

# 目次

<b>第 8 章 密度変動型の位相最適化問題</b>	<b>3</b>
8.1 設計変数の集合	7
8.2 状態決定問題	8
8.3 $\theta$ 型位相最適化問題	11
8.4 最適解の存在	13
8.5 評価関数の微分	16
8.5.1 評価関数の $\theta$ 微分	16
8.5.2 評価関数の 2 階 $\theta$ 微分	19
8.5.3 Lagrange 乗数法による評価関数の 2 階 $\theta$ 微分	22
8.6 評価関数の降下方向	24
8.6.1 $H^1$ 勾配法	24
8.6.2 $H^1$ Newton 法	28
8.7 $\theta$ 型位相最適化問題の解法	29
8.7.1 制約つき問題に対する勾配法	30
8.7.2 制約つき問題に対する Newton 法	31
8.8 誤差評価	32
8.9 線形弾性体の位相最適化問題	38
8.9.1 状態決定問題	38
8.9.2 平均コンプライアンス最小化問題	39
8.9.3 評価関数の $\theta$ 微分	40
8.9.4 評価関数の 2 階 $\theta$ 微分	42
8.9.5 Lagrange 乗数法による評価関数の 2 階 $\theta$ 微分	44
8.9.6 数値例	45
8.10 Stokes 流れ場の位相最適化問題	49
8.10.1 状態決定問題	49
8.10.2 平均流れ抵抗最小化問題	52
8.10.3 評価関数の $\theta$ 微分	52
8.10.4 評価関数の 2 階 $\theta$ 微分	54
8.10.5 Lagrange 乗数法による評価関数の 2 階 $\theta$ 微分	57

8.10.6 数値例 . . . . .	58
8.11 第 8 章のまとめ . . . . .	62
8.12 第 8 章の演習問題 . . . . .	63

## 第8章 密度変動型の位相最適化問題

本章からはいよいよ連続体の形状最適化問題について考えていきたい。まずは、偏微分方程式の境界値問題が定義された領域の最適な穴配置を求める問題を考えてみよう。その問題は、位相最適化問題とよばれてきた。ここで、位相とは、位相幾何学において使われる用語で、ある領域から連続写像によって得られるすべての領域は同じ要素 (同相) であるとみなす規準をいう。したがって、 $n$  を自然数として、それぞれの  $n$  に対する  $n$  連結領域が区別する要素になる。位相最適化問題では、穴の数が増えるという意味で位相最適化という用語が使われてきた。しかし、のちに詳しく説明されるように、実際には穴の形状も求める対象となる。そこで、この章で扱われる問題も、広い意味においては形状最適化問題に含まれることになる。本書では、位相も設計対象にするという意味において位相最適化問題とよぶことにする。

位相最適化問題に対して、これまで様々な問題の構成法と数値解法が提案されてきた。設計対象とする固定領域を設けて、その上で定義された領域の特性関数 (穴の領域で 0 をとり、穴ではない領域で 1 をとる  $L^\infty$  級の関数) を設計変数に選ぶ方法が検討された。その問題では、偏微分方程式の係数にその特性関数を乗じた境界値問題で状態決定問題が定義され、評価関数は特性関数と境界値問題の解で構成された。しかし、その問題はいつも解があるとは限らないことが示された [31]。その根本的な原因は、設計変数の許容集合がコンパクトになるための十分な正則性を  $L^\infty$  級関数の集合は備えていないことにあると考えられる [2]。その後、ミクロな構造をもつ連続体の問題を記述する方法 (均質化法) を形状最適化問題に応用するアイデアが示された [3, 19–22, 24, 25]。特に、 $d \in \{2, 3\}$  次元線形弾性体に対して、図 8.0.1 のような互いに直交する  $d$  種類のミクロな層で構成された材料は、ランク  $d$  材料とよばれ、均質化された材料定数が解析的に得られることから、さかんに調べられた [5, 7, 18, 32]。その結果、均一な応力場であれば、主応力の方向にそれらの大きさに比例するように層の密度が配分されたときに、体積が制限されたもとで平均コンプライアンスが最小となることが示された [18]。しかし、マクロな穴が認識されるような結果は得られなかった。また、ランク  $d$  材料はせん断変形に対する剛性がないことから力学構造としては実用的ではないことも問題とされた。

穴が創生されることが確認されたのは、図 8.0.2 のようなミクロなセル  $Y$  の中に長方形の穴をもつ連続体が仮定されたときであった [6, 9, 26, 38]。その問題は、図

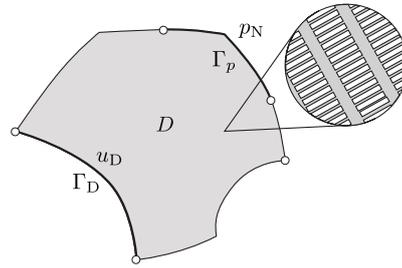


図 8.1: ランク 2 材料

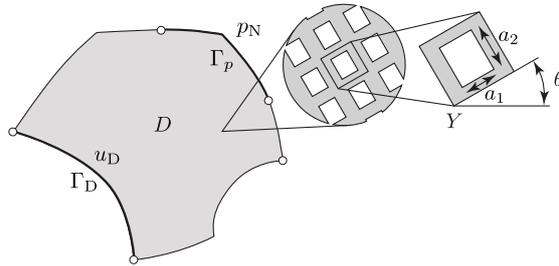


図 8.2: ミクロな長方形の穴をもつ 2 次元連続体

8.0.2 の  $(a_1, a_2, \theta)^\top : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  を設計変数においた関数最適化問題として構成された。この問題の数値解は、最適性の規準が満たされるような反復法によって得られることが示された [38]。その数値解がえられたならば、ミクロセルに対する穴の割合を密度と定義して、適当な閾値による密度の等値面により具体的な穴形状が決定されることになる。

その後、ミクロ構造を仮定しなくても、固定された有界領域  $D$  上で定義された密度を表す関数  $\phi : D \rightarrow [0, 1]$  を設計変数においても、ミクロな長方形穴の場合と同様の位相が得られることが示された (実際には、 $\phi \rightarrow 0$  のときに起こる状態決定問題の解の不連続性を回避するために、ある小定数  $c$  を決めて、 $\phi : D \rightarrow [c, 1]$  と仮定された) [28, 41]。その際、材料特性 (偏微分方程式の係数)  $k$  は、本来の材料定数を  $k_0$  としたとき、 $\alpha > 1$  を定数として、

$$k(\phi) = k_0 \phi^\alpha$$

によって与えられると仮定された。図 8.0.3 はそのときの位相最適化問題のイメージを示す。図 8.0.3 (a) は、状態決定問題 (境界値問題) の例を示している。図 8.0.3 (b) は、密度  $\phi$  と材料特性  $k$  の関係を示している。設計変数である密度  $\phi$  ( $D$  上で定義された関数) が変動すれば、材料特性  $k(\phi)$  ( $D$  上で定義された関数) は、図 8.0.3 (b) の関数を介して変動し、それにより図 8.0.3 (a) の境界値問題の解が変動す

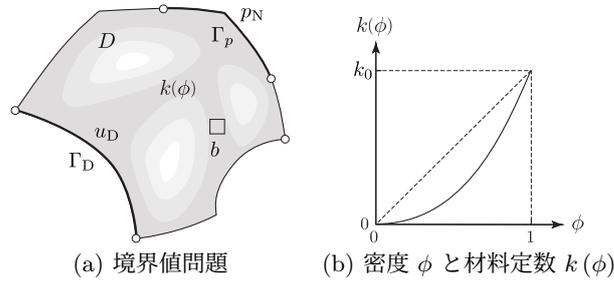


図 8.3: SIMP モデル

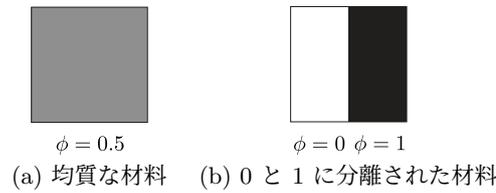


図 8.4: 密度が 0.5 のときのマイクロ構造

ることになる. このように定義された位相最適化問題は**密度型位相最適化問題**とよばれた. また, この問題は, **SIMP** (solid isotropic material with penalization) モデルともよばれた [35]. その理由は, 中間の密度 ( $\phi = 0.5$ ) に対して, 図 8.0.4 (a) のような均質な材料を仮定すれば, 材料特性  $k$  は  $0.5^\alpha$  となるが, 図 8.0.4 (b) のように,  $\phi = 0$  と  $\phi = 1$  に分離すれば,  $k$  は  $0.5$  となり,  $0.5^\alpha < 0.5$  より, 均質な材料よりも  $\phi = 0$  と  $\phi = 1$  に分離された材料の方が大きな材料特性値をもつようなペナルティが与えられたモデルになっているためである.

