

最適設計特論 1 & 2

ガイダンス

畔上 秀幸

2021 年 4 月 16 日

名古屋大学 情報学研究科 複雑系科学専攻

1. はじめに

§1 生体の適応挙動に対するイメージ



図 1: 針葉樹と広葉樹のあて材

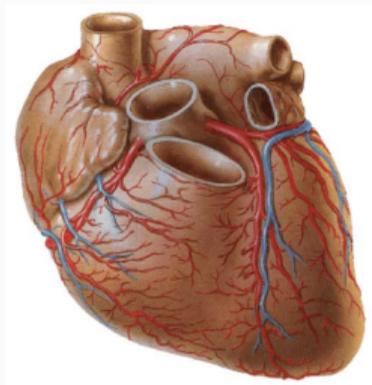
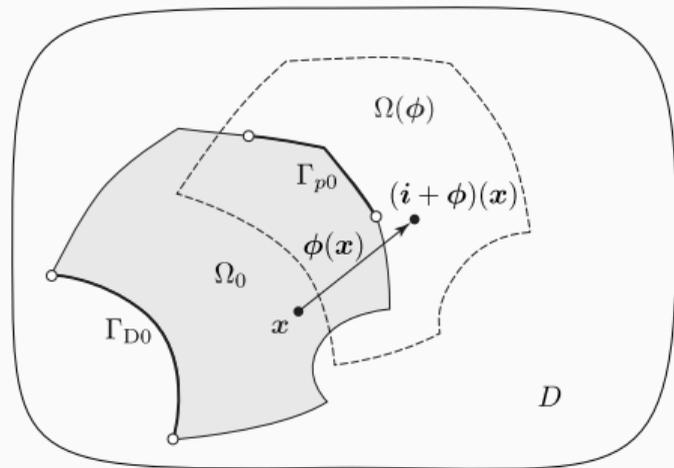
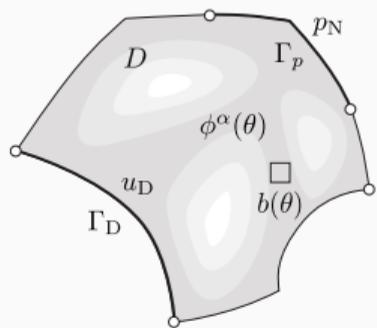


図 2: 心臓を取り巻く血管 [1]

本授業では，弾性体や流れ場などの連続体（無限自由度系）の適応現象に注目する．

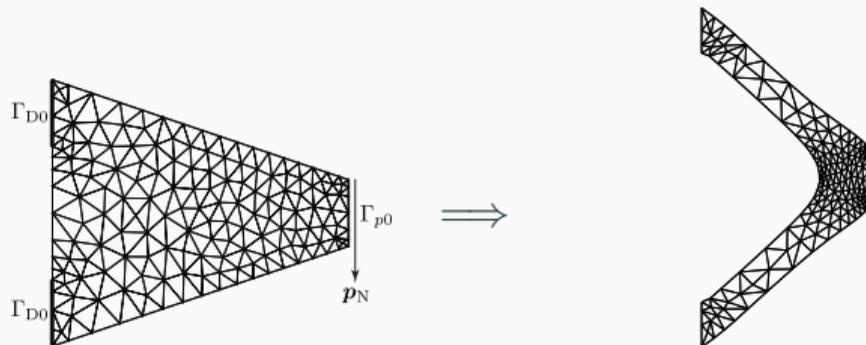
- 連続体の様々な現象は偏微分方程式の境界値問題でモデル化される．
- この境界値問題が定義された領域を設計対象にした最適化問題は，連続体の適応現象の数理的な表現となる．

§2 形状最適化問題



(a) 密度変動 $\phi(\theta)$, 設計変数 $\theta : D \rightarrow \mathbb{R}$ (b) 領域変動 (設計変数) $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^d$

図 3: $d \in \{2, 3\}$ 次元の領域 $D, \Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$ と設計変数

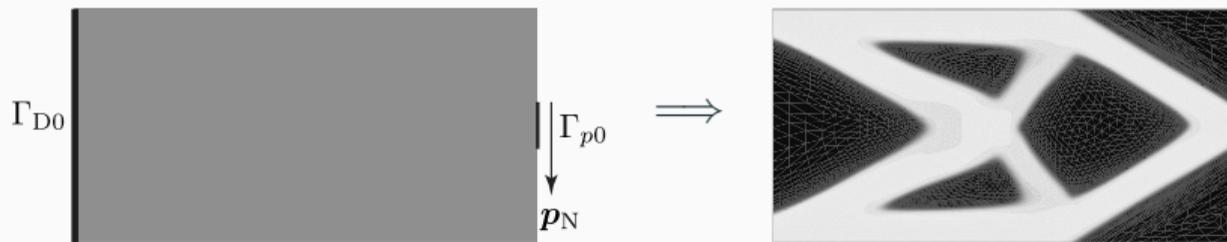


(a) 2次元線形弾性体の平均コンプライアンス最小化

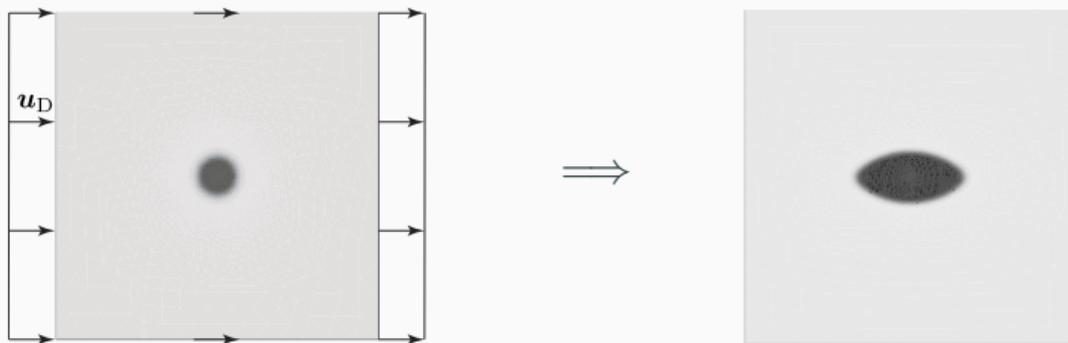


(b) 2次元 Stokes 流れ場の平均流れ抵抗最小化

図 4: 領域変動型の形状最適化問題



(a) 2次元線形弾性体の平均コンプライアンス最小化



(b) 2次元 Stokes 流れ場の平均流れ抵抗最小化

図 5: 密度変動型の位相最適化問題

プログラムのインストールと操作手順

講義資料 > ガイダンス > その他 におかれた ZIP ファイルを解答し、その中の README.pdf ファイルを参照してください。

§3 本授業の目標

偏微分方程式の境界値問題が定義された領域の形状を設計対象にした最適化問題を数値的に解くための理論と方法を理解する。

2. 実問題への応用

§1 音場構造連成問題の形状最適化 [2]

ギターが放射する音圧パワーを最大化したい。

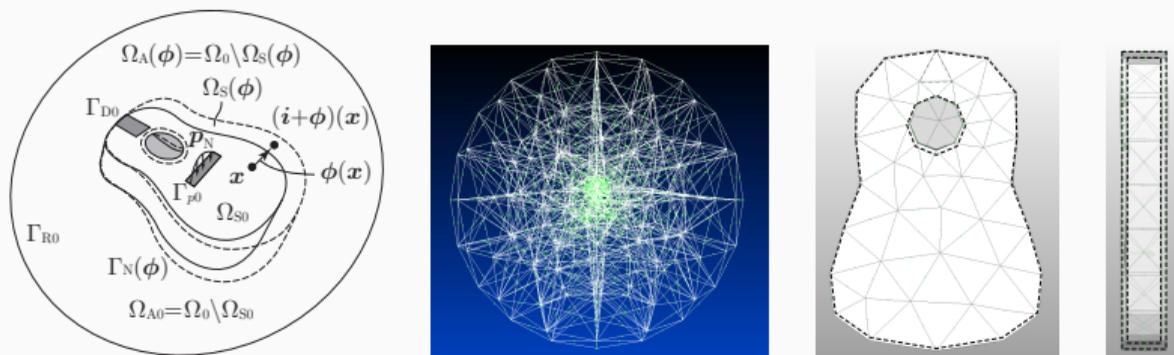
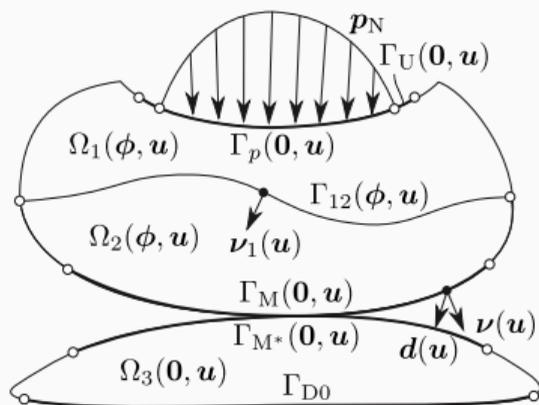


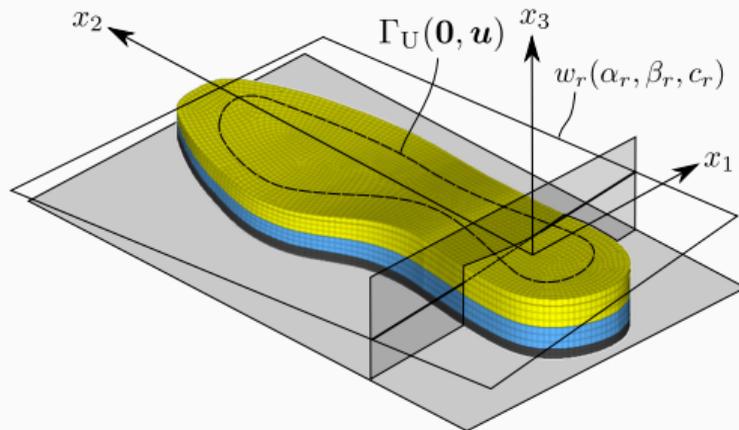
図 6: ギターの形状最適化

§2 スポーツシューズの最適設計 [3]

スポーツシューズのクッション性能を変えずに安定性を高めたい。



(a) 3つの超弾性体

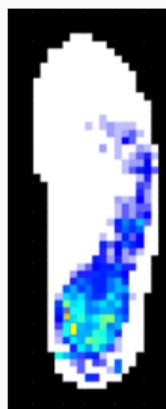


(b) ソールモデルと踵座標系

図 7: ソールの最適設計



Time t_C



Time t_S

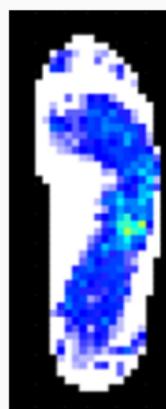
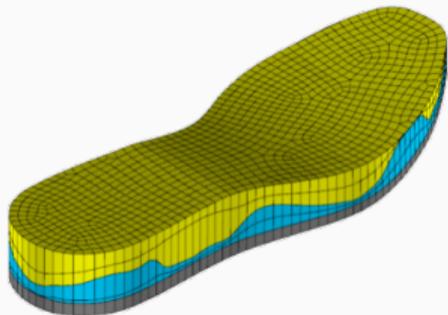
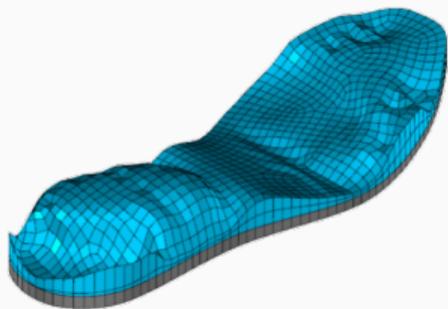


