n \in \{1, 3, 5, \ldots\}$ に対して

$$\int_{-1}^{1} f_1(y)\,\mathrm{d}y = 2f_1\left(0\right),$$

$$\int_{-1}^{1} f_3(y)\,\mathrm{d}y = f_3\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f_3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\int_{-1}^{1} f_5(y)\,\mathrm{d}y = \frac{5}{9} f_5\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f_5\left(0\right) + \frac{5}{9} f_5\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right),$$

$$\vdots$$

が成り立つことを用いて，左辺の積分を右辺で算する方法を Gauss 求積という．ここで，右辺の項を $i \in \{1, 2, \ldots, (n+1)/2\}$ に対して $w_i f_n(\eta_i)$ とかいたとき，η_i を Gauss 節点という．図 6.35 に f_n と Gauss 節点の関係を示している．これらの公式が成り立つ根拠をみてみよう．

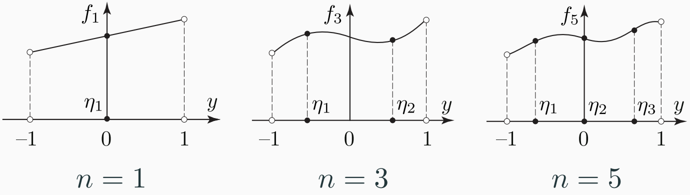


図 6.35: 1 次元関数の Gauss 求積

まず，あとで示される Gauss 求積の定理で使うために，Legendre 多項式を定義しておこう．ここでは，n と m を非負の整数とする．

定義 6.5.2 (Legendre 多項式)

関数 $l_n : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ が Legendre の微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\left(1 - x^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}l_n\right\} + n\left(n + 1\right)l_n = 0 \tag{6.5.4}$$

が満たすとき，l_n を Legendre 多項式という．

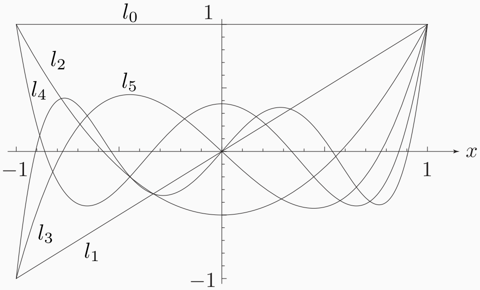


図 6.36: Legendre 多項式 l_n

Legendre 多項式は，Rodrigues の公式を用いて

$$l_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left\{\left(x^2-1\right)^n\right\} \tag{6.5.5}$$

とかける．これより，具体的に

$$l_0(x) = 1, \quad l_1(x) = x, \quad l_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}, \quad l_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x, \quad \cdots$$

のように得られる．図 6.36 に l_0 から l_5 までを示している．したがって，l_n は n 次の多項式であることがわかる．さらに，関数 $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ が n 次未満の多項式ならば，

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, l_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

が成り立つ．なぜならば，式 (6.5.4) と式 (6.5.5) より

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\, l_n(x)\,\mathrm{d}x &= \left[f \left\{ -\frac{1}{n(n+1)} \left(1-x^2\right) \frac{\mathrm{d}l_n}{\mathrm{d}x} \right\} \right]_{-1}^{1} \\ &\quad - \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} \left\{ \left(x^2-1\right)^n \right\} \mathrm{d}x \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n} \left(x^2-1\right)^n \mathrm{d}x = 0\end{aligned}$$

が成り立つからである．これらの性質から，$\{l_n\}_n$ の直交性

$$\int_{-1}^{1} l_n(x)\, l_m(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$$

が成り立つ．

　また，一般に $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ に対して

$$
\begin{aligned}
\phi_i(x) &= \prod_{j \in \{1,\ldots,n\},\ j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \\
&= \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}
\end{aligned}
$$

は $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ を満たし，ある $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して

$$
\hat{f}(x) = \sum_{i \in \{1,\ldots,n\}} \phi_i(x) f(x_i)
$$

とおけば，$\hat{f}(x_i) = f(x_i)$ が満たされる．このとき，$\phi_i(x)$ を Lagrange 基底多項式とよび，$\hat{f}(x)$ を Lagrange 補間とよぶ．ここで，Legendre 多項式 l_n の根 $\eta_1, \ldots, \eta_n$ に対する Lagrange 基底多項式を

$$\varphi_i(x) = \prod_{j \in \{1, \ldots, n\},\ j \neq i} \frac{x - \eta_j}{\eta_i - \eta_j} \tag{6.5.6}$$

とかく．図 6.37 に φ_1 から φ_5 までを示している．この $\varphi_i(x)$ を用いたときの Lagrange 補間を考えれば，次のような Gauss 求積の公式が得られる．

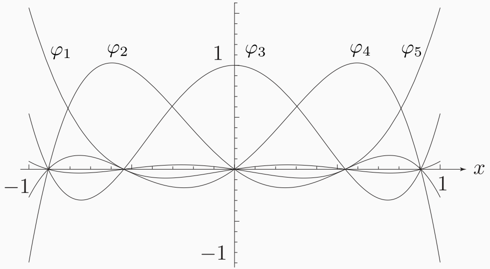


図 **6.37:** 5 次 Legendre 多項式の根を節点とする関数 $\varphi_i(x)$

定理 6.5.3 (Gauss 求積)