このような密度型位相最適化問題に対して, 評価関数の Fréchet 微分は, 後で示されるような評価式を用いて有限要素法によって計算される. しかしながら, 有限要素ごとに一定の密度を仮定して, Fréchet 微分の負の方向に変化させていくと, 密度がチェッカーボード状に振動するパターンが現れることが指摘されてきた [10]. 図 8.0.5 (a) は 2 次元線形弾性体の平均コンプライアンス最小化問題 (問題 8.9.3) に対する数値解析の結果を示す. 状態決定問題では, 左端が固定されたもとの, 右端中央に下向きの外力が作用している. 黒色と白色の要素はそれぞれ  $\phi$  が 1 と 0 に近いことを示している. これまで, このような現象が現れたときには, フィルタリングなどの後処理を施すことで回避できるとされてきた [17, 23, 37]. また, ミクロ構造パラメータの分布を連続な基底関数で近似する方法も示されている [27]. しかし, アイランド現象などよばれる別の問題が発生することが指摘されている [34]. さらに, 中間の密度を除くために射影を用いた方法も提案されている [36, 40].

それに対して, 本章では, 第 7 章に示された抽象的最適設計問題の枠組みに沿っ

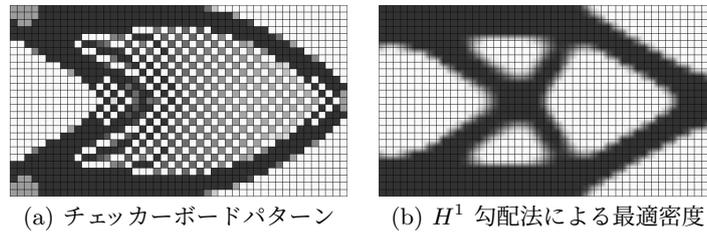


図 8.5: 線形弾性体の密度型位相最適化問題に対する数値解析例 (株式会社くいと提供)

て密度型位相最適化問題の数値解法を考えていくことにする。ただし、本章では、のちに示される理由により、密度を、直接、設計変数に選ぶのではなく、新たに  $D$  上で定義された関数  $\theta$  を設計変数に選ぶことにする。そこで、そのときの密度型位相最適化問題を  $\theta$  型位相最適化問題とよぶことにする。本章で示される理論の枠組みは文献 [4] の中で簡潔に示されている。図 8.0.5 (b) は、8.7 節で示されるアルゴリズムによってえられた結果である。チェッカーボードのような数値不安定現象が発生していないようすがみとれる。

本章の構成は次のようになっている。8.1 節では、連続体の位相最適化問題を構成するために設計変数  $\theta$  の許容集合を定義する。8.2 節では、設計変数が与えられたと仮定して、状態決定問題として  $\theta$  型 Poisson 問題を定義する。設計変数と状態決定問題の解 (状態変数) を用いて、 $\theta$  型位相最適化問題を 8.3 節で定義する。ここでは、一般的な評価関数を用いることにする。そこで定義された  $\theta$  型位相最適化問題の解が存在することは 8.4 節で示される。8.5 節では、設計変数  $\theta$  の変動に対する評価関数の Fréchet 微分を  $\theta$  微分とよぶことにして、7.4 節で示された評価関数の Fréchet 微分の求め方に沿って、評価関数の  $\theta$  微分と 2 階  $\theta$  微分を求める過程を示す。その結果、状態決定問題の設定によっては、評価関数の  $\theta$  微分は設計変数の許容集合にはいるような正則性がないことが明らかとなる。8.6 節では、抽象的勾配法と抽象的 Newton 法を  $\theta$  型位相最適化問題に対して具体化する。それらの方法で求められる  $\theta$  の変動は、設計変数の許容集合にはいるような正則性をもつことが明らかになる。8.7 節では、 $\theta$  型位相最適化問題を解くためのアルゴリズムについて考える。しかし、基本的な構造は、3.7 節で示されたアルゴリズムと同じになる。このアルゴリズムにより数値解析をおこなったときの誤差評価について 8.8 節で考える。そこでは、6.6 節で示された数値解析における誤差評価の結果が使われることになる。Poisson 問題に対する  $\theta$  型位相最適化問題の解法までを確認したあとで、8.9 節と 8.10 節で、それぞれ、線形弾性体の平均コンプライアンス最小化問題と Stokes 流れ場の損失エネルギー最小化問題を  $\theta$  型位相最適化問題として定義

し、それらの評価関数の  $\theta$  微分を求める過程をみとめることにする。また、簡単な問題に対する数値例も示す。

## 8.1 設計変数の集合

まず、連続体の位相最適化問題を構成するために設計変数の集合を定義しよう。本章では、図 8.0.3 (a) のように、 $D$  を  $d \in \{2, 3\}$  次元の Lipschitz 領域とする。  $\Gamma_D \subset \partial D$  を Dirichlet 境界として  $|\Gamma_D| \neq 0$  とする。  $\Gamma_N \subset \partial D \setminus \bar{\Gamma}_D$  を Neumann 境界とする。

これまでの研究では、密度  $\phi$  の値域は  $[0, 1]$  に制限されていた。このような値域が制限された関数の集合は線形空間にはなれない。そこで、本書では、  $\theta : D \rightarrow \mathbb{R}$  を新たに設計変数とおき、密度は  $\theta$  に対するシグモイド関数  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  によって与えられると仮定する。シグモイド関数にはいくつかの関数が知られている。ここでは、

$$\phi(\theta) = \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \theta + \frac{1}{2} \quad (8.1.1)$$

あるいは

$$\phi(\theta) = \frac{1}{2} \tanh \theta + \frac{1}{2} \quad (8.1.2)$$

を用いることにする。図 8.1.1 にこれらのグラフを示す。ここで、  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は  $\theta$  の値が与えられたときに  $(0, 1)$  を返す関数であって、  $D$  を定義域とする関数ではないことに注意する必要がある。しかし、  $\theta$  が  $D$  を定義域とする関数であるために、  $\phi(\theta)$  は  $D$  を定義域とする関数になる。

このような設計変数  $\theta$  に対して、抽象的最適設計問題 (問題 7.3.1) の枠組みに沿って、設計変数の線形空間を定義しよう。7.1 節でみてきたように、勾配法を用いることを考えると、設計変数の線形空間は実 Hilbert 空間である必要がある。そこで、  $\theta$  のための設計変数の線形空間を

$$X = \{ \theta \in H^1(D; \mathbb{R}) \mid \theta = 0 \text{ in } \bar{\Omega}_C \} \quad (8.1.3)$$

とおく。ただし、  $\bar{\Omega}_C \subset \bar{D}$  を設計上の制約で  $\theta$  の変動を拘束する境界あるいは領域とする。  $\theta_C : D \rightarrow \mathbb{R}$  を指定された関数として、  $\bar{\Omega}_C$  上で  $\theta = \theta_C$  が成り立つことを仮定するときには、  $\tilde{\theta} = \theta - \theta_C$  が  $X$  の要素であると仮定する。特に  $\bar{\Omega}_C$  を必要としない場合には、  $\theta \in X = H^1(D; \mathbb{R})$  を仮定する。

さらに、  $\theta$  の等値面から Lipschitz 連続な境界が判定できるようにするために  $X$  上のコンパクト部分集合にするために、設計変数の許容集合を

$$D = \left\{ \theta \in X \cap H^2(D; \mathbb{R}) \cap C^{0,1}(D; \mathbb{R}) \mid \right.$$

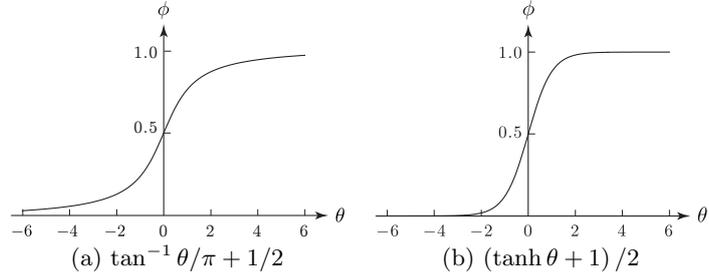


図 8.6: 設計変数  $\theta$  を密度  $\phi(\theta)$  に変換するシグモイド関数

$$\max \left\{ \|\theta\|_{H^2(D;\mathbb{R})}, \|\theta\|_{C^{0,1}(D;\mathbb{R})} \right\} \leq \beta \quad (8.1.4)$$

とおく. ただし,  $\beta$  は正定数とする.  $\mathcal{D}$  が  $X$  上のコンパクト部分集合となることは, Rellich-Kondrachov のコンパクト埋蔵定理 (定理 4.4.15) より,  $H^2(D;\mathbb{R}) \Subset H^1(D;\mathbb{R})$  が成り立つ. また, 第 1 章と同様, 本章でもノルムを用いた有界制約は側面制約とみなし,  $\theta$  は  $\mathcal{D}$  の内部  $\mathcal{D}^\circ$  にあると仮定して, 有界制約が有効になった場合には, 不等式制約の中にも含めるものとする.