図 8: ランニング運動と圧力分布



(a) 全体形状



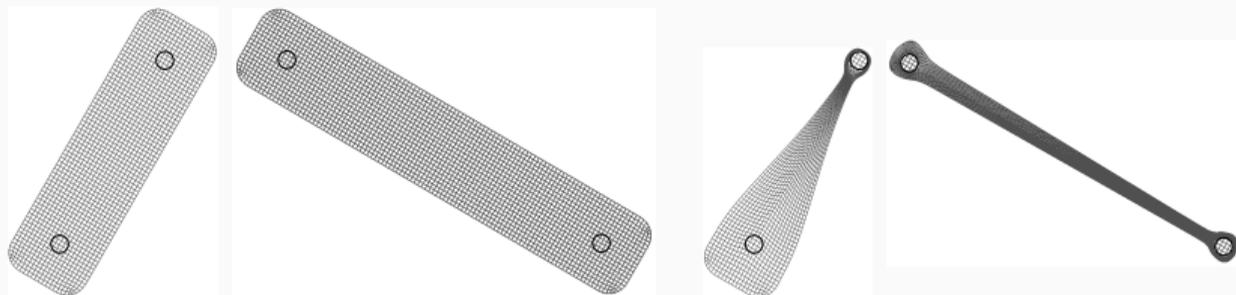
(b) 硬質材形状

GEL-KAYANO LITE (ASICS):
<https://www.asics.com/jp/ja-jp/gel-kayano-lite/p/1011A832-020.html?width=STANDARD>

図 9: 最適化されたソール形状

§3 リンク機構の形状最適化 [4]

駆動力による外力仕事を最大化したい。



(a) 初期形状

(b) 最適化後の形状

図 10: ピストンクランク機構の形状最適化

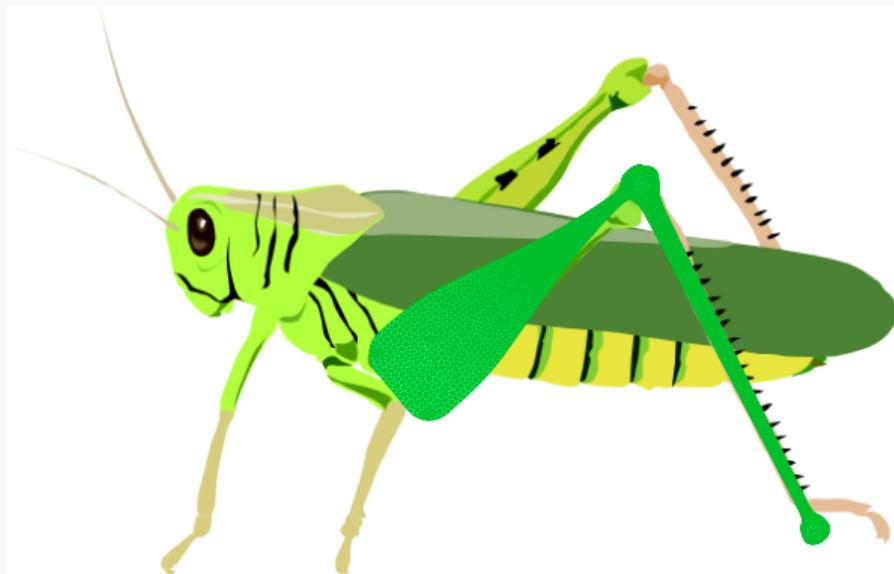


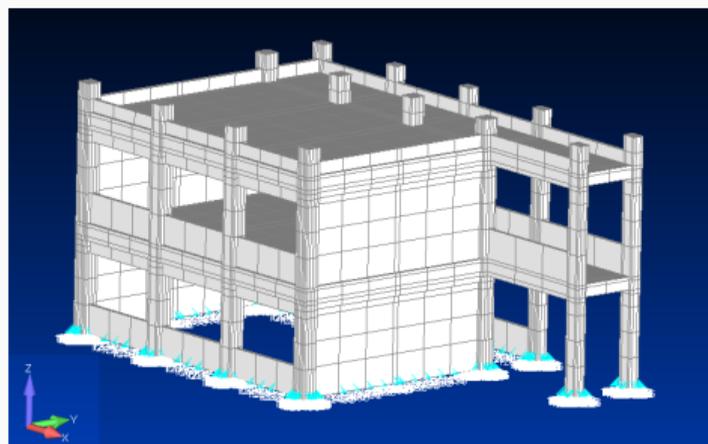
図 11: バッタの足？

§4 建物の欠陥同定 [5]

地震前後の建物の振動固有対を計測して、地震によって損傷を受けた個所を同定したい。

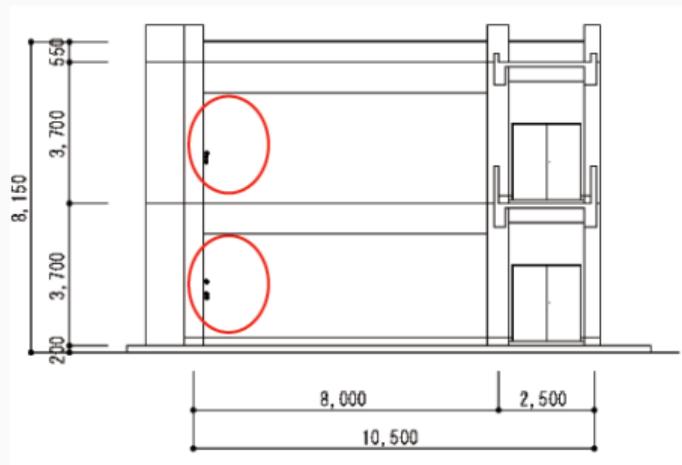


(a) 写真

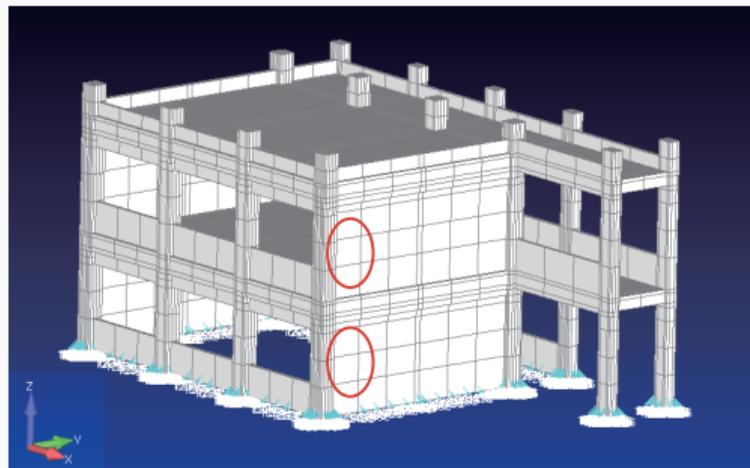


(b) 有限要素モデル

図 12: 実験に使われた建物



(a) 図面上 [m]



(b) 有限要素モデル上

図 13: 人工的に加えられた損傷の位置

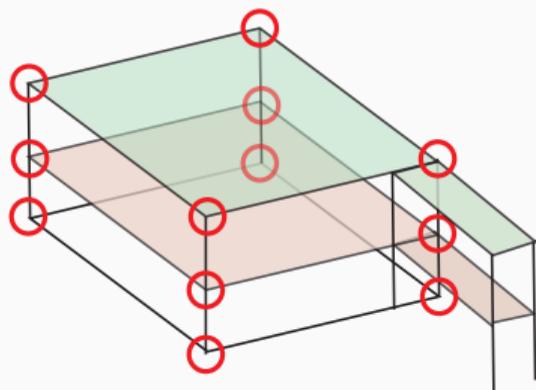


図 14: 常時微動の測定点

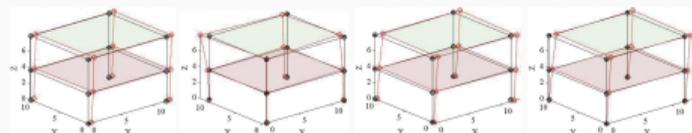
表 1: 測定された固有振動数

Mode	Pre [Hz]	Post [Hz]
1st	3.02	2.95
2nd	4.76	4.05
3rd	6.28	4.69
4th	7.41	6.11
5th	9.65	6.76
6th	10.10	7.39
7th	11.00	8.69
8th	11.30	9.50

設計変数: 剛性の健全率

状態決定: 固有振動問題

目的関数: 振動固有対の2乗誤差和

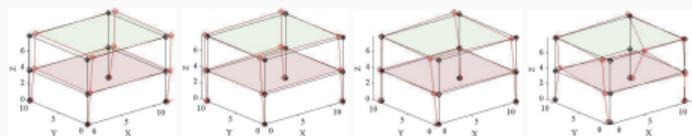


1st

2nd

3rd

4th



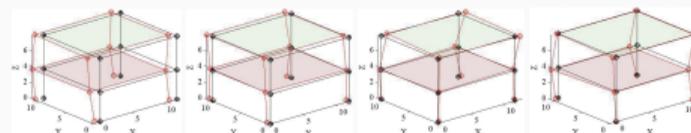
5th

6th

7th

8th

(a) 損傷前

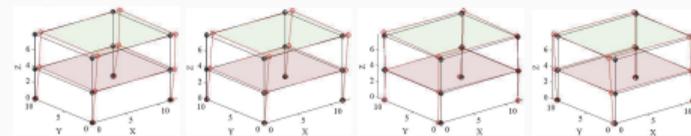


1st

2nd

3rd

4th



5th

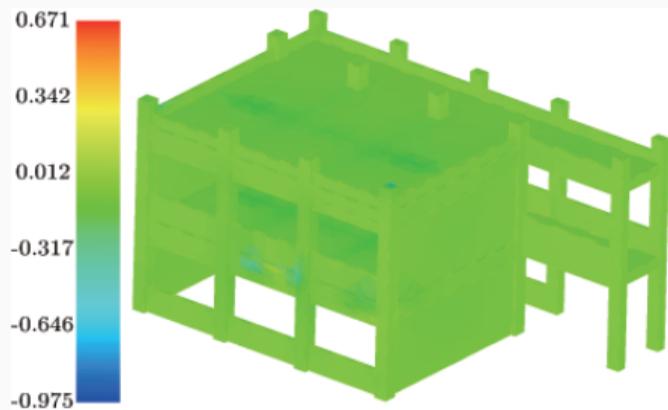
6th

7th

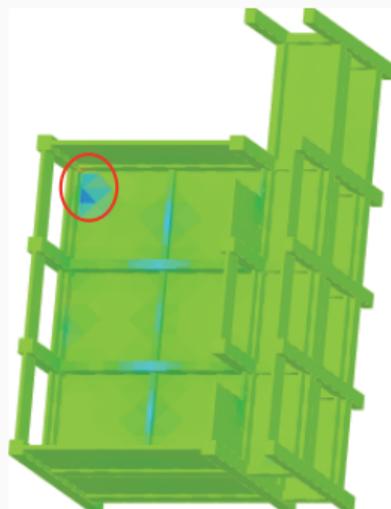
8th

(b) 損傷後

図 15: 測定された固有モード



(a) 正面



(b) 地上面

図 16: 実験結果から同定された健全率

§5 ブレーキ鳴き現象に対する形状最適化 [6]

ブレーキ鳴きは，クーロン摩擦がひずみエネルギー（変位の双1次形式）を非対称になったときに発生するある種の自励振動である．

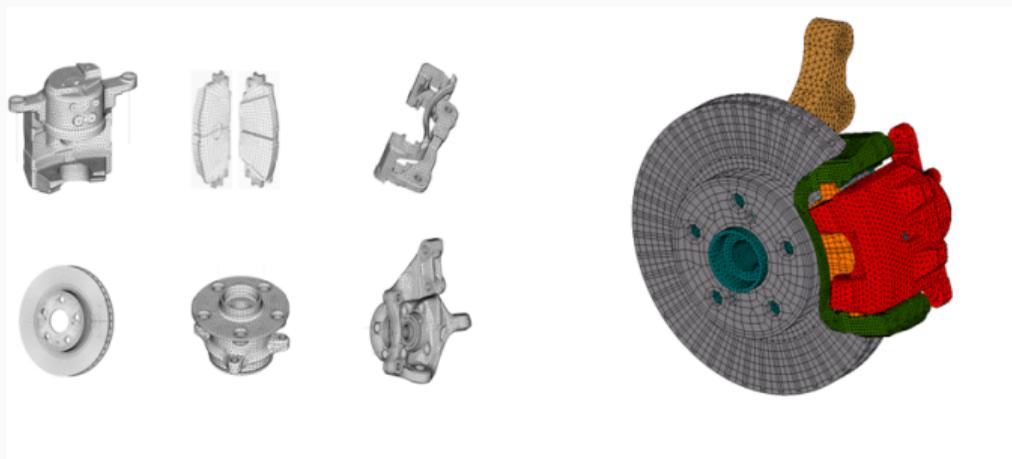
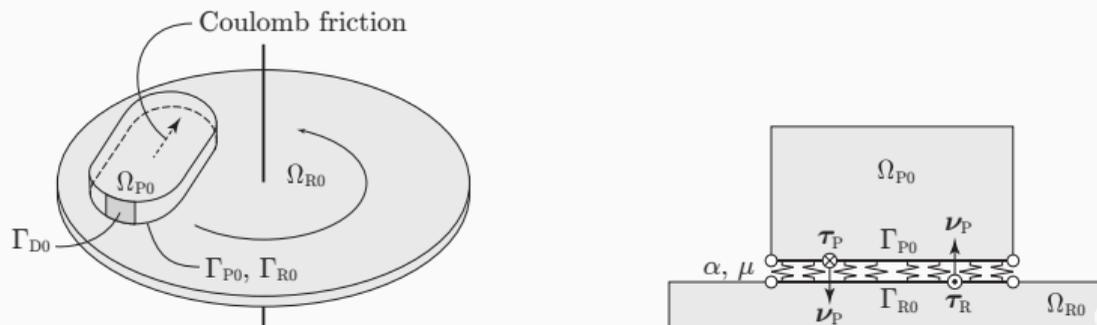