$\eta_1, \dots, \eta_n$ を n 次 Legendre 多項式 l_n の根とする．$f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ を $2n$ 次未満の多項式とする．このとき，

$$\int_{-1}^{1} f(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} w_i f(\eta_i)$$

が成り立つ．ただし，式 (6.5.6) の $\varphi_i(x)$ に対して

$$w_i = \int_{-1}^{1} \varphi_i(x) \, \mathrm{d}x$$

である．

証明　もしも，$f(x)$ が $n-1$ 次の多項式であったとする．このとき，

$$f(x) = \sum_{i\in\{1,\ldots,n\}} \varphi_i(x) f(\eta_i)$$

が成り立つ．なぜならば，両辺の差は n 階微分を含むが，f の n 階微分は零であるからである．よって，

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left(\sum_{i\in\{1,\ldots,n\}} \varphi_i(x) f(\eta_i) \right) \mathrm{d}x = \sum_{i\in\{1,\ldots,n\}} w_i f(\eta_i)$$

が成り立つ．次に，f が n 次以上 $2n$ 次未満の多項式であったとする．このとき，

$$f\left(x\right) = l_n\left(x\right) g\left(x\right) + r\left(x\right)$$

とかける．ただし，$g\left(x\right)$ と $r\left(x\right)$ は n 次未満の多項式である．ここで，Legendre 多項式の性質より

$$\int_{-1}^{1} l_n\left(x\right) g\left(x\right)\, \mathrm{d}x = 0$$

が成り立つ．また，$l_n\left(\eta_i\right) = 0$ より

$$f\left(\eta_i\right) = r\left(\eta_i\right)$$

が成り立つ．さらに，$r(x)$ が n 次未満の多項式なので，

$$\int_{-1}^{1} r(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i\in\{1,\dots,n\}} w_i r(\eta_i)$$

が成り立つ．よって，

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} r(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i\in\{1,\dots,n\}} w_i r(\eta_i) = \sum_{i\in\{1,\dots,n\}} w_i f(\eta_i)$$

が得られる． $\square$

定理 6.5.3 において，積分領域が $(0,1)$ に変更された場合には，積分公式は変数変換により，

$$\int_0^1 f_{2n-1}(y)\ \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\sum_{i\in\{1,\dots,n\}} w_i f\left(\frac{\eta_i - 1}{2}\right)$$

に変更される．さらに，2 次元領域 $(-1,1)^2$ 上の双 n 次関数に対しては，図 6.38 のような Gauss 節点に対して，

$$\int_{(-1,1)^2} f_{2n-1}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\ \mathrm{d}\xi = \sum_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2} w_i w_j f\left(\boldsymbol{\eta}_{ij}\right),$$

$$\int_{(0,1)^2} f_{2n-1}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\ \mathrm{d}\xi = \frac{1}{4}\sum_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2} w_i w_j f\left(\left(\boldsymbol{\eta}_{ij} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)\bigg/\ 2\right) \tag{6.5.7}$$

が成り立つ．これらの公式は，矩形のアイソパラメトリック有限要素の要素上での数値積分において利用される．たとえば，式 (6.5.3) に対しては式 (6.5.7) が使われる．このとき，n の値の選び方に関しては，多項式を要素とする行列の逆行列計算が含まれることから，厳密には決定されない．そこで，できるだけ小さな値でかつ実用上支障が現れない値が数値実験によって調べられている．また，線形弾性問題に対しては，選択的次数低減積分を用いることでアワーグラスモード (ひずみがゼロとなる変形) の発生が抑えられることが知られている．それらについては専門書を参照されたい．

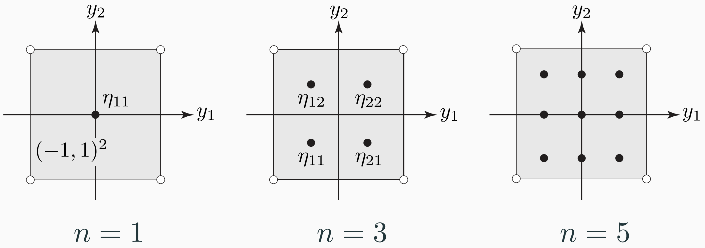


図 6.38: 2 次元領域で定義された関数の Gauss 求積

6.6 誤差評価

§6.6 誤差評価

定理 6.1.13 では，Galerkin 法による近似解は近似関数の集合 U_h の中で最良の要素になっていることをみた．そこで，Galerkin 法による近似解の誤差を考える場合には，厳密解が属する関数空間の要素に U_h の要素がどこまで近づくことができるのか (近似能力) に依存することになる．ここでは，定理 6.1.13 の結果を用いて，有限要素法による近似解 (有限要素解) の誤差評価について考えることにしよう．ここで示される結果は，第 8 章と第 9 章で形状最適化問題の数値解法に対する誤差評価において使われることになる．ここでは，本章においてこれまでみてきたことを基礎にして，有限要素法をある程度抽象化したうえで基本的な定理をみていくことにしよう．

§6.6.1 有限要素分割列

有限要素分割について定義しよう．領域分割による誤差が無視できるように，$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を $d \in \{1,2,3\}$ 次元の有界領域で 2 次元のときは多角形，3 次元のときは多面体として，一般に多面体とよぶことにする．Ω に対して，$\mathcal{T} = \{\Omega_i\}_{i \in \mathcal{E}}$ を有限要素分割とよぶ．ただし，$\mathcal{E}$ を要素番号の有限集合とする．また，Ω_i は凸多面体で，$\bar{\Omega} = \bigcup_{i \in \mathcal{E}} \bar{\Omega}_i$ かつ $i \neq j$ なる任意の $i, j \in \mathcal{E}$ に対して