## 8.2 状態決定問題

設計変数の線形空間  $X$  と設計変数の許容集合  $\mathcal{D}$  が定義されたので, 次に状態決定問題となる偏微分方程式の境界値問題を定義しよう. ここでは, 簡単のために, Poisson 問題を考えることにする.

第 5 章で Poisson 問題 (問題 5.1.1) が定義された. ここでは,  $\theta$  を設計変数においたときの Poisson 問題を  $\theta$  型 Poisson 問題とよんで, 抽象的最適設計問題 (問題 7.3.1) の枠組みに沿ってその定義を示すことにする.

$\theta$  型 Poisson 問題に対する同次形の解 (Dirichlet 条件を与える既知関数  $u_D$  に対して,  $\tilde{u} = u - u_D$  で与えられる) が入る状態変数の線形空間 (実 Hilbert 空間) を

$$U = \{ u \in H^1(D;\mathbb{R}) \mid u = 0 \text{ on } \Gamma_D \} \quad (8.2.1)$$

とおく. さらに, のちに示される勾配法によって得られる  $\theta$  の変動が式 (8.1.4) の  $\mathcal{D}$  に入るようにするために, 状態決定問題に対する同次形の解  $\tilde{u}$  が入る状態変数の許容集合を

$$\mathcal{S} = \{ u \in U \cap W^{1,2q_R}(D;\mathbb{R}) \mid \partial_\nu u|_{\Gamma_D} \in L^2(\Gamma_D;\mathbb{R}) \} \quad (8.2.2)$$

とおく. ただし,  $q_R$  を  $q_R > d$  を満たす整数とする.

状態決定問題に対する同次形の解  $\tilde{u}$  が  $S$  に入るためには、5.3 節でみてきた結果より、既知関数の正則性について次の仮定をおく。

**仮定 8.2.1 (既知関数の正則性)**  $q_{\mathbb{R}} > d$  に対して

$$b \in C^1(X; L^{2q_{\mathbb{R}}}(D; \mathbb{R})), \quad p_{\mathbb{N}} \in W^{1,2q_{\mathbb{R}}}(D; \mathbb{R}), \quad u_{\mathbb{D}} \in H^2(D; \mathbb{R})$$

であると仮定する。ただし、 $C^1(\cdot; \cdot)$  は Fréchet 微分 (定義 4.5.4) 可能な関数の集合を表す。□

また、境界の正則性について次の仮定をもうける。

**仮定 8.2.2 (角点の開き角)**  $D$  が 2 次元領域の場合には境界上の角点に関して、開き角  $\beta$  が、Dirichlet 境界と Neumann 境界の

- (1) 同一種境界上にあるとき、 $\beta < 2\pi$ ,
- (2) 混合境界上にあるとき、 $\beta < \pi$

が満たされると仮定する。また、 $D$  が 3 次元領域の場合には、境界上の角線は滑らかで、それに垂直な面における境界上の角点で上記の関係が成り立つと仮定する。なお、角線の交点や錐面の頂点などは、本書の枠を超えることから、そのような特異点はないと仮定する。□

仮定 8.2.1 と仮定 8.2.2 が成り立てば  $u$  が  $W^{1,2q_{\mathbb{R}}}(D; \mathbb{R})$  に入ることは、次のようにして確かめられる。既知関数に対して仮定 8.2.1 が成り立てば、5.3.1 項でみたように、 $u$  は角点近傍を除いて  $W^{1,2q_{\mathbb{R}}}$  級に入る。さらに、命題 5.3.1 より、

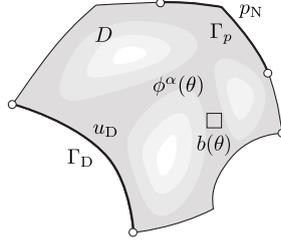
$$\omega > 1 - \frac{2}{2q_{\mathbb{R}}} \tag{8.2.3}$$

が成り立てば、 $u$  は  $W^{1,2q_{\mathbb{R}}}$  級に入ることになる。ここで、Dirichlet 境界あるいは Neumann 境界の同一種境界上にある角点近傍では、 $\omega = \pi/\beta$  となることから、仮定 8.2.2 の (1) の条件が得られることになる。また、混合境界上の角点近傍では、 $\omega = \pi/(2\beta)$  となることから、仮定 8.2.2 の (2) の条件が得られることになる。

以上の仮定を用いて、**状態決定問題**を定義しよう。簡単のために、図 8.2.1 のような Poisson 問題を考えることにする。ここでも、 $\nu \cdot \nabla$  を  $\partial_{\nu}$  とかくことにする。

**問題 8.2.3 ( $\theta$  型 Poisson 問題)**  $\theta \in \mathcal{D}$  に対して、仮定 8.2.1 と仮定 8.2.2 が満たされているとする。  $\alpha > 1$  を定数、 $\phi(\theta)$  を式 (8.1.1) あるいは式 (8.1.2) で与えられた関数とする。このとき、

$$-\nabla \cdot (\phi^{\alpha}(\theta) \nabla u) = b(\theta) \quad \text{in } D,$$

図 8.7:  $\theta$  型 Poisson 問題

$$\begin{aligned} \phi^\alpha(\theta) \partial_\nu u &= p_N \quad \text{on } \Gamma_N, \\ u &= u_D \quad \text{on } \Gamma_D \end{aligned}$$

を満たす  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$  を求めよ. □

問題 8.2.3 の弱解の一意存在は Lax-Milgram の定理 (定理 5.2.4) によって  $\tilde{u} = u - u_D \in U$  に対して保証される. これ以降,  $\tilde{u}$  を  $u - u_D$  の意味で用いることにする. また, 仮定 8.2.1 と仮定 8.2.2 が満たされていれば,  $u - u_D \in S$  が保証される. 後のために, 問題 8.2.3 に対する Lagrange 関数を

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S(\theta, u, v) &= \int_D (-\phi^\alpha(\theta) \nabla u \cdot \nabla v + b(\theta) v) \, dx \\ &\quad + \int_{\Gamma_N} p_N v \, d\gamma + \int_{\Gamma_D} \{(u - u_D) \phi^\alpha(\theta) \partial_\nu v + v \phi^\alpha(\theta) \partial_\nu u\} \, d\gamma \end{aligned} \quad (8.2.4)$$

と定義しておく. ただし,  $u$  は問題 8.2.3 の解とはかぎらないとする.  $v \in S$  は Lagrange 乗数として導入された. 式 (8.2.4) において, 右辺第 3 項は, 第 5 章において Poisson 問題の弱形式を求める際に,  $u - u_D, v \in U$  によって, 消去された項である. 実際, この項がなくなったことにより,  $u$  と  $v$  が  $H^1$  級の関数とみなすことができた ( $\Gamma_D$  上で  $\partial_\nu v$  が意味をもつためには  $v$  は  $H^2$  級の関数である必要がある). しかし, ここでは, その項を残しておくことにする. その理由は, のちに評価関数  $f_i$  に対する Lagrange 関数を定義する際に,  $f_i$  に  $\Gamma_D$  上の境界積分が含まれるときに, この項があることによって, 随伴問題の境界条件がみえてくるためである. 第 7 章で示した抽象的変分問題に対する Lagrange 関数の定義式 (7.2.3) に合わせれば,  $\tilde{u} = u - u_D$  とおくことにして,

$$\mathcal{L}_S(\theta, u, v) = -a(\theta)(u, v) + l(\theta)(v) = -a(\theta)(\tilde{u}, v) + \hat{l}(\theta)(v) \quad (8.2.5)$$

とかける. ここで,

$$a(\theta)(u, v) = \int_D \phi^\alpha(\theta) \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad (8.2.6)$$

$$l(\theta)(v) = \int_D b(\theta) v \, dx + \int_{\Gamma_N} p_N v \, d\gamma, \quad (8.2.7)$$

$$\hat{l}(\theta)(v) = l(\theta)(v) + a(\theta)(u_D, v) \quad (8.2.8)$$

と定義する.  $u$  が問題 8.2.3 の解のとき, 任意の  $v \in U$  に対して,

$$\mathcal{L}_S(\theta, u, v) = 0$$

が成り立つ. この式は問題 8.2.3 の弱形式と同値である.