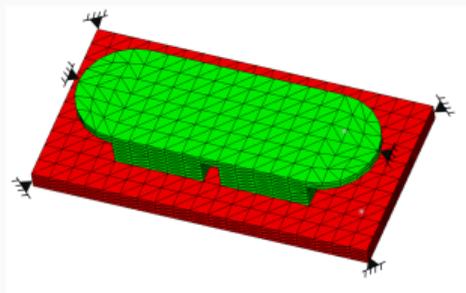
図 17: 車両のブレーキ部品

複素固有値の実部を最小化したい。

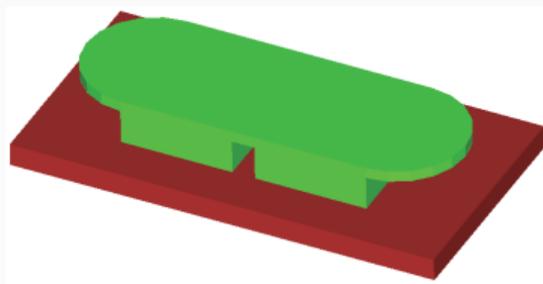


(a) ロータとパッドの領域 Ω_{R0} と Ω_{P0} (b) 摩擦境界 Γ_{R0} と Γ_{P0}

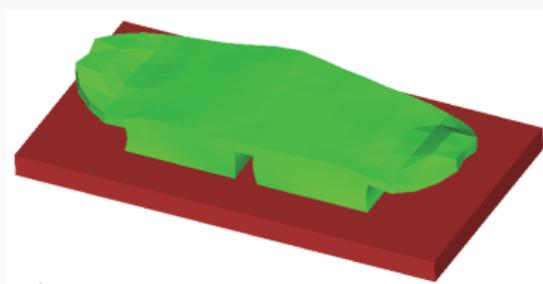
図 18: ブレーキモデル [7]



有限要素モデル



(a) 初期形状

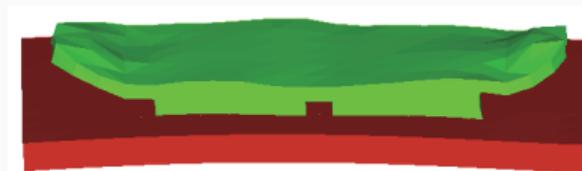
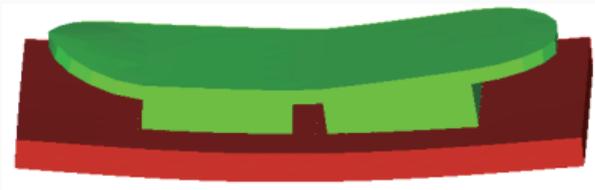
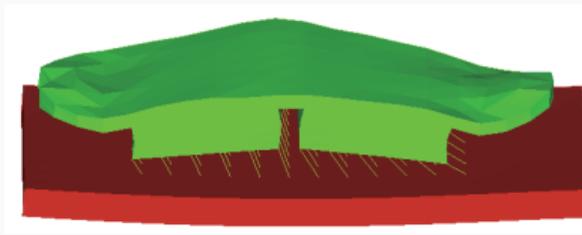
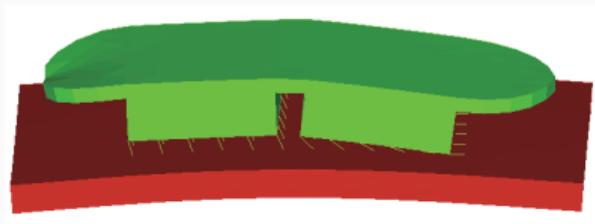


(b) 最適化後の形状

図 19: 形状比較

表 2: 複素固有値の変化

初期形状			最適形状		
k	Re	Im	k	Re	Im
1	-1.692E+01	8.022947E+03	1	-1.647E+01	7.745197E+03
2	-1.444E+01	9.438261E+03	2	-1.765E+01	1.027973E+04
3	8.613E+00	1.249724E+04	3	-1.163E+01	1.110440E+04
4	-2.944E+01	1.437360E+04	4	-3.048E+01	1.503565E+04
5	-5.783E+01	1.629984E+04	5	-4.185E+01	2.092213E+04
6	-5.356E+01	2.168113E+04	6	-5.070E+01	2.186379E+04
7	-5.195E+01	2.394771E+04	7	-6.588E+01	2.671747E+04
8	-6.593E+01	2.573753E+04	8	-7.522E+01	2.756015E+04
9	-6.325E+01	2.711726E+04	9	-7.540E+01	3.137934E+04
10	-6.896E+01	2.893466E+04	10	-7.658E+01	3.320161E+04



(a) 初期形状

(b) 最適形状

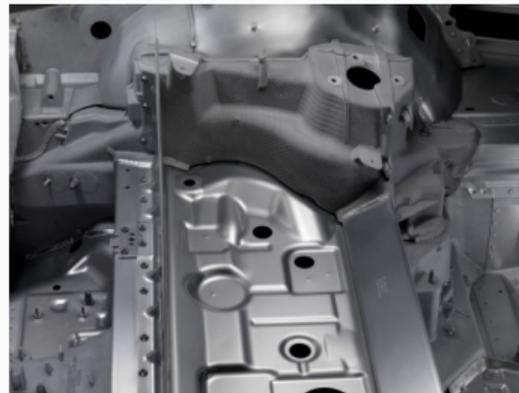
図 20: 3次固有振動モードの比較

§6 シェル構造におけるビードの形状最適化 [6]

シェル構造に設けられた小さな高さの凸凹は**ビード**とよばれる。

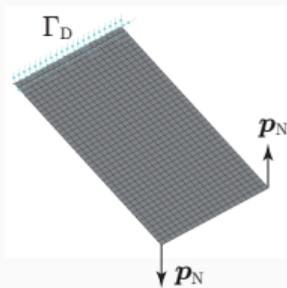


(a) 自動車のホワイトボディ

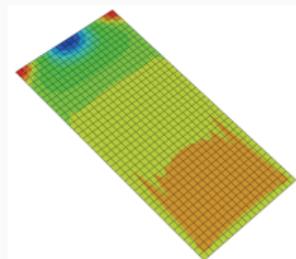


(b) ビード構造

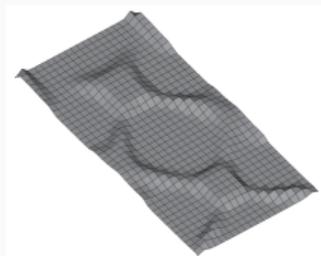
図 21: ビード付きのシェルモデル



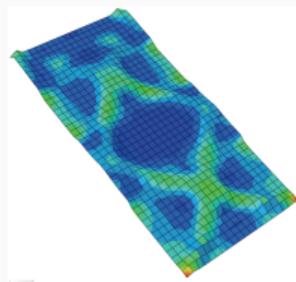
(a) 境界条件



(b) 初期形状の Mises 応力



(c) 最適形状



(d) 最適形状の Mises 応力

図 23: ねじり荷重をうける片持ちシェルの形状最適化結果

§7 流れ場の安定性向上のための形状最適化問題 [8, 9]

Navier-Stokes 流れ場において、**臨界 Reynolds 数** (複素固有値の実部) を最大化したい。

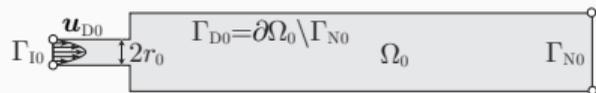


図 24: 拡大管

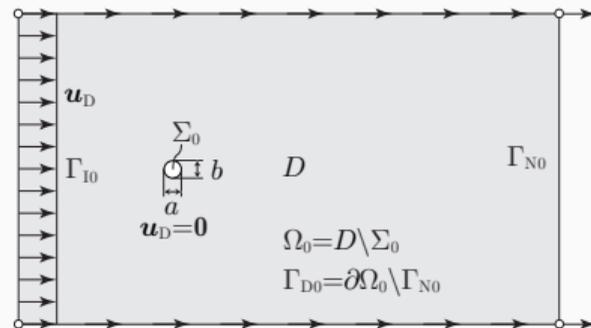
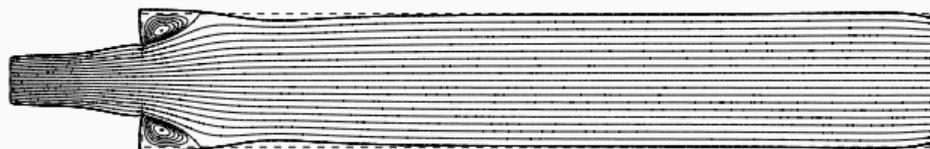
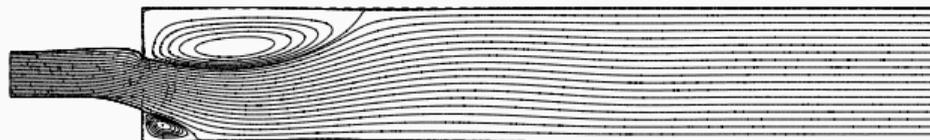


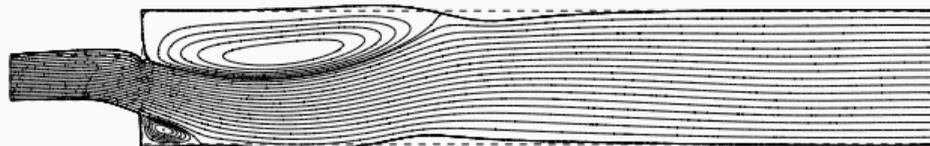
図 25: 孤立物体まわりの流れ場



(a) $Re = 15$



(b) $Re = 30$



(c) $Re = 40$

図 26: 拡大管: 最適化後の形状と流線

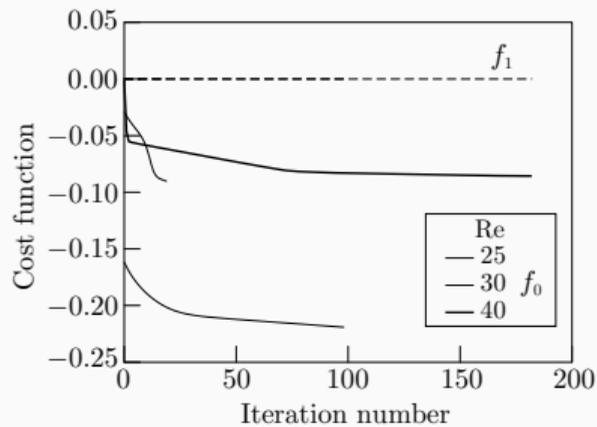


図 27: 拡大管: 評価関数の収束履歴

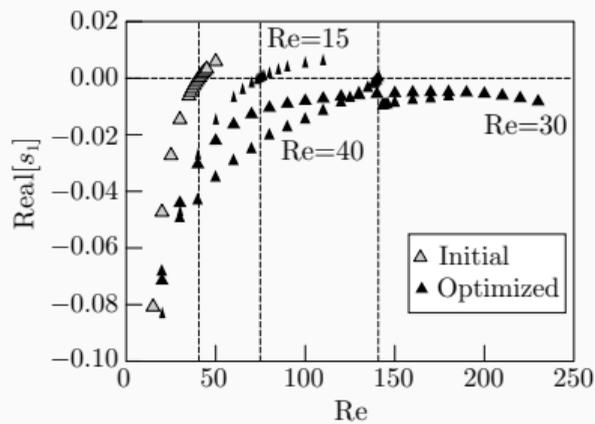
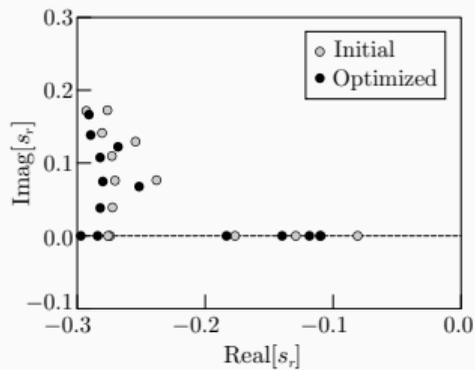
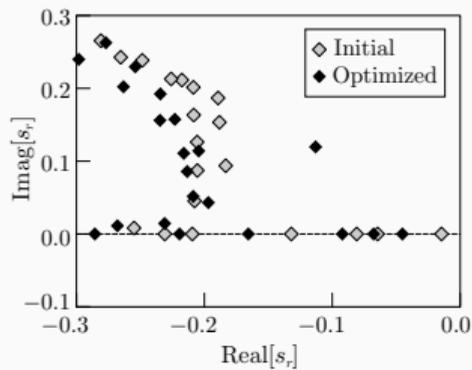