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \quad \bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j \subset \mathbb{R}^{d-1}$$

が満たされるとする．各 Ω_i に対して，

$$\operatorname{diam}\Omega_i = \sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\Omega_i} \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_{\mathbb{R}^d}$$

を Ω_i の直径とよび h_i とかく．また，Ω_i の内接球の直径を $\operatorname{inscr}\Omega_i$ とかく．すべての $i \in \mathcal{E}$ に対して，ある正の定数 σ が存在して

$$\frac{\operatorname{inscr}\Omega_i}{\operatorname{diam}\Omega_i} \geq \sigma \tag{6.6.1}$$

が成り立つとき，$\mathcal{T}$ は正則な有限要素分割であるという．さらに，

$$h(\mathcal{T}) = \max_{i\in\mathcal{E}} h_i \tag{6.6.2}$$

を $\mathcal{T}$ の最大直径とよび，$h(\mathcal{T}) \to 0$ となるような有限要素分割列を $\{\mathcal{T}_h\}_{h\to 0}$ とかくことにする．

§6.6.2 アフィン同等有限要素分割

正則な有限要素分割列 $\{\mathcal{T}_h\}_{h\to 0}$ からある有限要素分割 $\mathcal{T}_h$ を選び，そのときの節点番号の集合を $\mathcal{N}$ として，$j \in \mathcal{N}$ に対して $\boldsymbol{x}_j$ を節点とする．このとき，Galerkin 法としてみたときの有限要素法の基底関数 $\phi_j : \Omega \to \mathbb{R}$ は次の条件を満たしていると仮定する．

1. 任意の $j, l \in \mathcal{N}$ に対して

$$\phi_j(\boldsymbol{x}_l) = \delta_{jl}$$

   が成り立つ．

2. ϕ_j は，$j \in \mathcal{N}$ を節点にもつ有限要素の領域を台とする．

これらの基底関数 ϕ_j の集合は，6.2 節から 6.5 節でみてきたように，有限要素 $i \in \mathcal{E}$ の領域 Ω_i 上で定義された基底関数 $\varphi_{i(\alpha)}$ $(\alpha \in \mathcal{N}_i)$ の集合にかきかえられる．さらに，規準領域を Ξ とおいて，Ξ 上の基底関数 $\hat{\varphi}_{(\alpha)} : \Xi \to \mathbb{R}$ も定義され，規準領域から有限要素の領域への写像 $\boldsymbol{f}_i : \Xi \to \Omega_i$ を用いて

$$\varphi_{i(\alpha)}\left(\boldsymbol{f}_i\left(\boldsymbol{\xi}\right)\right) = \hat{\varphi}\left(\boldsymbol{\xi}_{(\alpha)}\right)$$

のようにかけると仮定する．ただし，本節では，簡単のために，すべての有限要素に対応する規準要素は共通で，

$$\Xi = (0,1)^d \quad \text{or} \quad \Xi = \left\{ \boldsymbol{\xi} \in (0,1)^d \;\middle|\; \xi_1 + \cdots + \xi_d < 1 \right\} \tag{6.6.3}$$

とする．また，$\boldsymbol{f}_i$ は，$\boldsymbol{F}_i \in \mathbb{R}^{d\times d}$ と $\boldsymbol{b}_i \in \mathbb{R}^d$ を用いて

$$\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{F}_i\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{b}_i \tag{6.6.4}$$

のような 1 次形式で与えられると仮定する．3 角形有限要素と 4 角形有限要素の場合はそれぞれ式 (6.4.16) と式 (6.4.25) に具体的に示されている．このような線形写像と固定元の平行移動を組み合わせた写像はアフィン写像とよばれる．そこで，$\boldsymbol{f}_i$ がアフィン写像のときの有限要素分割をアフィン同等有限要素分割とよぶことにする．

6.2 節から 6.4 節でみてきたような有限要素分割はアフィン同等有限要素分割が仮定されていた．アイソパラメトリック有限要素では，一般に，この関係は成り立たないが，$\boldsymbol{f}_i : \Xi \to \Omega_i$ が非線形写像と固定元の平行移動を組み合

わせた写像であっても，後で示される $\boldsymbol{f}_i$ の Jacobi 行列 $\boldsymbol{f}_{i\boldsymbol{\xi}^\top} = \left(\boldsymbol{\nabla}_\xi \boldsymbol{f}_i^\top\right)^\top$ と Jacobi 行列式 $\omega_i(\boldsymbol{\xi}) = \det \boldsymbol{f}_{i\boldsymbol{\xi}^\top}$ の上限値と下限値が正の実数で与えられる場合には同様の議論が成り立つことになる．