### 8.3 $\theta$ 型位相最適化問題

設計変数  $\theta$  と状態決定問題の解 (状態変数)  $u$  が定義されたので, それらを用いて  $\theta$  型位相最適化問題を定義しよう. ここでは一般的な評価関数を考えることにする.  $u$  を  $\theta \in \mathcal{D}$  に対する状態決定問題 (問題 8.2.3) の解として,  $i \in \{0, 1, \dots, m\}$  に対して, 評価関数を

$$\begin{aligned} f_i(\theta, u) &= \int_D \zeta_i(\theta, u, \nabla u) \, dx + \int_{\Gamma_N} \eta_{Ni}(u) \, d\gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma_D} \eta_{Di}(\phi^\alpha(\theta) \partial_\nu u) \, d\gamma - c_i \end{aligned} \quad (8.3.1)$$

とおく. ただし,  $c_i$  は定数で, すべての  $i \in \{1, \dots, m\}$  に対して  $f_i \leq 0$  を満たすある  $(\theta, \tilde{u}) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}$  が存在する (Slater 制約想定が満たされる) ように定められているとする. また,  $\zeta_i, \eta_{Ni}$  および  $\eta_{Di}$  は次のように与えられていると仮定する. これらの仮定は, のちに示される随伴問題 (問題 8.5.1) の解が適切な正則性をもつために必要とされる. 評価関数の 2 階  $\theta$  微分を得るためには, 2 階微分に対する仮定が必要となるが, ここでは省略する.

**仮定 8.3.1 (評価関数の正則性)** 式 (8.3.1) の評価関数  $f_i$  ( $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ ) では,  $\zeta_i \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ ,  $\eta_{Ni} \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ ,  $\eta_{Di} \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  を仮定し,  $(\theta, u, \nabla u, \partial_\nu u) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G}_{\Gamma_D}$  ( $\mathcal{G} = \{\nabla u \mid u \in \mathcal{S}\}$ ,  $\mathcal{G}_{\Gamma_D} = \{\partial_\nu u|_{\Gamma_D} \mid u \in \mathcal{S}\}$ ) に対して,

$$\begin{aligned} \zeta_i(\theta, u, \nabla u) &\in L^1(D; \mathbb{R}), \quad \zeta_{i\theta}(\theta, u, \nabla u) \in L^{q_R}(D; \mathbb{R}), \\ \zeta_{iu}(\theta, u, \nabla u) &\in L^{2q_R}(D; \mathbb{R}), \quad \zeta_{i(\nabla u)^\top}(\theta, u, \nabla u) \in W^{1, 2q_R}(D; \mathbb{R}^d), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_{N_i}(u) &\in L^1(\Gamma_N; \mathbb{R}), \quad \eta'_{N_i}(u) \in L^2(\Gamma_N; \mathbb{R}), \\ \eta_{D_i}(\phi^\alpha(\theta) \partial_\nu u) &\in L^1(\Gamma_D; \mathbb{R}), \quad \eta'_{D_i}(\phi^\alpha(\theta) \partial_\nu u) \in W^{1,2q_R}(\Gamma_D; \mathbb{R})\end{aligned}$$

であると仮定する. □

式 (8.3.1) の評価関数  $f_0, f_1, \dots, f_m$  を用いて, 抽象的最適設計問題 (問題 7.3.1) の枠組みに沿って,  $\theta$  型位相最適化問題を次のように定義する.

**問題 8.3.2 ( $\theta$  型位相最適化問題)**  $\mathcal{D}$  と  $\mathcal{S}$  をそれぞれ式 (8.1.4) と式 (8.2.2) とおく.  $f_0, \dots, f_m : X \times U \rightarrow \mathbb{R}$  は式 (8.3.1) で与えられているとする. このとき,

$$\min_{(\theta, u - u_D) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}} \{f_0(\theta, u) \mid f_1(\theta, u) \leq 0, \dots, f_m(\theta, u) \leq 0, \text{ 問題 8.2.3}\}$$

を満たす  $\theta$  を求めよ. □

第 7 章の抽象的最適設計問題に対する Lagrange 関数の定義 (式 (7.3.2)) にならって, 問題 8.3.2 に対する Lagrange 関数を

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\theta, u, v_0, v_1, \dots, v_m, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \\ = \mathcal{L}_0(\theta, u, v_0) + \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \lambda_i \mathcal{L}_i(\theta, u, v_i)\end{aligned} \quad (8.3.2)$$

とおく. ただし,  $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}^\top \in \mathbb{R}^m$  は  $f_1 \leq 0, \dots, f_m \leq 0$  に対する Lagrange 乗数である. また,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_i(\theta, u, v_i) &= f_i(\theta, u) + \mathcal{L}_S(\theta, u, v_i) \\ &= \int_D (\zeta_i(\theta, u, \nabla u) - \phi^\alpha(\theta) \nabla u \cdot \nabla v_i + b(\theta) v_i) dx \\ &\quad + \int_{\Gamma_N} (\eta_{N_i}(u) + p_N v_i) d\gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_D} \left\{ (u - u_D) \phi^\alpha(\theta) \partial_\nu v_i \right. \\ &\quad \left. + (v_i \phi^\alpha(\theta) \partial_\nu u - \eta_{D_i}(\phi^\alpha(\theta) \partial_\nu u)) \right\} d\gamma - c_i\end{aligned} \quad (8.3.3)$$

は  $f_i$  に対する Lagrange 関数である. ここで,  $\mathcal{L}_S$  は式 (8.2.4) で定義された問題 8.2.3 に対する Lagrange 関数である. また,  $v_i$  は  $f_i$  のために用意された状態決定問題に対する Lagrange 乗数で,  $v_i - \eta'_{D_i} \in U$  を仮定する. さらに,  $\theta$  型位相最適化問題に対する解法までを考えたときに,  $\tilde{v}_i = v_i - \eta'_{D_i}$  の許容集合 (随伴変数の許容集合) は  $\mathcal{S}$  の要素であることが必要となる.

## 8.4 最適解の存在

問題 8.3.2 に対する解の存在は、第 7 章の定理 7.4.4 によって保証される。そのためには、

$$\mathcal{F} = \{(\theta, \tilde{u}(\theta)) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S} \mid \text{問題 8.2.3}\} \quad (8.4.1)$$

のコンパクト性と  $f_0$  の連続性を示す必要がある。ここでは、 $\tilde{u} = u - u_D \in U$  とかくことにする。

$\mathcal{F}$  のコンパクト性は、次の補題によって示される。

**補題 8.4.1 ( $\mathcal{F}$  のコンパクト性)** 仮定 8.2.1 と仮定 8.2.2 が満たされているとする。このとき、 $\mathcal{D}$  において一様収束する  $X$  上の任意の Cauchy 列  $\theta_n \rightarrow \theta$  とそれらに対する問題 8.2.3 の解  $\tilde{u}_n = \tilde{u}(\theta_n) \in U$  ( $n \rightarrow \infty$ ) に対して、

$$\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u} \quad \text{strongly in } U$$

が成り立ち、 $\tilde{u} = \tilde{u}(\theta) \in U$  は問題 8.2.3 の解である。  $\square$

**証明**  $\theta_n$  に対する問題 8.2.3 の解  $\tilde{u}_n$  に対して、

$$\alpha_n \|\tilde{u}_n\|_U^2 \leq a(\theta_n)(\tilde{u}_n, \tilde{u}_n) = \hat{l}(\theta_n)(\tilde{u}_n) \leq \|\hat{l}(\theta_n)\|_{U'} \|\tilde{u}_n\|_U$$

が成り立つ。ただし、 $a(\theta_n)$  と  $\hat{l}(\theta_n)$  は式 (8.2.5) に従う。 $\alpha_n$  は  $a(\theta_n)$  の強圧性の定義で使われる正定数とする (例題 5.2.5 の解答 (1))。ここで、 $\theta_n \rightarrow \theta$  が  $\mathcal{D}$  において一様収束するとき、 $\alpha_n$  は  $n$  に依存しない正定数  $\alpha$  に置き換えられる。 $\|\hat{l}(\theta_n)\|_{U'} = \|l(\theta_n) + a(\theta_n)(u_D, \cdot)\|_{U'}$  ( $l(\theta_n)$  は式 (8.2.5) に従う) が有界となることは、 $\mathcal{D}$  において一様収束する  $\theta_n \rightarrow \theta$  に対して、 $\phi^\alpha(\theta_n) \rightarrow \phi^\alpha(\theta)$  が成り立つもとの、例題 5.2.5 の解答 (3) を用いて示される。ただし、例題 5.2.5 の  $\hat{l}(v)$  と  $\Omega$  をそれぞれ  $\hat{l}(\theta_n)(v)$  と  $D$  に置き換える。そこで、 $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}$  weakly in  $U$  なる部分列が存在することになる。

次に、この  $\tilde{u}$  が  $\theta$  に対する問題 8.2.3 の解になることを示す。問題 8.2.3 の定義より、任意の  $v \in U$  に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a(\theta_n)(\tilde{u}_n, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{l}(\theta_n)(v) \quad (8.4.2)$$

が成り立つ。式 (8.4.2) の右辺は、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{l}(\theta_n)(v) = \hat{l}(\theta)(v) \quad (8.4.3)$$

となる。実際、仮定 8.2.1 より、

$$\begin{aligned} \left| \hat{l}(\theta_n)(v) - \hat{l}(\theta)(v) \right| &= \left| \int_D (b(\theta_n) - b(\theta)) v \, dx \right| \\ &\leq \|b(\theta_n) - b(\theta)\|_{L^2(D; \mathbb{R})} \|v\|_{L^2(D; \mathbb{R})} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立つ. 式 (8.4.2) の左辺は,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a(\theta_n)(\tilde{u}_n, v) = a(\theta)(\tilde{u}, v) \quad (8.4.4)$$