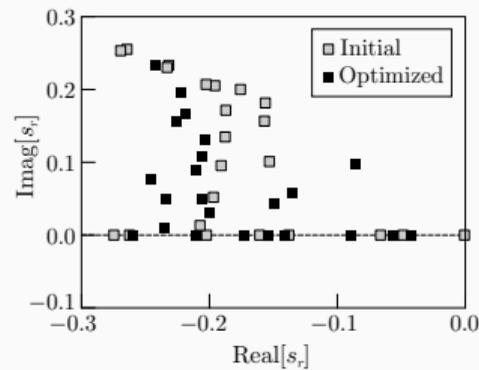
図 28: 拡大管: 流速に対する $\text{Real}[s_1]$



(a) $\text{Re} = 15$

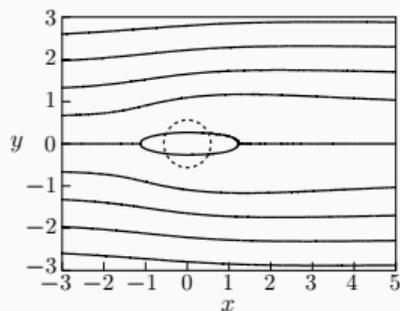


(b) $\text{Re} = 30$

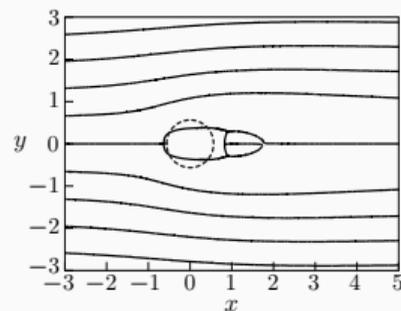


(c) $\text{Re} = 40$

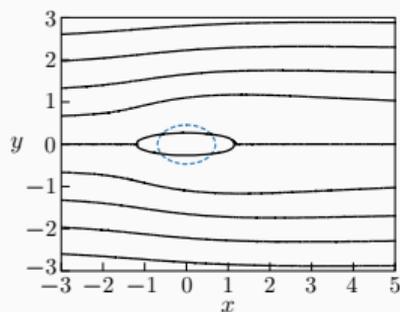
図 29: 拡大管: かく乱固有値 s_r の分布



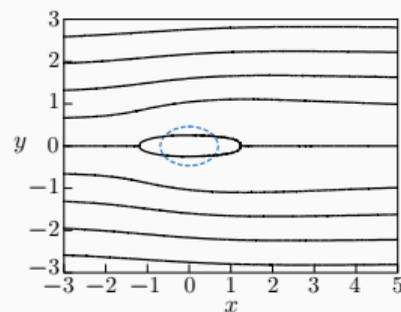
(a) $Re = 25$ ($a/b = 1.0$)



(b) $Re = 40$ ($a/b = 1.0$)



(c) $Re = 25$ ($a/b = 1.5$)



(d) $Re = 40$ ($a/b = 1.5$)

図 30: 孤立物体: 最適化後の形状と流線

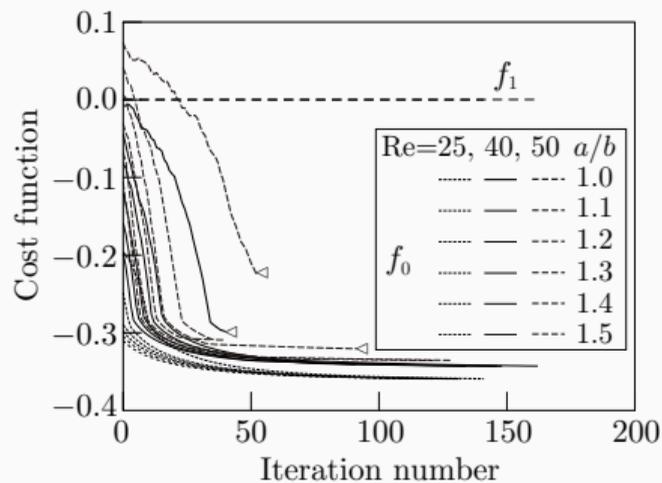


図 31: 孤立物体: 評価関数の収束履歴

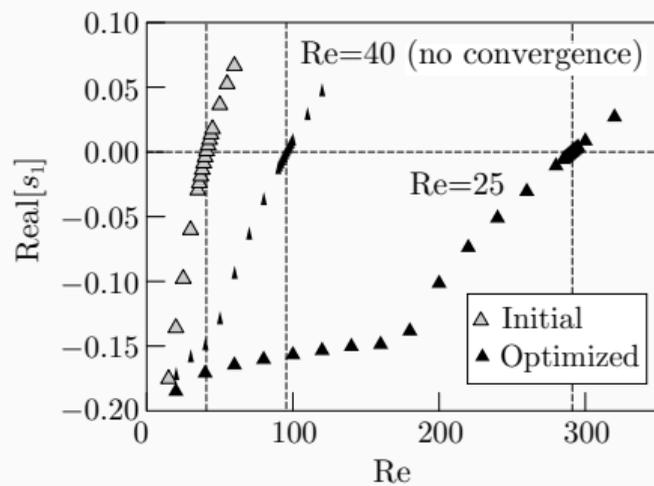
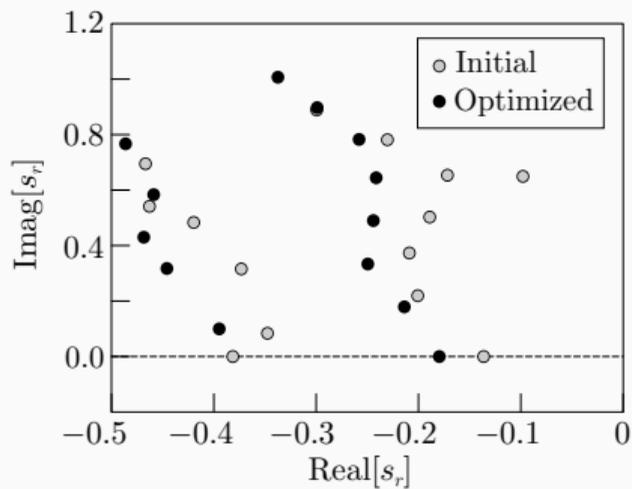
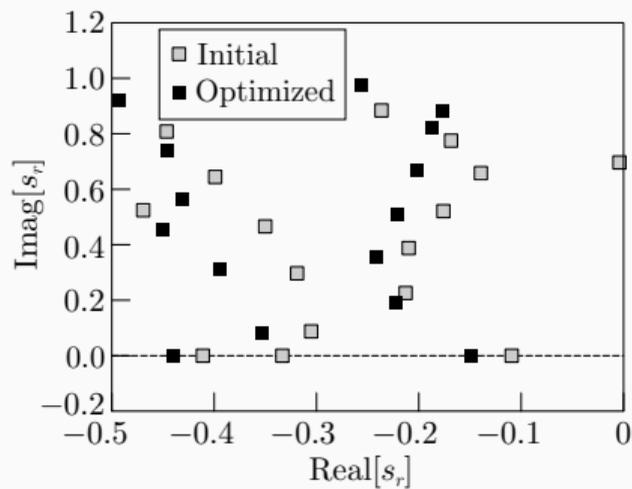


図 32: 孤立物体: 流速に対する
Real $[s_1]$



(a) $\text{Re} = 25$



(b) $\text{Re} = 40$

図 33: 孤立物体: かく乱固有値 s_r の分布

§8 静電タッチセンサの形状最適化 [10]

指の検出感度を最大にしたい。



図 34: 静電タッチセンサ

状態決定: 検出体のある静電場とない静電場

目的/制約関数: 電場差の H^1 ノルム/検出電極の体積

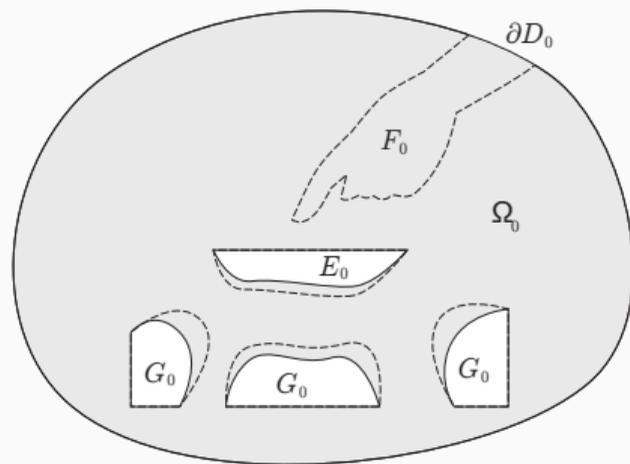
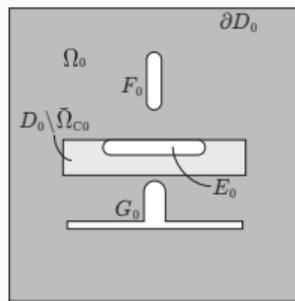
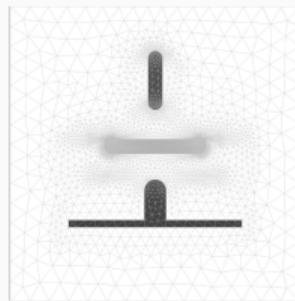


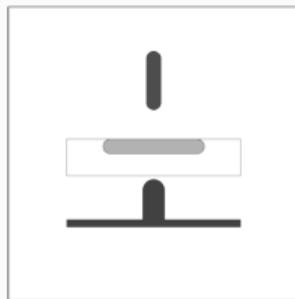
図 35: 初期静電場 $\Omega_0 = D_0 \setminus (\bar{E}_0 \cup \bar{G}_0)$