　このように定義された正則なアフィン同等有限要素分割を用いる際，弱形式の計算において，たとえば Poisson 問題では，任意の $\alpha, \beta \in \mathcal{N}_i$ に対して

$$
\begin{aligned}
& a_i\left(\varphi_{i(\alpha)}, \varphi_{i(\beta)}\right) \\
&\quad = \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\nabla}_x \varphi_{i(\alpha)} \cdot \boldsymbol{\nabla}_x \varphi_{i(\beta)} \, \mathrm{d}x \\
&\quad = \int_{\Xi} \left\{ \left(\boldsymbol{\nabla}_\xi \boldsymbol{f}_i^\top\right)^{-1} \boldsymbol{\nabla}_\xi \hat{\varphi}_{(\alpha)} \right\} \cdot \left\{ \left(\boldsymbol{\nabla}_\xi \boldsymbol{f}_i^\top\right)^{-1} \boldsymbol{\nabla}_\xi \hat{\varphi}_{(\beta)} \right\} \omega_i \, \mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

$$= \int_{\Xi} \left\{ \left(\boldsymbol{F}_i^{\top} \right)^{-1} \boldsymbol{\nabla}_{\xi} \hat{\varphi}_{(\alpha)} \right\} \cdot \left\{ \left(\boldsymbol{F}_i^{\top} \right)^{-1} \boldsymbol{\nabla}_{\xi} \hat{\varphi}_{(\beta)} \right\} \omega_i \, \mathrm{d}\xi \tag{6.6.5}$$

を計算する必要がある．ただし，$\boldsymbol{F}_i$ は式 (6.6.4) で用いられた行列であり，$\omega_i = \det \boldsymbol{F}_i$ である．式 (6.6.5) の $\boldsymbol{F}_i$ と ω_i に対して次の結果が得られる．

補題 6.6.1 (アフィン写像の Jacobi 行列式)

$\mathcal{T}_h = \{\Omega_i\}_{i\in\mathcal{E}}$ を正則なアフィン同等有限要素分割とする．ただし，規準領域 Ξ を式 (6.6.3) として，アフィン写像 $\boldsymbol{f}_i$ を式 (6.6.4) とする．$\operatorname{diam}\Omega_i = h_i$ とおく．このとき，

$$\omega_i = \det \boldsymbol{F}_i \leq h_i^d, \quad \omega_i^{-1} = \det(\boldsymbol{F}_i)^{-1} \leq c_1 h_i^{-d} \tag{6.6.6}$$

が成り立つ．また，$\boldsymbol{F}_i = (a_{ijk})_{jk} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{N}_i|\times|\mathcal{N}_i|}$ および $\boldsymbol{F}_i^{-1} = \left(a_{ijk}^{-1}\right)_{jk} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{N}_i|\times|\mathcal{N}_i|}$ に対して

$$|a_{ijk}| \leq h_i, \quad \left|a_{ijk}^{-1}\right| \leq c_2 h_i^{-1} \tag{6.6.7}$$

が成り立つ．ただし，c_1 と c_2 は式 (6.6.1) の σ と d に依存した正定数である．

証明　アフィン同等有限要素分割の有限要素であれば ω_i は定数となる．Ξ が式 (6.6.3) のとき $0 < |\Xi| \leq 1$ である．$\mathcal{T}_h$ は正則なので，

$$\frac{1}{c_1} h_i^d \leq \omega_i = \frac{\int_{\Xi} \omega_i \, \mathrm{d}\xi}{\int_{\Xi} \mathrm{d}\xi} = \frac{|\Omega_i|}{|\Xi|} \leq h_i^d,$$

すなわち，式 (6.6.6) が成り立つ．また，式 (6.6.4) の $\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{\xi})$ を $(f_{ij}(\boldsymbol{\xi}))_j$ とかけば，$\operatorname{diam}\Omega_i = h_i$ より，

$$|a_{ijk}| = \left| \frac{\partial f_{ij}}{\partial \xi_k} \right| \leq h_i$$

を得る．さらに，

$$\omega_i^{-1} = \det\left(\frac{\partial f_{ij}^{-1}}{\partial x_k}\right)_{jk} \leq \frac{c_1}{h_i^d}$$

より

$$\left|a_{ijk}^{-1}\right| = \left|\frac{\partial f_{ij}^{-1}}{\partial x_k}\right| \leq \frac{c_2}{h_i}$$

を得る．すなわち，式 (6.6.7) が成り立つ． □

§6.6.3 補間誤差評価

6.6.2 項では規準要素と有限要素の関係に注意がむけられた．ここでは，近似関数の近似能力に注目しよう．定理 6.1.13 では，厳密解の属する Hilbert 空間 U のノルムで計った有限要素解の誤差 $\|u - u_h\|_U$ は，同次基本境界条件 $(u_{\mathrm{D}} = 0)$ のとき，$\inf_{v_h \in U_h} \|u - v_h\|_U$ で抑えられることをみた．ここでは，有限要素解よりも誤差が大きいかもしれないが，誤差評価のしやすい近似関数をつくって，それの近似能力を評価することを考える．もしも，そのような近似関数の誤差が評価されたならば，有限要素解の誤差はそれよりも小さいことから (定理 6.1.13)，有限要素解の誤差はその誤差を使って評価されることになる．そのことを 6.6.4 項で示す．