となる. 実際,  $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}$  weakly in  $U$  が示されているので,

$$\begin{aligned} & |a(\theta_n)(\tilde{u}_n, v) - a(\theta)(\tilde{u}, v)| \\ &= \left| \int_D (\phi^\alpha(\theta_n) - \phi^\alpha(\theta)) \nabla \tilde{u}_n \cdot \nabla v \, dx \right| + \left| \int_D \phi^\alpha(\theta) \nabla (\tilde{u}_n - \tilde{u}) \cdot \nabla v \, dx \right| \\ &\leq \|\phi^\alpha(\theta_n) - \phi^\alpha(\theta)\|_{C^{0,1}(D;\mathbb{R})} \|\tilde{u}_n\|_{H^1(D;\mathbb{R})} \|v\|_{H^1(D;\mathbb{R})} + |a(\theta)(\tilde{u}_n - \tilde{u}, v)| \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立つ. 式 (8.4.3) と式 (8.4.4) を式 (8.4.2) に代入すれば, 問題 8.2.3 の弱形式を得る. すなわち,  $\tilde{u} = \tilde{u}(\theta) \in U$  は問題 8.2.3 の解である.

$\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  の  $u$  への弱収束が示されているので, 強収束は,

$$\|u_n\|_U \rightarrow \|u\|_U \quad (n \rightarrow \infty) \quad (8.4.5)$$

を示すことで確かめられる. 実際,  $U$  上のノルムを, 式 (8.2.6) の  $a(\theta)$  を用いて,

$$\|v\| = a(\theta)(v, v)$$

とおけば,

$$\begin{aligned} \|u_n\| &= a(\theta)(u_n, u_n) = a(\theta - \theta_n)(u_n, u_n) + a(\theta_n)(u_n, u_n) \\ &= \int_D (\phi^\alpha(\theta) - \phi^\alpha(\theta_n)) \nabla u_n \cdot \nabla u_n \, dx + l(\theta_n)(u_n) \\ &\rightarrow l(\theta)(u) = \|u\| \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (8.4.6)$$

が成り立つ. よって,  $u_n \rightarrow u$  strongly in  $U$  が示された.  $\square$

$\tilde{u}(\theta)$  が  $S$  に入ることは, 仮定 8.2.1 と仮定 8.2.2 を満たすように問題 8.2.3 を設定することによって保証される.

$f_0$  の連続性は,

$$S = \{(\theta, \tilde{u}(\theta)) \in \mathcal{F} \mid f_1(\theta, u(\theta)) \leq 0, \dots, f_m(\theta, u(\theta)) \leq 0\} \quad (8.4.7)$$

上で  $f_0$  が連続であることを示すことである. ここでは,  $f_i$  ( $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ ) の連続性を次の補題で示し,  $S$  は空集合ではないと仮定して,  $f_0$  の連続性を示すことにする.

**補題 8.4.2 ( $f_i$  の連続性)**  $f_i$  は, 仮定 8.3.1 を満たすように式 (8.3.1) で与えられるとする.  $D$  において一様収束する  $X$  上の任意の Cauchy 列  $\theta_n \rightarrow \theta$  に対して, 補題 8.4.1 で決定される  $u_n \rightarrow u$  strongly in  $U$  は  $\Gamma_D$  上で  $\|\partial_\nu u_n - \partial_\nu u\|_{L^2(\Gamma_D;\mathbb{R})} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) を満たすとする. このとき,  $f_i$  は  $\theta \in \mathcal{D}$  に対して連続である.  $\square$

**証明**  $D$  において一様収束する  $\theta_n \rightarrow \theta$  のときに,

$$\begin{aligned} |f_i(\theta_n, u_n) - f_i(\theta, u)| &\leq \left| \int_D (\zeta_i(\theta_n, u_n, \nabla u_n) - \zeta_i(\theta, u, \nabla u)) dx \right| \\ &\quad + \left| \int_{\Gamma_N} (\eta_{Ni}(u_n) - \eta_{Ni}(u)) d\gamma \right| \\ &\quad + \left| \int_{\Gamma_D} (\eta_{Di}(\phi^\alpha(\theta_n) \partial_\nu u_n) - \eta_{Di}(\phi^\alpha(\theta) \partial_\nu u)) d\gamma \right| \\ &= e_D + e_{\Gamma_N} + e_{\Gamma_D} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (8.4.8)$$

を示せば証明は完了する.  $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}$  weakly in  $U$  と仮定 8.3.1 より,  $e_D \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) を得る. 実際,  $\tilde{\zeta}_i(t) = \zeta_i(t\theta_n + (1-t)\theta, tu_n + (1-t)u, t\nabla u_n + (1-t)\nabla u)$  ( $t \in [0, 1]$ ) とかくとき,

$$\begin{aligned} e_D &\leq \sup_{t \in [0, 1]} \left| \int_D \tilde{\zeta}_{i\theta}(t) [\theta_n - \theta] dx \right| + \sup_{t \in [0, 1]} \left| \int_D \tilde{\zeta}_{iu}(t) [u_n - u] dx \right| \\ &\quad + \sup_{t \in [0, 1]} \left| \int_D \tilde{\zeta}_{i\nabla u}(t) [\nabla u_n - \nabla u] dx \right| \\ &\leq \sup_{t \in [0, 1]} \left\| \tilde{\zeta}_{i\theta}(t) \right\|_{L^{q_R}(D; \mathbb{R})} \|\theta_n - \theta\|_X + \sup_{t \in [0, 1]} \left\| \tilde{\zeta}_{iu}(t) \right\|_{L^{2q_R}(D; \mathbb{R})} \|u_n - u\|_U \\ &\quad + \sup_{t \in [0, 1]} \left\| \tilde{\zeta}_{i\nabla u}(t) \right\|_{W^{1, 2q_R}(D; \mathbb{R}^d)} \|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^2(D; \mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

が成り立つ. 同様に,  $e_{\Gamma_N} \rightarrow 0$  が成り立つ.  $e_{\Gamma_D} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) は, 次のように得られる.  $\tilde{\eta}_{Di}(t) = \eta_{Di}(\phi^\alpha(t\theta_n + (1-t)\theta)(t\partial_\nu u_n + (1-t)\partial_\nu u))$  ( $t \in [0, 1]$ ) とかくとき,

$$\begin{aligned} e_{\Gamma_D} &\leq \sup_{t \in [0, 1]} \left| \int_{\Gamma_D} \tilde{\eta}'_{Di}(t) [\phi^\alpha(\theta_n) \partial_\nu u_n - \phi^\alpha(\theta) \partial_\nu u] dx \right| \\ &= \sup_{t \in [0, 1]} \left| \int_{\Gamma_D} \tilde{\eta}'_{Di}(t) [(\phi^\alpha(\theta_n) - \phi^\alpha(\theta)) \partial_\nu u_n + \phi^\alpha(\theta) (\partial_\nu u_n - \partial_\nu u)] dx \right| \\ &\leq \|\gamma_{\Gamma_D}\|^3 \sup_{t \in [0, 1]} \left\| \tilde{\eta}'_{Di}(t) \right\|_{W^{1, 2q_R}(D; \mathbb{R})} \\ &\quad \times \left( \|\theta_n - \theta\|_X \|\partial_\nu u_n\|_{L^2(\Gamma_D; \mathbb{R})} + \|\theta\|_X \|\partial_\nu u_n - \partial_\nu u\|_{L^2(\Gamma_D; \mathbb{R})} \right) \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, トレース作用素  $\|\gamma_{\Gamma_D}\|$  (式 (5.2.4)) の有界性が使われた. そこで, 式 (8.4.8) を得る.  $\square$

補題 8.4.1 によって  $\mathcal{F}$  のコンパクト性が示され, 補題 8.4.2 と  $S$  が空でない条件が満たされたときに  $f_0$  の連続性が確認される. そのとき, 定理 7.4.4 (最適解の存在) より, 問題 8.3.2 の解は存在する.

問題 8.3.2 の解について次のことを補足しておく.