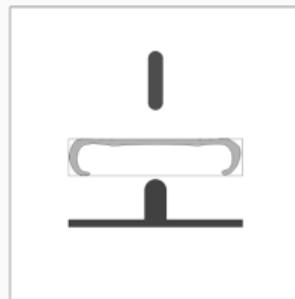
(a) 問題設定



(b) 有限要素モデル

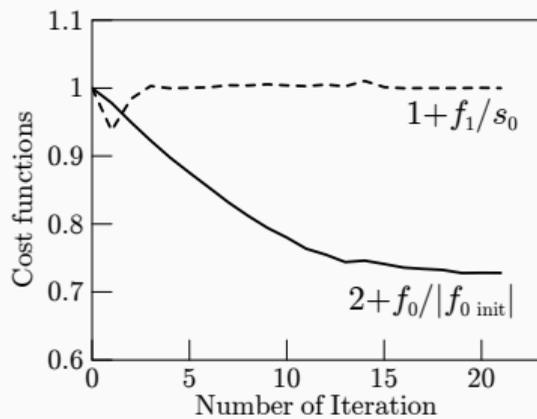


(c) 初期形状

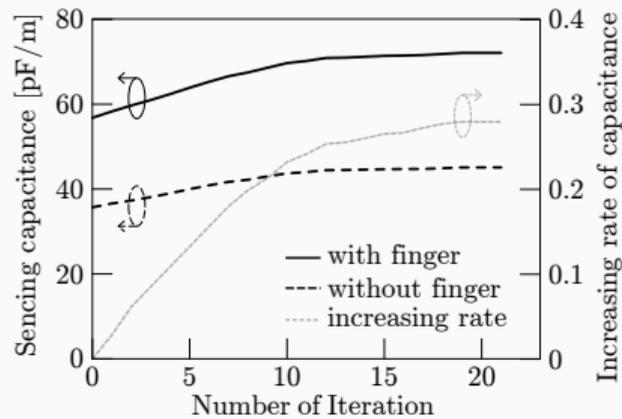


(d) 最適化後の形状

図 36: 突き出た接地電極のある 2 次元静電場の形状最適化結果



(a) 評価関数



(b) 性能

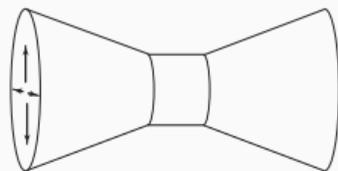
図 37: 形状変動に対する繰返履歴

§9 導波管ハイパスフィルタの形状最適化 [10]

ある周波数以上の信号を伝搬したい。



(a) 装置のイメージ (ミリ波レーダー)



(b) デバイス形状

図 38: 導波管ハイパスフィルタ

状態決定: 電磁場の周波数応答問題 (Helmholtz 方程式)

目的関数: 入力ポートの重みつき消費電力

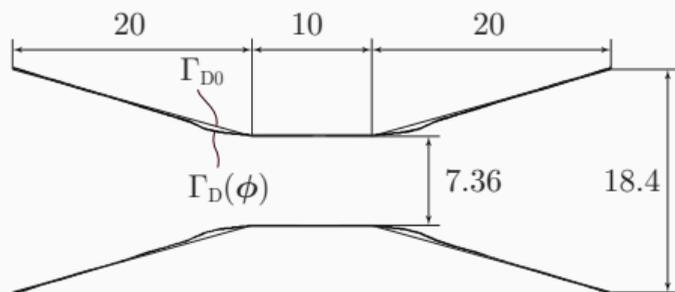
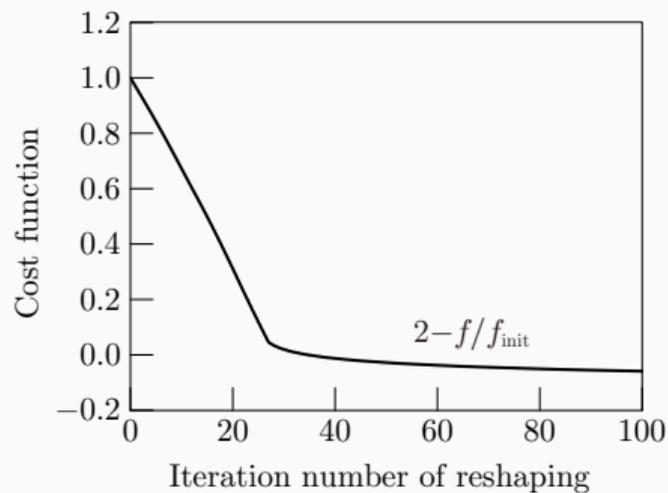
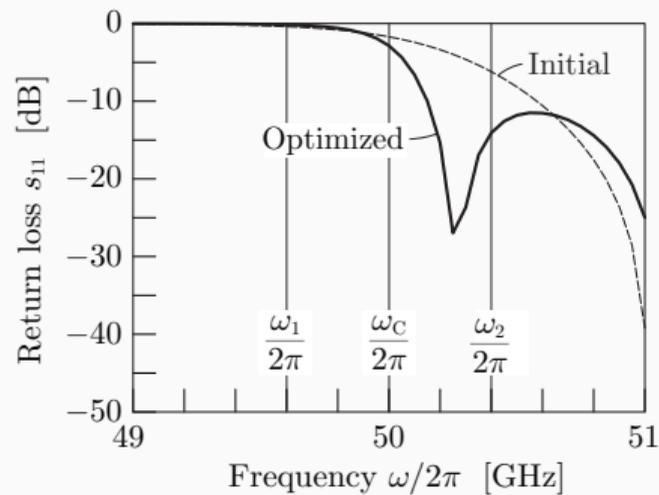


図 39: 円筒導波管の初期と最適化された断面形状 (単位: mm)

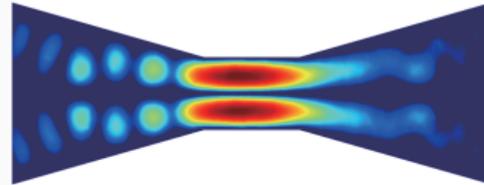
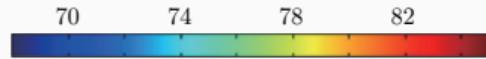


(a) 評価関数の更新履歴

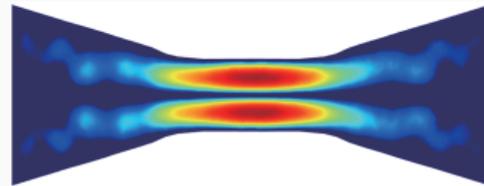


(b) リターンロス s_{11}

図 40: 円筒導波管の形状最適化結果



(a) 初期



(b) 最適化後

図 41: 50.2 GHz における電場の強さ [dBV/m]

§10 特発性側弯症の最適治療部位の同定 [11]

特発性側弯症の成因が椎体の成長による座屈現象であるならば、座屈が起こりにくい補強部位を求めることができる。

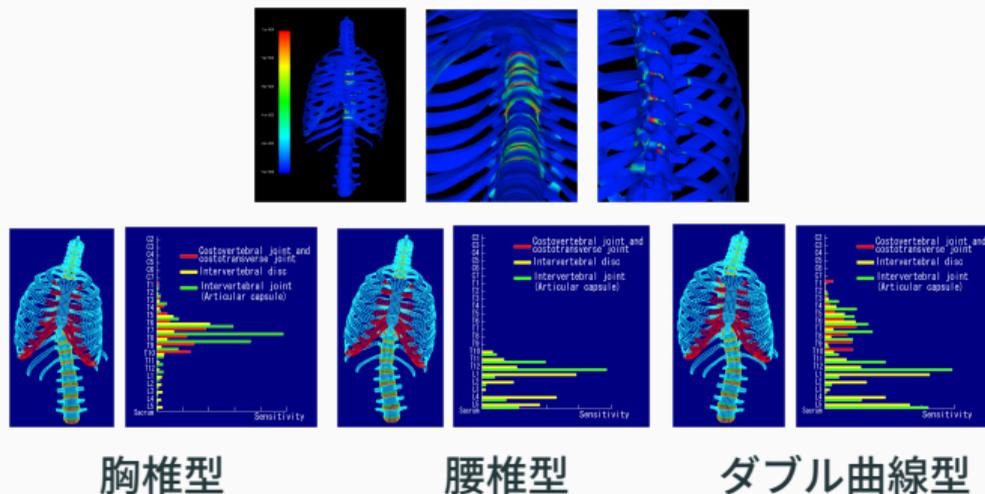


図 42: 座屈係数の形状勾配

§11 フィッティングによる患者モデルの作成 [12]

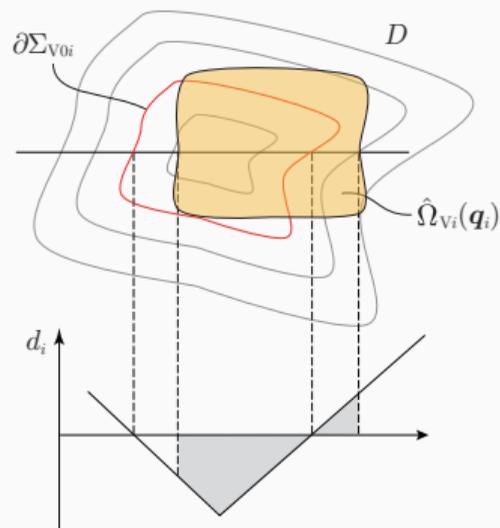


図 43: 符号付距離関数

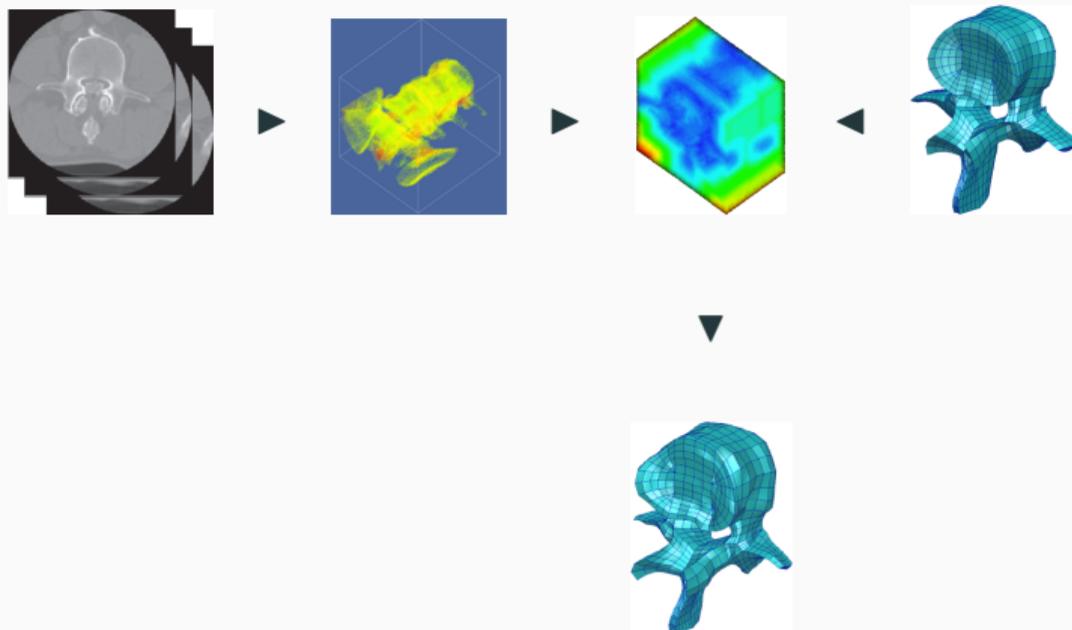


図 44: フィッティングによる患者モデルの作成

§11 形状観測に基づく筋活動の同定 [13]