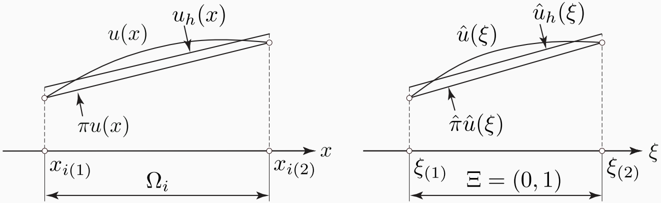
本項では，そのための準備として，誤差評価のしやすい近似関数について考えることにしよう．そのような近似関数は，U_h の要素で，節点において厳密解と一致するような関数であると仮定する．そのような近似関数を補間関数とよぶことにする．図 6.39 (a) に 1 次元問題に対して基底関数が 1 次関数で与えられたときの厳密解 u，有限要素解 u_h および補間関数 πu の関係を示している．図 6.39 (b) には規準要素上で定義されたそれらの関数を示している．ただし，π と $\hat{\pi}$ は，補間作用素とよばれ，次のように定義される．Ω_i 上の厳密解の関数空間を $U\left(\Omega_i\right)$ とかくことにする．また，基底関数 $\varphi_{i(\alpha)}$ $(\alpha \in \mathcal{N}_i)$ によって張られた補間関数の関数空間 (線形空間) を $W\left(\Omega_i\right) = \operatorname{span}\left(\varphi_{i(\alpha)}\right)_{\alpha \in \mathcal{N}_i}$ (定義 4.2.6) とかくことにする．一方，Ξ 上で定義された厳密解と補間関数に対する関数空間をそれぞれ $U\left(\Xi\right)$ および

$W\left(\Xi\right)=\operatorname{span}\left(\hat{\varphi}_{(\alpha)}\right)_{\alpha\in\mathcal{N}_i}$ とかくことにする．このとき，作用素 $\pi:U\left(\Omega_i\right)\to W\left(\Omega_i\right)$ と $\hat{\pi}:U\left(\Xi\right)\to W\left(\Xi\right)$ を

$$\pi u\left(\boldsymbol{x}\right)=\sum_{\alpha\in\mathcal{N}_i}u\left(\boldsymbol{x}_{i(\alpha)}\right)\varphi_{i(\alpha)}\left(\boldsymbol{x}\right), \tag{6.6.8}$$

$$\hat{\pi}\hat{u}\left(\boldsymbol{\xi}\right)=\sum_{\alpha\in\mathcal{N}_i}\hat{u}\left(\boldsymbol{\xi}_{(\alpha)}\right)\hat{\varphi}_{(\alpha)}\left(\boldsymbol{\xi}\right) \tag{6.6.9}$$

によって定義する．



(a) Ω_i 上の補間関数 πu　　(b) Ξ 上の補間関数 $\hat{\pi}\hat{u}$

図 6.39: 補間関数と有限要素解

このような補間関数の誤差 $\|u - \pi u\|_U$ すなわち $\|u - \pi u\|_{H^1(\Omega;\mathbb{R})}$ を補間誤差とよぶ．これを評価するために，まず，k 次多項式全体の集合を定義して，それによる一般的な近似能力に関する結果をみておこう．$k \in \{0, 1, \ldots\}$ として，有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 上で定義された k 次多項式全体 (完全 k 次多項式) の集合を

$$\mathcal{P}_k(\Omega) = \left\{ \sum_{|\boldsymbol{\beta}| \leq k} c_{\boldsymbol{\beta}} x_1^{\beta_1} \cdots x_d^{\beta_d} \;\middle|\; c_{\boldsymbol{\beta}} \in \mathbb{R},\; \boldsymbol{\beta} \in \{0, 1, \ldots, k\}^d,\; \boldsymbol{x} \in \Omega \right\}$$

とかくことにする．$\boldsymbol{\beta}$ は多重指数である．このとき，次の結果が得られる (たとえば，[1, Theorem 14.1, p. 120], [6, 補題 2.8, p. 60])．

定理 6.6.2 (k 次多項式全体の集合による近似能力)

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を区分的に滑らかな境界をもつ有界領域，$p \in [1, \infty]$ および $k \in \{0, 1, \ldots\}$ とする．このとき，任意の $v \in W^{k+1,p}(\Omega; \mathbb{R})$ に対して

$$\inf_{\phi \in \mathcal{P}_k(\Omega)} \|v - \phi\|_{W^{k+1,p}(\Omega;\mathbb{R})} \leq c\, |v|_{W^{k+1,p}(\Omega;\mathbb{R})} \tag{6.6.10}$$

が成り立つ．ただし，c は Ω と k に依存した正の実数である．

定理 6.6.2 に基づけば，有限要素 $i \in \mathcal{E}$ の領域 Ω_i 上の補間関数について，次の結果が得られる (たとえば，[1, Theorem 16.1, p. 126])．

定理 6.6.3 (有限要素上の補間誤差)

$\{\mathcal{T}_h\}_{h\to 0}$ を $d \in \{1,2,3\}$ 次元の多面体有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ に対する正則な有限要素分割列として，$\mathcal{T}_h = \{\Omega_i\}_{i\in\mathcal{E}}$ をその要素とする．$\alpha \in \mathcal{N}_i$ に対して $\hat{\varphi}_{(\alpha)}$ を規準領域 Ξ 上で定義された基底関数として，$W(\Xi) = \mathrm{span}\left(\hat{\varphi}_{(\alpha)}\right)_{\alpha\in\mathcal{N}_i}$ を補間関数の関数空間とする．$p \in [1,\infty]$ と $k, l \in \{0,1,\ldots\}$ は

$$k+1 > \frac{d}{p}, \quad k+1 \geq l \tag{6.6.11}$$

のもとで

$$\mathcal{P}_k(\Xi) \subset W(\Xi) \subset W^{l,p}(\Xi;\mathbb{R}) \tag{6.6.12}$$

定理 6.6.3 (有限要素上の補間誤差)