**注意 8.4.3 (最適解の存在)** 式 (8.4.1) で定義された  $\mathcal{F}$  のコンパクト性は, 式 (8.1.4) で定義された  $\theta$  の許容集合  $D$  のコンパクト性に基づいている. 式 (8.1.4) では, 正定数  $\beta$  に対して,  $\max \left\{ \|\theta\|_{H^2(D; \mathbb{R})}, \|\theta\|_{C^{0,1}(D; \mathbb{R})} \right\} \leq \beta$  を満たすことを要請してい

る。この条件は、第 1 章において側面制約とよんだ条件に対応する。このような側面制約は、通常、無視されるが、有効になった場合には不等式制約の一つとして考慮されなければならない。□

また、設計変数の線形空間  $X$  と許容集合  $\mathcal{D}$  の選び方について次のことを補足しておく。

**注意 8.4.4 ( $X$  と  $\mathcal{D}$  の選び方)** 問題 8.3.2 に対する解の存在は、第 7 章の定理 7.4.4 によって保証された。そこでは、 $\mathcal{D}$  は  $X$  上のコンパクト部分集合であるように選ぶ必要があった。本章では、 $X$  を  $H^1$  級の関数空間に選び、 $\mathcal{D}$  を  $H^2 \cap C^{0,1}$  級の関数の集合に選ぶことで、Rellich-Kondrachov のコンパクト埋蔵定理 (定理 4.4.15) によってこの関係を成立させた。しかしながら、それ以外の選択方法もある。実際、 $X$  を  $C^0$  級の関数空間に選び、 $\mathcal{D}$  を  $C^{0,1}$  級の関数の集合に選ぶことも可能である。この場合、Ascoli-Arzelà の定理 (定理 A.10.1) により、 $\mathcal{D}$  は  $X$  上のコンパクト部分集合であることが保証される [15, Theorem 2.1 の証明, p. 16]。それらを選んだ場合には、解の存在を示すために使われた上記の仮定と補題は変更される。本書では Hilbert 空間上の勾配法を考えることから、 $X$  と  $\mathcal{D}$  を上記のように選択した。□

## 8.5 評価関数の微分

問題 8.3.2 の解が存在する条件は満たされていると仮定して、これ以降、その解を求める方法について考えていくことにする。設計変数  $\theta$  の変動に対する評価関数  $f_i$  の Fréchet 微分を  $\theta$  微分とよぶことにする。 $f_i$  の  $\theta$  微分を、7.5.2 項でみてきたような Lagrange 乗数法で求めてみよう。さらに、7.5.3 項でみてきたような方法で  $f_i$  の 2 階  $\theta$  微分を求めてみよう。

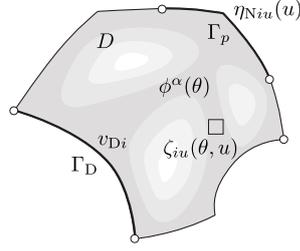
### 8.5.1 評価関数の $\theta$ 微分

式 (8.3.3) で定義された  $f_i$  の Lagrange 関数  $\mathcal{L}_i$  に注目する。 $(\theta, u, v_i)$  の任意変動  $(\vartheta, \hat{u}, \hat{v}_i) \in X \times U \times U$  に対する  $\mathcal{L}_i$  の Fréchet 微分は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_i(\theta, u, v_i)[\vartheta, \hat{u}, \hat{v}_i] \\ = \mathcal{L}_{i\theta}(\theta, u, v_i)[\vartheta] + \mathcal{L}_{iu}(\theta, u, v_i)[\hat{u}] + \mathcal{L}_{iv_i}(\theta, u, v_i)[\hat{v}_i] \end{aligned} \quad (8.5.1)$$

となる。式 (8.5.1) の右辺第 3 項は、

$$\mathcal{L}_{iv_i}(\theta, u, v_i)[\hat{v}_i] = \mathcal{L}_{Sv_i}(\theta, u, v_i)[\hat{v}_i] = \mathcal{L}_S(\theta, u, \hat{v}_i) \quad (8.5.2)$$

図 8.8:  $f_i$  に対する随伴問題

となる. 式 (8.5.2) は状態決定問題 (問題 8.2.3) の Lagrange 関数になっている. ここで,  $u$  が状態決定問題の弱解であるならば, 式 (8.5.1) の右辺第 3 項は 0 となる.

また, 式 (8.5.1) の右辺第 2 項は,

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{iu}(\theta, u, v_i)[\hat{u}] \\ &= \int_D \left( -\phi^\alpha(\theta) \nabla v_i \cdot \nabla \hat{u} + \zeta_{iu} \hat{u} + \zeta_{i(\nabla u)^\top} \cdot \nabla \hat{u} \right) dx \\ & \quad + \int_{\Gamma_N} \eta'_{Ni} \hat{u} \, d\gamma + \int_{\Gamma_D} \{ \hat{u} \phi^\alpha(\theta) \partial_\nu v + (v_i - \eta'_{Di}) \phi^\alpha(\theta) \partial_\nu \hat{u} \} \, d\gamma \quad (8.5.3) \end{aligned}$$

となる. ただし,  $\zeta_{iu}(\theta, u, \nabla u)[\hat{u}]$ ,  $\zeta_{i(\nabla u)^\top}(\theta, u, \nabla u)[\nabla \hat{u}]$ ,  $\eta'_{Ni}(u)[\hat{u}]$  および  $\eta'_{Di}(u)[\phi^\alpha(\theta) \partial_\nu \hat{u}]$  をそれぞれ  $\zeta_{iu} \hat{u}$ ,  $\zeta_{i(\nabla u)^\top} \cdot \nabla \hat{u}$ ,  $\eta'_{Ni} \hat{u}$ ,  $\eta'_{Di} \phi^\alpha(\theta) \partial_\nu \hat{u}$  とかいた. ここで, 式 (8.5.3) がゼロとなるように  $v_i$  が決定されれば, 式 (8.5.1) の右辺第 2 項は 0 となる. この関係は, 次の  $f_i$  に対する随伴問題の弱形式になっている. そこで,  $v_i$  が問題 8.5.1 の弱解のときに式 (8.5.1) の右辺第 2 項は 0 となる. 問題 8.5.1 の境界条件は図 8.5.1 のようになる.

**問題 8.5.1 ( $f_i$  に対する随伴問題)**  $\theta \in \mathcal{D}^\circ$  に対して問題 8.2.3 の解  $u$  が与えられたとき,

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\phi^\alpha(\theta) \nabla v_i) &= \zeta_{iu}(\theta, u, \nabla u) - \nabla \cdot (\zeta_{i(\nabla u)^\top}(\theta, u, \nabla u)) \quad \text{in } D, \\ \phi^\alpha(\theta) \partial_\nu v_i &= \eta'_{Ni}(u) + \zeta_{i(\nabla u)^\top} \cdot \boldsymbol{\nu} \quad \text{on } \Gamma_N, \\ v_i &= \eta'_{Di} \quad \text{on } \Gamma_D \end{aligned}$$

を満たす  $v_i : D \rightarrow \mathbb{R}$  を求めよ.  $\square$

状態決定問題の解  $u$  と同様に, 仮定 8.3.1 と仮定 8.2.2 が満たされているとき, 問題 8.5.1 の解  $\tilde{v}_i = v_i - \eta'_{Di}$  は  $S$  に入ることが保証される.

さらに, 式 (8.5.1) の右辺第 1 項は,

$$\mathcal{L}_{i\theta}(\theta, u, v_i)[\vartheta]$$

$$\begin{aligned}
&= \int_D (\zeta_{i\theta} + b'v_i - \alpha\phi^{\alpha-1}\phi' \nabla u \cdot \nabla v_i) \vartheta \, dx \\
&\quad + \int_{\Gamma_D} \alpha\phi^{\alpha-1}\phi' \{(u - u_D) \partial_\nu v_i + (v_i - \eta'_{Di}) \partial_\nu u\} \, d\gamma
\end{aligned} \tag{8.5.4}$$

となる.

そこで,  $u$  と  $v_i$  はそれぞれ問題 8.2.3 と問題 8.5.1 の弱解であるとする. このときの  $f_i(\theta, u)$  を  $\tilde{f}_i(\theta)$  とかくことにすれば,

$$\tilde{f}'_i(\theta)[\vartheta] = \mathcal{L}_{i\theta}(\theta, u, v_i)[\vartheta] = \langle g_i, \vartheta \rangle \tag{8.5.5}$$

のようにかかる. ここで,

$$g_i = \zeta_{i\theta} + b'v_i - \alpha\phi^{\alpha-1}\phi' \nabla u \cdot \nabla v_i \tag{8.5.6}$$

となる.  $\phi(\theta)$  に式 (8.1.1) を用いたときには,

$$\phi'(\theta) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+\theta^2} \tag{8.5.7}$$

となる. また, 式 (8.1.2) を用いたときには,

$$\phi'(\theta) = \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \theta \tag{8.5.8}$$

となる.

以上のことから,  $f_i$  の  $\theta$  微分  $g_i$  について次のような結果が得られる.