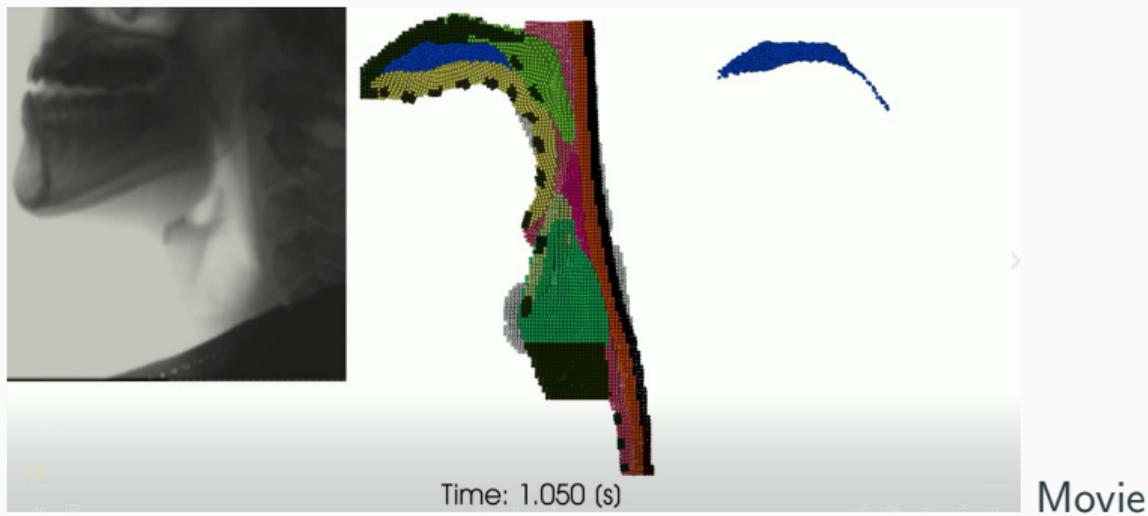
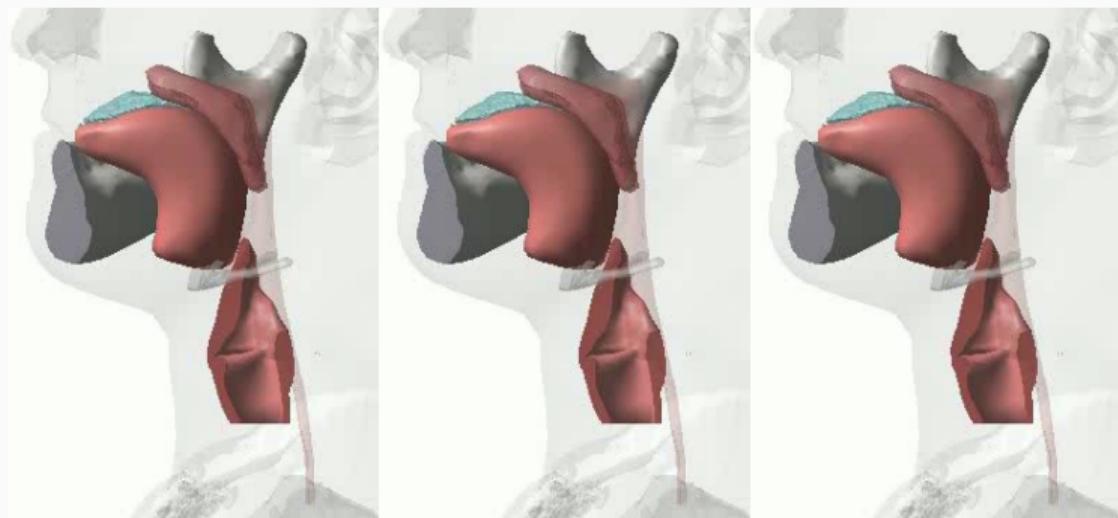


図 45: 嚥下運動のシミュレーション [菊地貴博 (武蔵野赤十字病院) 提供]



Movie

図 46: 嚥下運動のシミュレーション [菊地貴博 (武蔵野赤十字病院) 提供]

各器官形状の時間変化が与えられたとき，内部の筋活動が同定できるか？

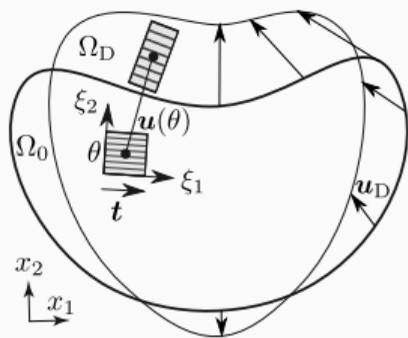


図 47: 舌の変形

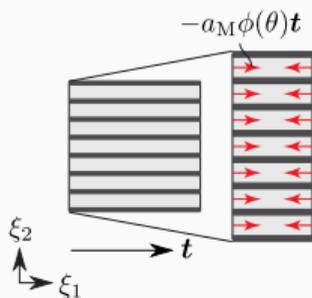


図 48: 筋活動
(非弾性収縮応力)

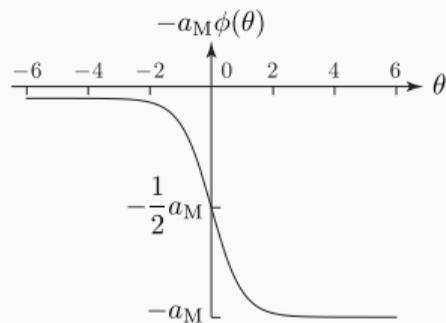


図 49: 筋活動の大きさ

状態変数: $\mathbf{u} \in C^{1,1}(\Omega_0; \mathbb{R}^d)$, 設計変数: $\theta \in C^{0,1}(\Omega_0; \mathbb{R})$

筋が発生する応力 (非弾性収縮応力):

$$\mathbf{S}_M(\theta) = -a_M \phi(\theta) \mathbf{t} \otimes \mathbf{t}, \quad \phi(\theta) = \frac{1}{2} \tanh \theta + \frac{1}{2}$$

筋繊維方向を最小主応力方向と仮定した場合

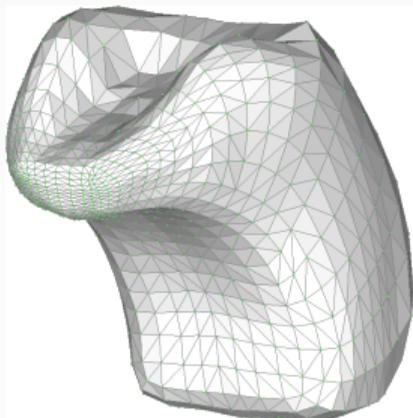


図 50: 有限要素モデル

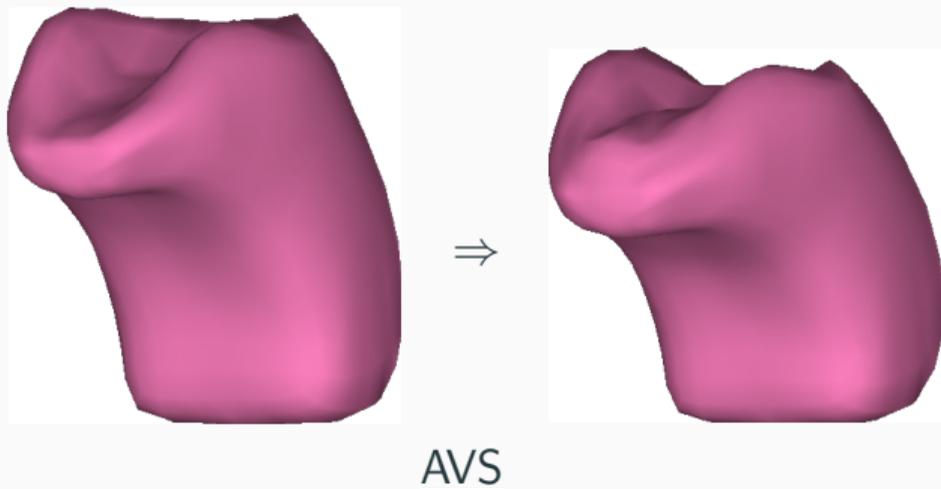
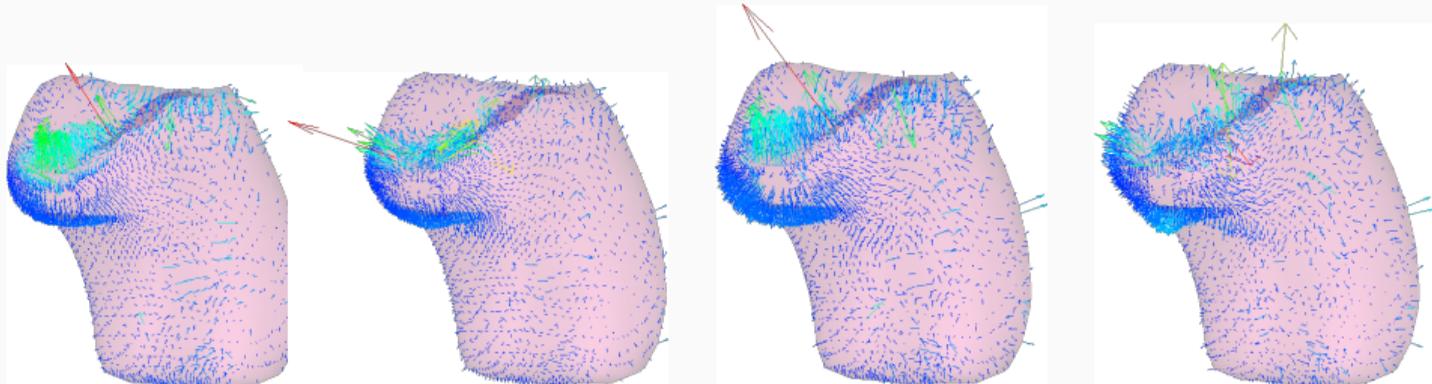


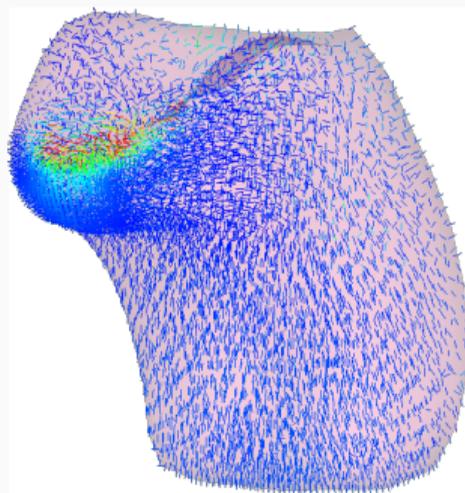
図 51: u_D による変形



(a) $\theta = -3$ (b) $\theta = \theta_{\text{opt}}$
 $(\nu_P = 0)$

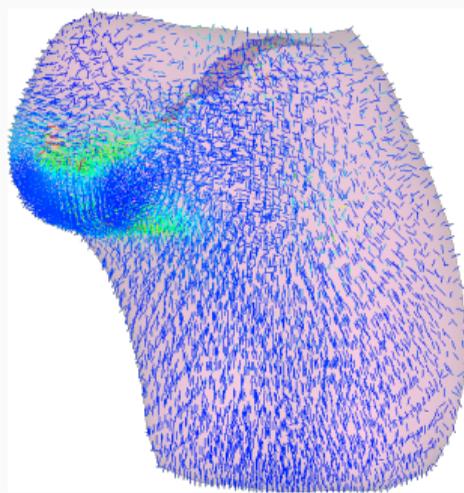
(c) $\theta = -3$ (d) $\theta = \theta_{\text{opt}}$
 $(\nu_P = 0.4)$

図 52: $\partial\Omega_0$ 上の反力 $\Pi(\theta, u)\nu$ (Π は第 1 Piola-Kirchhoff 応力)



(AVS)

(a) $\nu_P = 0$



(AVS)

(b) $\nu_P = 0.4$

図 53: 筋活動 $a_M \phi(\theta) \mathbf{t} = -\mathbf{S}_M(\theta_{\text{opt}}) \mathbf{t}$

複数筋で筋繊維方向が既知の場合

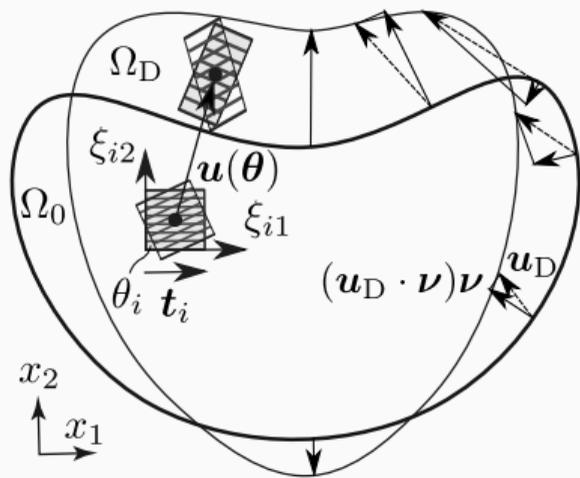


図 54: 舌の変形 (複合筋)