を満たすと仮定する．π を式 (6.6.8) の補間作用素とする．このとき，任意の $v \in W^{k+1,p}(\Omega;\mathbb{R})$ に対して Ω_i の直径 h_i に依存しない正定数 c が存在して，

$$|v - \pi v|_{W^{l,p}(\Omega_i;\mathbb{R})} \le c h_i^{k+1-l} |v|_{W^{k+1,p}(\Omega_i;\mathbb{R})}$$

が成り立つ．

定理 6.6.3 の結果を用いれば，領域 Ω 上の補間誤差について次の結果を得る ([1, Theorem 16.2, p. 128], [6, 定理 2.8, p. 62] ただし $p = 2$ とおかれている)．

系 6.6.4 (領域上の補間誤差)

定理 6.6.3 の仮定のもとで，$l \in \{1, 2, \ldots\}$ とする．Ω 上で定義された基底関数 $\phi = (\phi_j)_{j \in \mathcal{N}}$ は連続とする．π を式 (6.6.8) の補間作用素とする．このとき，任意の $v \in W^{k+1,p}(\Omega; \mathbb{R})$ に対して最大直径 h に依存しない正定数 c が存在して，

$$|v - \pi v|_{W^{l,p}(\Omega;\mathbb{R})} \leq c h^{k+1-l} |v|_{W^{k+1,p}(\Omega;\mathbb{R})}$$

が成り立つ．

定理 6.6.3 や 系 6.6.4 のように，有限要素の直径に対するオーダーで誤差を評価することを**誤差のオーダー評価**という．

有限要素法の基底関数を使って作成された補間関数の誤差評価は，系 6.6.4 において厳密解を $v \in W^{k+1,p}(\Omega; \mathbb{R})$ とおいたときの結果によって与えられたことになる．一方，定理 6.1.13 は，Galerkin 法の近似解 (有限要素解) の基本誤差 $u - u_h$ を $U = H^1(\Omega; \mathbb{R})$ ノルムで測ったときの結果を示している．そこで，有限要素解の誤差は，系 6.6.4 において $p = 2$ および $l = 1$ とおいたときの結果を用いることで得られることになる．

$H^1(\Omega; \mathbb{R})$ ノルムで測ったときの誤差評価は次のようになる (たとえば，[1, Theorem 18.1, p. 138], [6, 定理 2.9, p. 64])．

定理 6.6.5 (H^1 ノルムによる有限要素解の誤差評価)

$\{\mathcal{T}_h\}_{h\to 0}$ を $d \in \{1,2,3\}$ 次元の多面体有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ に対する正則な有限要素分割列として，$\mathcal{T}_h = \{\Omega_i\}_{i\in\mathcal{E}}$ をその要素とする．$p=2$, $l=1$ および $k \in \{0,1,\ldots\}$ は式 (6.6.11) と式 (6.6.12) を満たすとする．Ω 上で定義された基底関数 $\boldsymbol{\phi} = (\phi_j)_{j\in\mathcal{N}}$ は連続とする．有限要素法における近似解の集合を

$$U_h = \left\{ v_h(\bar{\boldsymbol{v}}) = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{\phi} \;\middle|\; \bar{\boldsymbol{v}} = (\bar{v}_j)_{j\in\mathcal{N}} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{N}|} \right\} \tag{6.6.13}$$

とおく．$\{u_h\}_{h\to 0}$ $(u_h \in U_h)$ を同次基本境界条件 $(u_{\mathrm{D}} = 0)$ のときの問題 6.1.6 に対する有限要素解の列とする．このとき，厳密解が $u \in U \cap H^{k+1}(\Omega;\mathbb{R})$ であれば，h に依存しない正定数 c が存在して，

定理 6.6.5 (H^1 ノルムによる有限要素解の誤差評価)

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega;\mathbb{R})} \leq ch^k |u|_{H^{k+1}(\Omega;\mathbb{R})}$$

が成り立つ．

さらに，誤差 $u - u_h$ を $L^2(\Omega;\mathbb{R})$ ノルムで測った場合の結果は，Aubin-Nitsche のトリックとよばれる方法によって次のように得られる (たとえば，[1, Theorem 19.2, p. 142], [6, 定理 2.11, p. 66] ただし Ω を 2 次元凸多角形領域と仮定している)．

定理 6.6.6 (L^2 ノルムによる有限要素解の誤差評価)

$\{\mathcal{T}_h\}_{h\to 0}$ を $d \in \{1,2,3\}$ 次元の多面体有界領域 Ω に対する正則な有限要素分割列として，$\mathcal{T}_h = \{\Omega_i\}_{i\in\mathcal{E}}$ をその要素とする．$p=2$, $l=1$, $d \le 3$ および $k \ge 1$ のもとで式 (6.6.12) を満たすとする．Ω 上で定義された基底関数 $\boldsymbol{\phi} = (\phi_j)_{j\in\mathcal{N}}$ は連続とする．有限要素法における近似解の集合 U_h を式 (6.6.13) とおく．$\{u_h\}_{h\to 0}$ $(u_h \in U_h)$ を同次基本境界条件 $(u_{\mathrm{D}} = 0)$ のときの問題 6.1.6 に対する有限要素解の列とする．このとき，厳密解が $u \in U \cap H^{k+1}(\Omega;\mathbb{R})$ であれば，h に依存しない正定数 c が存在して，

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R})} \le c h^{k+1} |u|_{H^{k+1}(\Omega;\mathbb{R})}$$