**定理 8.5.2** ( $f_i$  の  $\theta$  微分)  $\theta \in D^\circ$  に対して,  $u$  と  $v_i$  を問題 8.2.3 と問題 8.5.1 の弱解とし, それらは式 (8.2.2) の  $S$  に入る (仮定 8.2.1, 仮定 8.2.2 および仮定 8.3.1 が満たされる) とする. このとき,  $f_i$  の  $\theta$  微分は式 (8.5.5) となり, 式 (8.5.6) の  $g_i$  は  $X'$  に入る. さらに,  $g_i \in L^{q_R}(D; \mathbb{R})$  となる.  $\square$

**証明**  $f_i$  の  $\theta$  微分が式 (8.5.5) の  $g_i$  となることは上でみてきたとおりである.  $g_i$  の正則性に関しては次のような結果が得られる. 式 (8.5.5) に Hölder の不等式 (定理 A.9.1) と Poincaré の不等式の系 (系 A.9.4) を適用すれば,

$$\begin{aligned}
&|\langle g_i, \vartheta \rangle|_{L^1(D; \mathbb{R})} \\
&\leq \left( \|\zeta_{i\theta}\|_{L^{q_R}(D; \mathbb{R})} + \|b'\|_{L^{2q_R}(D; \mathbb{R})} \|v_i\|_{L^{2q_R}(D; \mathbb{R})} \right. \\
&\quad \left. + \|\alpha\phi^{\alpha-1}\phi'\|_{C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})} \|\nabla u\|_{L^{2q_R}(D; \mathbb{R}^d)} \|\nabla v_i\|_{L^{2q_R}(D; \mathbb{R}^d)} \right) \|\vartheta\|_{L^2(D; \mathbb{R})} \\
&\leq \left( \|\zeta_{i\theta}\|_{L^{q_R}(D; \mathbb{R})} + \|b'\|_{L^{2q_R}(D; \mathbb{R})} \|v_i\|_{L^{2q_R}(D; \mathbb{R})} \right. \\
&\quad \left. + \|\alpha\phi^{\alpha-1}\phi'\|_{C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})} \|u\|_{W^{1, 2q_R}(D; \mathbb{R})} \|v_i\|_{W^{1, 2q_R}(D; \mathbb{R})} \right) \|\vartheta\|_X
\end{aligned}$$

が得られる. 上式右辺の ( ) は仮定によりすべて有界である. よって,  $g_i$  は  $X'$  に入る. また, ( ) 内の各項はすべて  $L^{q_R}(D; \mathbb{R})$  に入ることから,  $g_i \in L^{q_R}(D; \mathbb{R})$  が得られる.  $\square$

定理 8.5.2 より,  $\theta$  型位相最適化問題の正則性について次のことがいえる.

**注意 8.5.3 ( $\theta$  型位相最適化問題の不正則性)** 定理 8.5.2 において, 仮定 8.2.1, 仮定 8.2.2 および仮定 8.3.1 をより厳しくして,  $u$  と  $v_i$  が  $W^{2,\infty}(D; \mathbb{R})$  に入るような問題を構成すれば,  $g_i$  は  $C^{0,1}(D; \mathbb{R})$  に入るようになる. このときには,  $-g_i$  を  $\vartheta$  におきかえるような勾配法で更新された設計変数  $\theta + \epsilon\vartheta$  ( $\epsilon$  は正定数) は設計変数の許容集合  $\mathcal{D}$  に入ることになる. しかし, そのような場合には, 仮定 8.2.2 で許容された角点や Dirichlet 境界と Neumann 境界の境界がない Robin 問題を考えるか, あるいはそのような点の近傍を  $\bar{\Omega}_C$  に含めて,  $\theta$  を固定するなどの工夫が必要となる.

それらの工夫をしない場合には,  $g_i$  は  $C^{0,1}(D; \mathbb{R})$  には入らないことになる. そこで,  $-g_i$  を  $\vartheta$  におきかえるような勾配法では,  $\theta + \epsilon\vartheta$  は設計変数の許容集合  $\mathcal{D}$  には入らないことになる. この結果は, 図 8.0.5 のようなチェッカーボードパターンが現れる数値不安定現象の一因になると考えられる.  $\square$

## 8.5.2 評価関数の 2 階 $\theta$ 微分

さらに, 設計変数の変動に対する評価関数の 2 階微分 (Hesse 形式) を求めてみよう. すでに, 7.5.3 項において, 抽象的最適設計問題に対する評価関数の 2 階 Fréchet 微分の求め方について示されている. ここでは, その求め方に従って, 式 (8.3.1) で与えられた  $f_i$  に対して,  $\tilde{f}_i$  の 2 階  $\theta$  微分を求めてみよう.

$\tilde{f}_i$  の 2 階  $\theta$  微分を得るために, 次の仮定を設ける.

**仮定 8.5.4 ( $\tilde{f}_i$  の 2 階  $\theta$  微分)** 状態決定問題 (問題 8.2.3) と式 (8.3.1) で定義された評価関数  $f_i$  に対して, それぞれ

- (1)  $b$  は  $\theta$  の関数ではない
- (2)  $\zeta_i$  は  $u$  の関数ではない ( $\theta$  と  $\nabla u$  の関数ではある)

と仮定する.  $\square$

$f_i$  の Lagrange 関数  $\mathcal{L}_i$  は式 (8.3.3) によって定義されている.  $(\theta, u)$  を設計変数とみなし, その許容集合と許容方向集合を

$$S = \{(\theta, u) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S} \mid \mathcal{L}_S(\theta, u, v) = 0 \text{ for all } v \in U\},$$

$$T_S(\theta, u) = \{(\vartheta, \hat{v}) \in X \times U \mid \mathcal{L}_{S\theta u}(\theta, u, v)[\vartheta, \hat{v}] = 0 \text{ for all } v \in U\}$$

とおく. このとき,  $(\theta, u) \in S$  の任意変動  $(\vartheta_1, \hat{v}_1), (\vartheta_2, \hat{v}_2) \in T_S(\theta, u)$  に対する  $\mathcal{L}_i$  の 2 階 Fréchet 偏微分は, 式 (7.5.21) と同様,

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{i(\theta, u)(\theta, u)}(\theta, u, v_i)[(\vartheta_1, \hat{v}_1), (\vartheta_2, \hat{v}_2)] \\ &= \mathcal{L}_{i\theta\theta}(\theta, u, v_i)[\vartheta_1, \vartheta_2] + \mathcal{L}_{i\theta u}(\theta, u, v_i)[\vartheta_1, \hat{v}_2] \\ & \quad + \mathcal{L}_{i\theta u}(\theta, u, v_i)[\vartheta_2, \hat{v}_1] + \mathcal{L}_{iuu}(\theta, u, v_i)[\hat{v}_1, \hat{v}_2] \end{aligned} \quad (8.5.9)$$

となる. 式 (8.5.9) 右辺の各項は,

$$\mathcal{L}_{i\theta\theta}(\theta, u, v_i)[\vartheta_1, \vartheta_2] = \int_D \{ \zeta_{i\theta\theta} - (\phi^\alpha(\theta))'' \nabla u \cdot \nabla v_i \} \vartheta_1 \vartheta_2 \, dx, \quad (8.5.10)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{i\theta u}(\theta, u, v_i)[\vartheta_1, \hat{v}_2] \\ &= \int_D \{ \zeta_{i\theta(\nabla u)^\top} \cdot \nabla \hat{v}_2 - (\phi^\alpha(\theta))' \nabla \hat{v}_2 \cdot \nabla v_i \} \vartheta_1 \, dx, \end{aligned} \quad (8.5.11)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{iu\theta}(\theta, u, v_i)[\vartheta_2, \hat{v}_1] \\ &= \int_D \{ \zeta_{i\theta(\nabla u)^\top} \cdot \nabla \hat{v}_1 - (\phi^\alpha(\theta))' \nabla \hat{v}_1 \cdot \nabla v_i \} \vartheta_2 \, dx, \end{aligned} \quad (8.5.12)$$

$$\mathcal{L}_{iuu}(\theta, u, v_i)[\hat{v}_1, \hat{v}_2] = 0 \quad (8.5.13)$$

となる. ただし,  $u - u_D, v_i - \eta'_{Di}, \hat{v}_1$  および  $\hat{v}_2$  は  $\Gamma_D$  上でゼロとなることを用いた. また,

$$(\phi^\alpha(\theta))' = \alpha \phi^{\alpha-1}(\theta) \phi'(\theta), \quad (8.5.14)$$

$$(\phi^\alpha(\theta))'' = \alpha(\alpha-1) \phi^{\alpha-2}(\theta) \phi'^2(\theta) + \alpha \phi^{\alpha-1}(\theta) \phi''(\theta) \quad (8.5.15)$$

である.

一方,  $j \in \{1, 2\}$  を用いて, 任意変動  $(\vartheta_j, \hat{v}_j) \in T_S(\theta, u)$  に対する状態決定問題の Lagrange 関数  $\mathcal{L}_S$  の Fréchet 偏微分は, 任意の  $v \in U$  に対して

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{S\theta u}(\theta, u, v)[\vartheta_j, \hat{v}_j] \\ &= \int_D \{ -(\phi^\alpha(\theta))' \vartheta_j \nabla u - \phi^\alpha(\theta) \nabla \hat{v}_j \} \cdot \nabla v \, dx \\ &= 0 \end{aligned} \quad (8.5.16)$$

となる. ただし,  $v$  と  $\hat{v}_j$  は  $\Gamma_D$  上でゼロとなることを使った. 式 (8.5.16) より,

$$\nabla \hat{v}_j = -\frac{(\phi^\alpha(\theta))'}{\phi^\alpha(\theta)} \vartheta_j \nabla u \quad \text{in } D \quad (8.5.17)$$

が得られる.