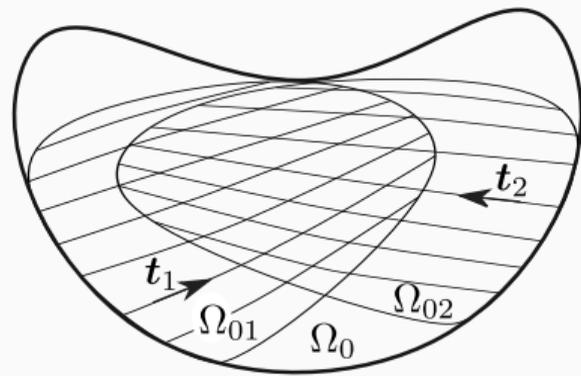
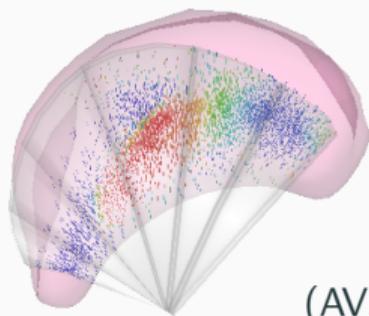
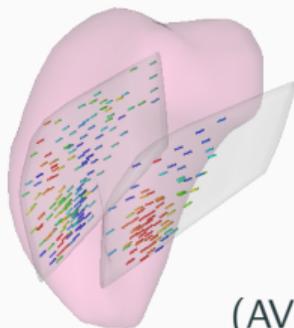


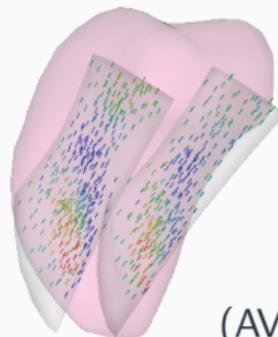
図 55: 2種類の筋繊維



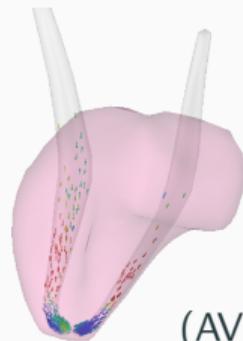
(a) アトガイ舌筋 (AVS)



(b) 舌骨舌筋 (AVS)



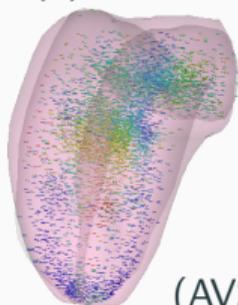
(c) 下縦舌筋 (AVS)



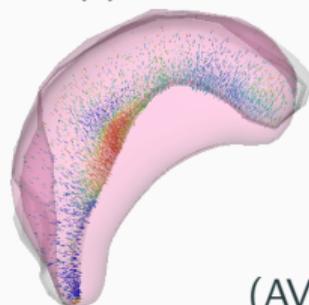
(d) 茎突舌筋 (AVS)



(e) 上縦舌筋 (AVS)



(f) 横舌筋 (AVS)



(g) 垂直舌筋 (AVS)



(h) 口蓋舌筋 (AVS)

図 56: 各筋線維の収縮応力 [14]

3. このような問題に取り組むこと になった経緯

§1 ある著作との出会い

Y.C. Fung and 瀬口: 生体システムにおける力学 [15]



図 57: ウサギの胸部動脈の断面形状

「生体システムでは、応力の大きさにより成長 (Growth) と吸収 (Atrophy) が調整され、それが残留応力を変化させる。」



材料がどのように振舞えば一様な応力になるか？

成長ひずみ法

線形弾性体の領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \{2, 3\}$) に非弾性の体積ひずみ

$$E_B(g) = gI, \quad g = \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0}$$

が発生したときの変形を使って、形状を変えていく [16]. ただし, $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ は相当応力, σ_0 はその基準値 (正定数), I は d 次の単位行列とする.

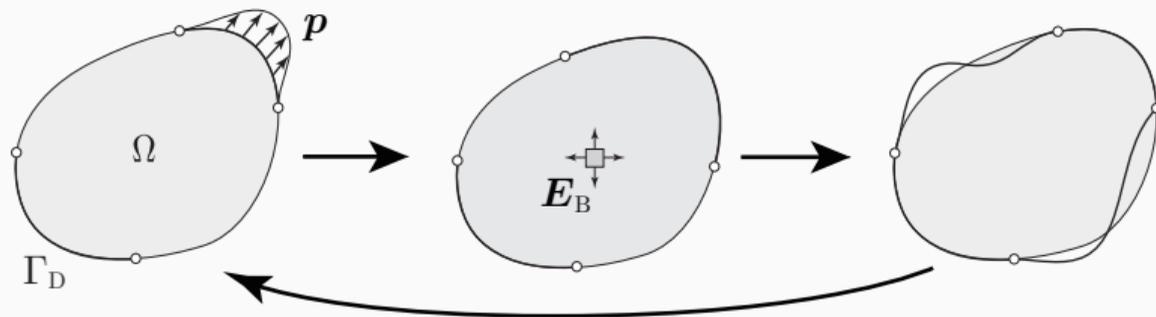
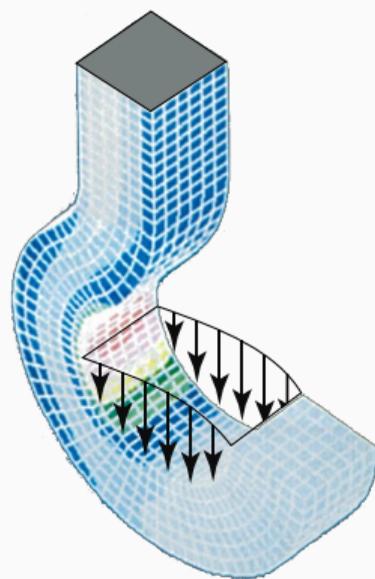
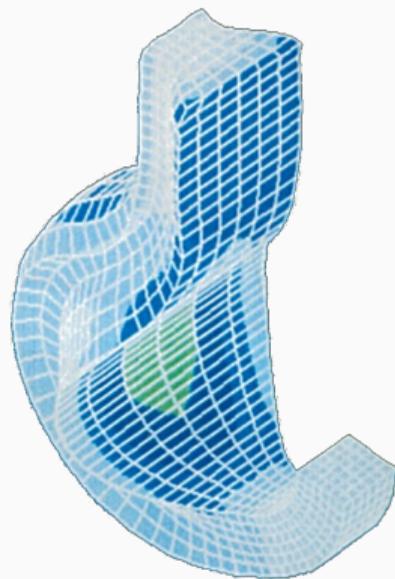


図 58: 成長ひずみ法



(a) 初期, 境界条件



(b) 変形後

図 59: 成長ひずみ法によるフックの形状更新

- Myung W. Suh, et al. (Michigan U. & Ford, USA), 1989[17]
Chung M. Suh (GM, Isuzu)
- C. Matteck and S. Burkhardt (Germany), 1989[18]
H.P. Mlejnek, et al., 1990
J. Sauter, 1991
- H. Azegami (Japan), 1988[16]

うまくいかない例

楕円になるはずが...

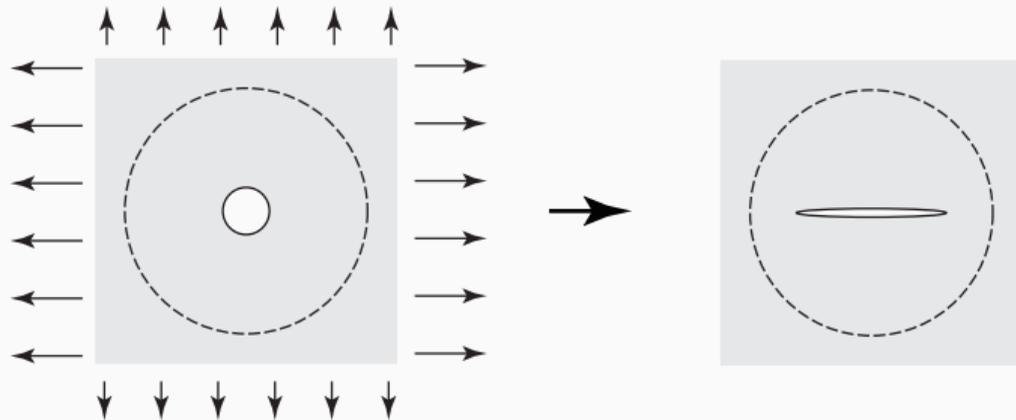


図 60: 孔の空いた無限平板の形状最適化

菊池先生からのアドバイス

- NATO Advanced Study Institute (Iowa City, 1980) の会議録を見よ.
Banichuk[19], Cea[20, 21], Zolésio[22, 23] の論文に没頭

J. E. Taylor 先生の講義

- Structural Optimization

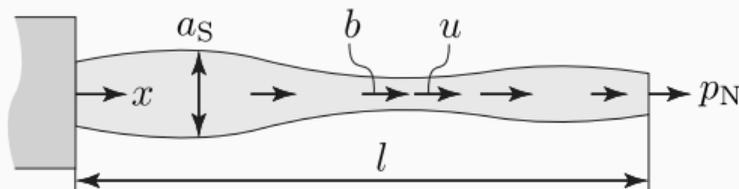


図 61: 1次元線形弾性体

成長ひずみ法の欠陥

成長ひずみ法では，任意の $\mathbf{y} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\mathbf{y} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$ on $\Gamma_D \cup \Gamma_p$, に対して

$$\int_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}(\varphi) \, dx = - \int_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}_B(g) \, dx$$

を満たす変位 $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\mathbf{y} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$ on $\Gamma_D \cup \Gamma_p$, をもとめていた．ただし， $\mathbf{S}(\mathbf{y})$, $\mathbf{E}(\mathbf{y})$ は応力とひずみテンソルである．簡単のために体積弾性率を 1 として，物質移動の項を加えると，上式の右辺は

$$- \int_{\Omega} (g \nabla \cdot \mathbf{y} + \nabla g \cdot \mathbf{y}) \, dx = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (g \mathbf{y}) \, dx = - \int_{\partial \Omega} g \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{y} \, d\gamma$$

とかける．この問題は表面力による線形弾性問題になる．

力法の提案

形状微分に比例した境界力で線形弾性体と仮定した領域を動かす [24, 25].

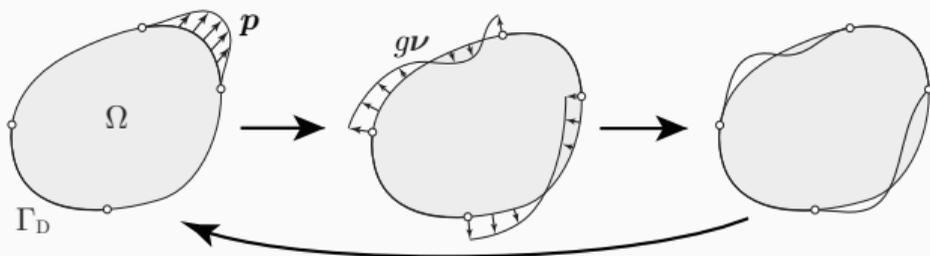


図 62: Dirichlet 型力法

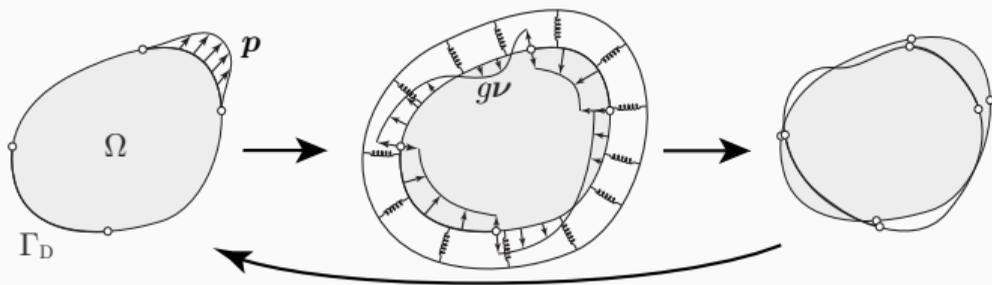
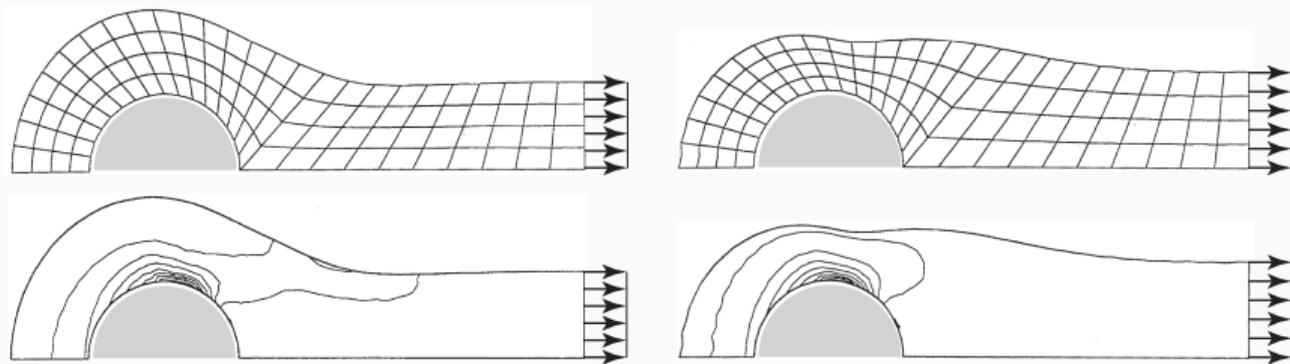