が成り立つ．

以上の結果を使って，有限要素解の誤差評価をおこなってみよう．厳密解の正則性については 5.3 節でみた結果を用いることができる．まず，厳密解の滑らかさ (正則性) が既知関数の滑らかさに依存して決められる場合は，次のような結果になる．

例題 6.6.7 (既知関数の正則性に対する有限要素解の誤差評価)

問題 6.1.6 において，Dirichlet 境界と Neumann 境界の境界で開き角が $\alpha < \pi/2$ で，それ以外の境界は滑らかであるとする．$b \in L^2(\Omega; \mathbb{R})$ および $p_{\mathrm{N}} = 0$ とする．このとき，有限要素解に対する誤差のオーダー評価を示せ．

解答　$b \in L^2(\Omega; \mathbb{R})$ のとき，$-\Delta u = b$ より，厳密解 u に対して $|u|_{H^2(\Omega;\mathbb{R})} \leq c_0 \|b\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R})}$ が成り立つ．したがって，定理 6.6.5 と定理 6.6.6 において $k = 1$ とおくとき，有限要素解 u_h に対して

$$
\begin{aligned}
\|u - u_h\|_{H^1(\Omega;\mathbb{R})} &\leq c_1 h |u|_{H^2(\Omega;\mathbb{R})}, \\
\|u - u_h\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R})} &\leq c_1 h^2 |u|_{H^2(\Omega;\mathbb{R})}
\end{aligned}
$$

を得る．　□

次に，滑らかでない境界をもつ 2 次元領域の場合を考えよう．

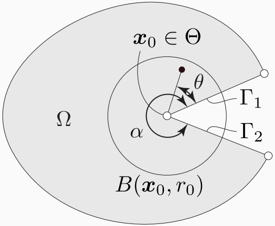
例題 6.6.8 (滑らかでない境界に対する有限要素解の誤差評価)

問題 6.1.6 において，Ω を図 5.2 のような角点 x_0 をもつ 2 次元領域とする．x_0 近傍における有限要素解の誤差評価について考察せよ．

解答　特異性が現れるのは，Γ_1 と Γ_2 が同一種境界で開き角が $\alpha > \pi$ (凹角) になるときと，混合境界で開き角が $\alpha > \pi/2$ になるときである．たとえば，同一種境界でき裂 $(\alpha = 2\pi)$ の場合と混合境界で直線 $(\alpha = \pi)$ の場合には，式 (5.3.10) より，角点の r_0 近傍で $\epsilon > 0$ に対して

$$u \in H^{3/2-\epsilon}\left(B\left(\boldsymbol{x}_0, r_0\right) \cap \Omega; \mathbb{R}\right)$$

となる．一方，有限要素解に対する誤差のオーダー評価は式 (6.6.11) より，$d \in \{2, 3\}$ および $p = 2$ に対して $k + 1 = 2 > d/p$ を満たさなければならない．すなわち，厳密解が $H^2(\Omega; \mathbb{R})$ でなければ適用できないことになる．そこで，角点近傍の有限要素解については，誤差のオーダー評価はできないことになる． □



角をもつ 2 次元領域 (第 5 章の図と同じ)

例題 6.6.8 に基づけば，特異点近傍の有限要素解に対しては誤差のオーダー評価はできなかった．しかし，厳密解への収束に関しては，$U \cap H^{k+1}(\Omega; \mathbb{R})$ は U で稠密であることに基づいて，次の結果が得られる (たとえば，[2, 定理 5.4, p. 100])．

定理 6.6.9 (有限要素解の H^1 ノルムでの収束)

定理 6.6.5 と同じ表記を用いる．$\{u_h\}_{h\to 0}$ $(u_h \in U_h)$ を同次基本境界条件 $(u_{\mathrm{D}} = 0)$ のときの問題 6.1.6 に対する有限要素解の列とする．このとき，厳密解 $u \in U$ に対して，

$$\lim_{h\to 0} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega;\mathbb{R})} = 0$$

が成り立つ．

さらに，特異点近傍の有限要素解に関しては，厳密解を表現できるように工夫された有限要素も考えられている．たとえば，5.3 節でみたような特異点近傍の r に対するべき級数展開を近似することのできる基底関数に加える方法などが開発されている (たとえば，[4, 8 章, p. 273], [7])．

6.7 第6章のまとめ

第 6 章では，偏微分方程式の境界値問題に対する数値解法を，Galerkin 法を指導原理とした有限要素法とそれによる数値解の誤差評価をとおしてみてきた．要点は以下のようである．

1. Galerkin 法は，基底関数に未定乗数を乗じた線形結合で近似関数を構成し，それらの近似関数を弱形式に代入することで，偏微分方程式の境界値問題を未定乗数に関する連立 1 次方程式に変換する方法である (6.1 節)．
2. 有限要素法は Galerkin 法である．ただし，有限要素法では，領域を単純な形の領域の集合に分割して，それぞれの領域上で低次多項式となり，分割された領域の境界で連続となるよう基底関数を用いて近似関数が構成された (6.2 節, 6.3 節, 6.4 節)．

3. アイソパラメトリック有限要素法とは，有限要素領域を規準領域に写像して，有限要素上でおこなう積分を規準領域上でおこなう方法である．このとき，有限要素領域から規準領域への写像が，解に対する近似関数に用いられたものと同じ基底関数を用いることにする．矩形の規準領域上の数値積分には Gauss 求積が使われる (6.5 節)．
4. 有限要素法による近似解の誤差ノルムは，有限要素の大きさのべき乗で抑えられる (6.6 節)．