図 63: Robin 型力法



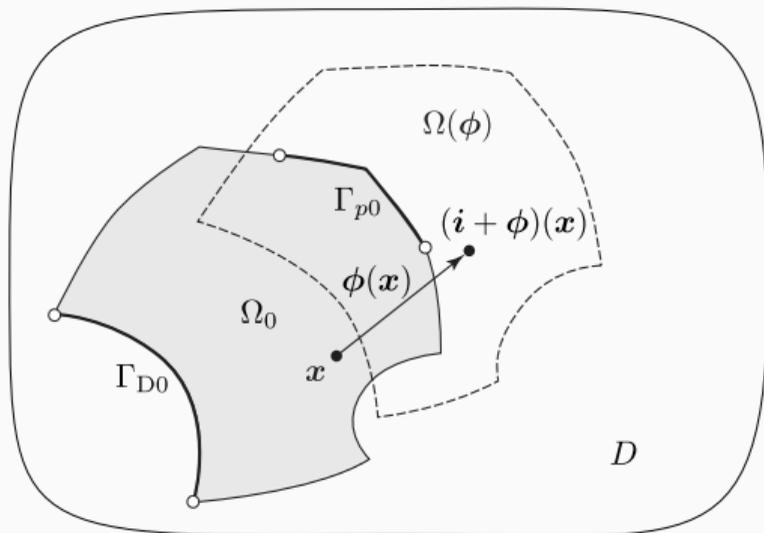
(a) 成長ひずみ法

(b) 力法

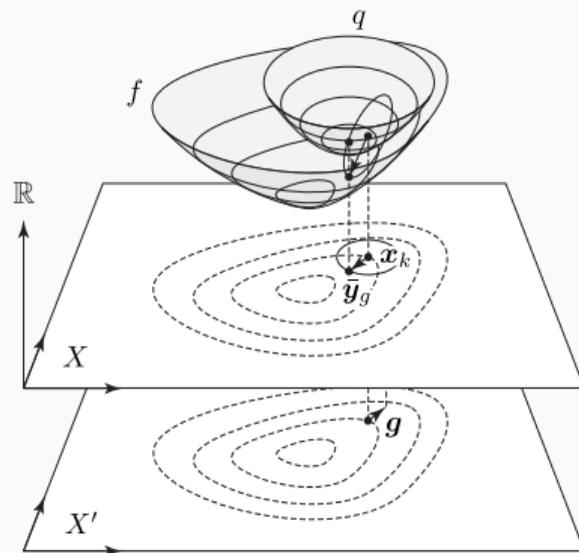
図 64: 連結棒の形状最適化

方法の一般化

方法は関数空間 $X = H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ 上の勾配法である。



設計変数：領域変動の変位 ϕ



勾配法のイメージ (設計変数 $x \in X$)

図 65: 領域変動型 H^1 勾配法

H^1 勾配法の密度型位相最適化問題への応用

$X = H^1(\Omega; \mathbb{R})$ とおけば密度型位相最適化問題にも応用できる [26].

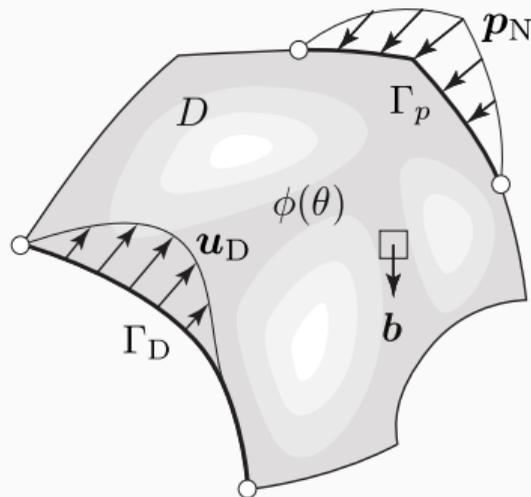


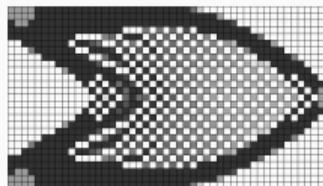
図 66: 密度型位相最適化問題

そこで, H^1 関数空間上の勾配法を H^1 勾配法とよぶことにした.

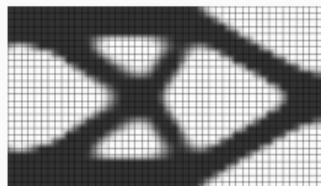
1. 形状最適化問題
⇒ 領域変動型 H^1 勾配法
= 力法
2. 密度型位相最適化問題
⇒ 密度変動型 H^1 勾配法

数値不安定現象

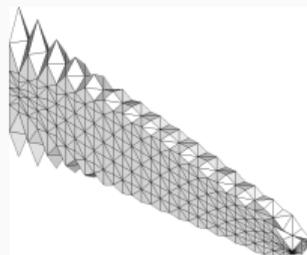
- 境界節点を形状微分に比例して移動すると，図 67 (a) となる．
- 密度を密度微分に比例して変化させると図 67 (c) となる．



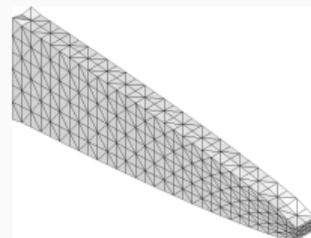
(a) L^2 勾配法



(b) H^1 勾配法



(c) L^2 勾配法



(d) H^1 勾配法

図 67: 数値解析例 (株式会社くいと 提供)

⇒ H^1 勾配法は，形状微分や密度微分を正則化する機能をもつ．

4. まとめ

1. 本授業の目的

- 偏微分方程式の境界値問題が定義された領域の形状を設計対象にした最適化問題を数値的に解くための理論と方法を理解する。

2. 実問題への応用

- 製品設計，医療などへの応用が期待される。

3. 自己紹介

- 素朴な成長則による形状最適化法を思いついた。その正当性を理解しようとした過程で汎用的な解法に到達した。

5. 参考文献

[1] CD-ROM.

Version 1.1 of the interactive atlas, copyright 1995 ciba-geigy corporation, 556 morris, summit, nu 07901.

[2] T. Hayashi and H. Azegami.

Shape optimization of bodies of musical instruments.

JSIAM Letters, Vol. 10, pp. 29–32, 2018.

[3] M. Nonogawa, K. Takeuchi, and H. Azegami.

Shape optimization of running shoes with desired deformation properties.

Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 62, No. 3, pp. 1535–1546, 2020.

[4] H. Azegami, L. Zhou, K. Umemura, and N. Kondo.

Shape optimization for a link mechanism.

Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 48, No. 1, pp. 115–125, 2013.

[5] T. Tago, T. Aoki, and H. Azegami.

Identification of building damage using vibrational eigenvalue and eigenmode pairs.

Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, Vol. 32, No. 2, pp. 297–313, 2015.

[6] K. Shintani and H. Azegami.

Shape optimization for suppressing brake squeal.

Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 50, No. 6, pp. 1127–1135, 2014.

[7] K. Shintani and H. Azegami.

Shape optimization for brake squeal.

In Proceedings of the 10th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-10), pp. 1–10, 2013.

[8] T. Nakazawa and H. Azegami.

Shape optimization of flow field improving hydrodynamic stability.

Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, Vol. 33, No. 1, pp. 167–181, 2016.

[9] Y. Kiriya, E. Katamine, and H. Azegami.

Shape optimisation problem for stability of navier-stokes flow field.

International Journal of Computational Fluid Dynamics, 2018.

[10] M. Satake, N. Maeda, S. Fukui, and H. Azegami.

Shape optimization of an electrostatic capacitive sensor.

Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, Vol. 33, pp. 599–619, 2016.

- [11] K. Takeuchi, H. Azegami, S. Murachi, J. Kitoh, Y. Ishida, N. Kawakami, and M. Makino.

Study on treatment with respect to idiopathic scoliosis: Sensitivity analysis based on buckling theory.

JSME International Journal, Series C, Vol. 44, No. 4, pp. 1059–1064, 2001.

- [12] R. Sasaoka and H. Azegami.

Construction of finite-element models conforming to prescribed boundary shapes.

Transactions of Japan Society for Computational Engineering and Science, No. 200500002, pp. 1–6, 2005.

(Paper No.200500002 published January 21, 2005).

[13] 畔上秀幸, 栗本涼太, 齋藤元滋, 竹内謙善.

嚥下運動の観測データに基づく筋活動同定問題の定式化.

第3回嚥下シミュレーション研究会, 武蔵野赤十字病院, 2017.12.09, 2017.

[14] Shinjiro Ono, Hideyuki Azegami, Kenzen Takeuchi, Yukihiro Michiwaki, and Takahiro Kikuchi.

Identification of muscle activity in tongue 's motion considering distinguished muscle fibers.

In Proceedings of the Asian Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization 2020, p. 159, 2020.

[15] Y. C. Fung, 瀬口靖幸.

生体システムにおける力学.

日本機械学会誌, Vol. 88, pp. 290–296, 1988.

[16] H. Azegami.

A proposal of a shape-optimization method using a constitutive equation of growth: In the case of a static elastic body (in Japanese).

Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A,
Vol. 54, No. 508, pp. 2167–2175, 1988.

[17] M. W. Suh, W. J. Anderson, and J. P. McDonald.

Application of geometric strain method to shape optimization of spring retainer redesign.

In C. A. Brebbia and S. Hernandez, editors, Computer Aided Optimization Design of Structures: Recent advances, pp. 189–198. Computational Mechanics Publications, Southampton, Boston, 1989.

[18] C. Matteck and S. Burkhardt.

A new method of structural shape optimization based on biological growth.

International Journal of Fatigue, Vol. 12, No. 3, pp. 185–190, 1990.

[19] N. V. Banichuk.

Optimality conditions and analytical methods of shape optimization.

In E. J. Haug and J. Cea, editors, Optimization of Distributed Parameter Structures, Vol. 2, pp. 973–1004. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1981.

[20] J. Cea.

Problems of shape optimization.

In E. J. Haug and J. Cea, editors, Optimization of Distributed Parameter Structures, Vol. 2, pp. 1005–1048. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, 1981.

[21] J. Cea.

Numerical methods of shape optimal design.

In E. J. Haug and J. Cea, editors, Optimization of Distributed Parameter Structures, Vol. 2, pp. 1049–1088. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, 1981.

[22] J. P. Zolésio.

The material derivative (or speed) method for shape optimization.

In E. J. Haug and J. Cea, editors, Optimization of Distributed Parameter Structures, Vol. 2, pp. 1089–1151. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, 1981.

[23] J. P. Zolésio.

Domain variational formulation for free boundary problems.

In E. J. Haug and J. Cea, editors, Optimization of Distributed Parameter Structures, Vol. 2, pp. 1152–1194. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, 1981.

[24] 畔上秀幸.

領域最適化問題の一解法.

日本機械学会論文集 A 編, Vol. 60, No. 574, pp. 1479–1486, 1994.

[25] H. Azegami and K. Takeuchi.

A smoothing method for shape optimization: Traction method using the Robin condition.

International Journal of Computational Methods, Vol. 3, No. 1, pp. 21–33, 2006.

[26] H. Azegami, S. Kaizu, and K. Takeuchi.

Regular solution to topology optimization problems of continua.

JSIAM Letters, Vol. 3, pp. 1–4, 2011.