6.8 第 6 章の演習問題

6.1 1 次元 2 階微分方程式の第 1 種境界値問題

$$-\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + u = 1 \quad \text{in } (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0$$

を満たす $u : (0,1) \to \mathbb{R}$ の近似解 u_h を Galerkin 法により求めよ．ただし，例題 6.1.5 と同じ基底関数を用いよ．

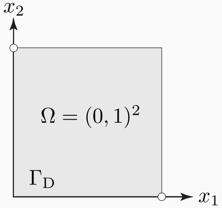
6.2 演習問題 **6.1** の境界値問題を，1 次の基底関数を用いた有限要素法によって解く場合の，連立 1 次方程式を求めよ．ただし，有限要素数 $m = 4$ とせよ．

6.3 3 角形有限要素 $i \in \mathcal{E}$ の三つの節点 $\boldsymbol{x}_{i(1)}$, $\boldsymbol{x}_{i(2)}$ および $\boldsymbol{x}_{i(3)}$ を反時計回りになるように選んだとき，式 (6.3.8) で定義された γ は，3 角形有限要素の領域 Ω_i の大きさ (面積) $|\Omega_i|$ の 2 倍に等しいことを示せ．

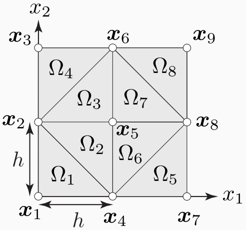
6.4 図 6.40 (a) のような領域 $\Omega = (0,1)^2$ および境界 $\Gamma_{\mathrm{D}} = \{\boldsymbol{x} \in \partial\Omega \mid x_1 = 0,\ x_2 = 0\}$ と $\Gamma_{\mathrm{N}} = \partial\Omega \setminus \bar{\Gamma}_{\mathrm{D}}$ に対して，

$$-\Delta u = 1 \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{N}}, \quad u = 0 \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{D}}$$

を満たす $u : \Omega \to \mathbb{R}$ を，図 6.40 (b) のような有限要素分割を用いた有限要素法によって求めよ．



(a) Ω と Γ_{D}



(b) 有限要素分割

図 6.40: 例題 6.3.2 の領域と有限要素分割

6.5 2 次元 Poisson 問題 (問題 6.1.7 において $d = 2$) に対して，図 6.26 の長方形 1 次要素を用いるとする．このとき，要素係数行列と要素既知項ベクトルを求めよ．ただし，$b = b_0$ を定数関数，$p = 0$ とする．

6.6 2 次元線形弾性問題において平面応力 $(\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0)$ を仮定したとき，4 節点アイソパラメトリック有限要素の要素係数行列の計算方法を，次の順に示せ．

- $\bar{\boldsymbol{u}}_i = (u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{21}, u_{22}, u_{23}, u_{24})^\top$ を有限要素 $i \in \mathcal{E}$ の節点変位とする．$\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\right) = \left(\varepsilon_{jl}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\right)_{jl}$ をひずみテンソルとして，$\boldsymbol{\varepsilon}\left(\boldsymbol{\xi}\right) = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12})^\top$ をそのベクトル表現とする．このとき，

$$\boldsymbol{\varepsilon}\left(\boldsymbol{\xi}\right) = \boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\bar{\boldsymbol{u}}_i$$

となる変位ひずみ行列 $\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{\xi}\right)$ の計算方法を示せ．

- $\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\right) = \left(\sigma_{jl}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\right)_{jl}$ を応力テンソルとして，$\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{\xi}\right) = \left(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\right)^{\top}$ をそのベクトル表現とする．平面応力 $(\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0)$ のとき，構成則は Young 率 e_{Y} と Poisson 比 ν_{P} を用いて

$$\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{\xi}\right) = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}\left(\boldsymbol{\xi}\right), \quad \boldsymbol{D} = \frac{e_{\mathrm{Y}}}{1 - \nu_{\mathrm{P}}^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu_{\mathrm{P}} & 0 \\ \nu_{\mathrm{P}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 - \nu_{\mathrm{P}}\right)/2 \end{pmatrix}$$

で与えられる．このとき，要素係数行列 $\bar{\boldsymbol{K}}_i$ の計算方法を示せ．

6.9 参考文献

[1] Ciarlet, P. G.
Finite Element Methods.
Handbook of Numerical Analysis, P.G. Ciarlet, J.L. Lions, general editors.
Elsevier, Amsterdam; Tokyo: North-Holl, 1991.

[2] 菊地文雄.
有限要素法の数理: 数学的基礎と誤差解析.
培風館, 東京, 1994.

[3] 菊地文雄.
有限要素法概説, 新訂版.
サイエンス社, 東京, 1999.

[4] Strang, G., Fix, G. J., 三好哲彦, 藤井宏訳.
有限要素法の理論.
培風館, 東京, 1976.

[5] 田端正久.
微分方程式の数値解法 II.
岩波講座応用数学. 岩波書店, 東京, 1994.

[6] 田端正久.
偏微分方程式の数値解析.
岩波書店, 東京, 2010.

[7] 田端正久, 藤井宏, 三好哲彦.
特異関数を用いる有限要素法.
bit, Vol. 5, pp. 1035–1040, 1973.