そこで、式 (8.5.17) の  $\hat{v}_j$  を式 (8.5.9) の  $\hat{u}_j$  に代入し、状態決定問題と  $f_1, \dots, f_m$  に対する随伴問題の Dirichlet 境界条件と  $\Gamma_D$  上で  $\hat{v}_j = 0$  を考慮すれば、

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{i\theta u}(\theta, u, v_i)[\vartheta_1, \hat{v}_2] \\ &= \mathcal{L}_{iu\theta}(\theta, u, v_i)[\hat{v}_1, \vartheta_2] \\ &= \int_D \frac{(\phi^\alpha(\theta))'}{\phi^\alpha(\theta)} \left\{ (\phi^\alpha(\theta))' \nabla v_i - \zeta_{i\theta}(\nabla u)^\top \right\} \cdot \nabla u \vartheta_1 \vartheta_2 \, dx \end{aligned} \quad (8.5.18)$$

が得られる。

以上の結果をまとめれば、 $\tilde{f}_i$  の 2 階  $\theta$  微分は、式 (8.5.10)、式 (8.5.13) および式 (8.5.18) より、

$$\begin{aligned} & h_i(\theta, u, v_i)[\vartheta_1, \vartheta_2] \\ &= \int_D \left[ \left\{ 2 \frac{(\phi^\alpha(\theta))'^2}{\phi^\alpha(\theta)} - (\phi^\alpha(\theta))'' \right\} \nabla u \cdot \nabla v_i \right. \\ & \quad \left. + \zeta_{i\theta\theta} - 2 \frac{(\phi^\alpha(\theta))'}{\phi^\alpha(\theta)} \zeta_{i\theta}(\nabla u)^\top \cdot \nabla u \right] \vartheta_1 \vartheta_2 \, dx \\ &= \int_D \left( \beta(\alpha, \theta) \nabla u \cdot \nabla v_i + \zeta_{i\theta\theta} - 2\alpha \frac{\phi'(\theta)}{\phi(\theta)} \zeta_{i\theta}(\nabla u)^\top \cdot \nabla u \right) \vartheta_1 \vartheta_2 \, dx \end{aligned} \quad (8.5.19)$$

となる。ただし、

$$\beta(\alpha, \theta) = \alpha(\alpha+1)\phi^{\alpha-2}(\theta)\phi'^2(\theta) - \alpha\phi^{\alpha-1}(\theta)\phi''(\theta) \quad (8.5.20)$$

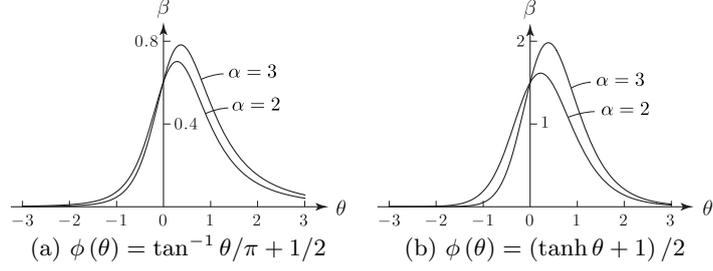
とおいた。 $\phi(\theta)$  が式 (8.1.1) あるいは式 (8.1.2) で与えられたときには、それぞれ

$$\begin{aligned} \beta(\alpha, \theta) &= \alpha(\alpha+1) \left( \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \theta + \frac{1}{2} \right)^{\alpha-2} \left\{ \frac{1}{\pi(1+\theta^2)} \right\}^2 \\ & \quad - \alpha \left( \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \theta + \frac{1}{2} \right)^{\alpha-1} \left\{ -\frac{2\theta}{\pi(1+\theta^2)^2} \right\} \end{aligned} \quad (8.5.21)$$

あるいは

$$\begin{aligned} \beta(\alpha, \theta) &= \alpha(\alpha+1) \left( \frac{1}{2} \tanh \theta + \frac{1}{2} \right)^{\alpha-2} \left( \frac{\operatorname{sech}^2 \theta}{2} \right)^2 \\ & \quad - \alpha \left( \frac{1}{2} \tanh \theta + \frac{1}{2} \right)^{\alpha-1} (-\operatorname{sech}^2 \theta \tanh \theta) \end{aligned} \quad (8.5.22)$$

となる。図 8.5.2 は、 $\beta(\alpha, \theta)$  のグラフを示す。それらのグラフより、 $\beta(\alpha, \theta) > 0$  が成り立つことが確認される。さらに、式 (8.5.19) 右辺の ( ) 内の残りの項が正で有界となれば、 $h_i(\theta, u, v_i)[\cdot, \cdot]$  は  $X$  上の強圧的かつ有界な双 1 次形式となる。

図 8.9: 評価関数の 2 階  $\theta$  微分における係数関数  $\beta(\alpha, \theta)$ 

### 8.5.3 Lagrange 乗数法による評価関数の 2 階 $\theta$ 微分

評価関数の 2 階  $\theta$  微分を Lagrange 乗数法を用いて求める場合には、次のようになる。式 (8.5.5) の  $\tilde{f}'_i(\theta)[\vartheta_1] = \langle g_i, \vartheta_1 \rangle$  に対する Lagrange 関数を

$$\mathcal{L}_i(\theta, u, v_i, w_i, z_i) = \langle g_i, \vartheta_1 \rangle + \mathcal{L}_S(\theta, u, w_i) + \mathcal{L}_{A_i}(\theta, v_i, z_i) \quad (8.5.23)$$

とおく。ここで、 $\mathcal{L}_S$  は式 (8.2.4) で与えられる。また、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{A_i}(\theta, v_i, z_i) &= \int_D \left( -\phi^\alpha(\theta) \nabla v_i \cdot \nabla z_i + \zeta_{iu} z_i + \zeta_{i(\nabla u)^\top} \cdot \nabla z_i \right) dx \\ &+ \int_{\Gamma_N} \eta'_{N_i} z_i \, d\gamma + \int_{\Gamma_D} \{ z_i \phi^\alpha(\theta) \partial_\nu v + (v_i - \eta'_{D_i}) \phi^\alpha(\theta) \partial_\nu z_i \} \, d\gamma \end{aligned} \quad (8.5.24)$$

は、 $f_i$  に対する随伴問題 (問題 8.5.1) の Lagrange 関数である。  $w_i \in U$  と  $z_i \in U$  は、 $g_i$  が  $u$  と  $v_i$  の関数であるために用意された随伴変数である。  $\vartheta_1$  は  $\mathcal{L}_i$  においては定ベクトルとみなす。

$(\theta, u, v_i, w_i, z_i)$  の任意変動  $(\vartheta_2, \hat{u}, \hat{v}_i, \hat{w}_i, \hat{z}_i) \in X \times U^4$  に対する  $\mathcal{L}_i$  の Fréchet 微分は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_i(\theta, u, v_i, w_i, z_i)[\vartheta_2, \hat{u}, \hat{v}_i, \hat{w}_i, \hat{z}_i] &= \mathcal{L}_{i\theta}(\theta, u, v_i, w_i, z_i)[\vartheta_2] + \mathcal{L}_{iu}(\theta, u, v_i, w_i, z_i)[\hat{u}] \\ &+ \mathcal{L}_{iv_i}(\theta, u, v_i, w_i, z_i)[\hat{v}_i] + \mathcal{L}_{iw_i}(\theta, u, v_i, w_i, z_i)[\hat{w}_i] \\ &+ \mathcal{L}_{iz_i}(\theta, u, v_i, w_i, z_i)[\hat{z}_i] \end{aligned} \quad (8.5.25)$$

となる。式 (8.5.25) の右辺第 4 項は、 $u$  が状態決定問題の解ならばゼロとなる。また、式 (8.5.25) の右辺第 5 項は、 $v_i$  が随伴問題の解のときゼロとなる。

また、式 (8.5.25) の右辺第 2 項は、

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{1iu}(\theta, u, v_i, w_i, z_i)[\hat{u}] \\ &= \int_D \{(\zeta_{i\theta u} \hat{u} - \alpha \phi^{\alpha-1} \phi' \nabla v_i \cdot \nabla \hat{u}) \vartheta_1 - \phi^\alpha \nabla w_i \cdot \nabla \hat{u}\} dx \end{aligned} \quad (8.5.26)$$

となる。そこで、任意の  $\hat{u} \in U$  に対して式 (8.5.26) がゼロとなる条件は、 $w_i$  を次の随伴問題の解とおくことと同値である。

**問題 8.5.5** ( $\langle g_i, \vartheta_1 \rangle$  に対する  $w_i$  の随伴問題) 問題 8.3.2 の仮定のもとで、 $\vartheta_1 \in X$  が与えられたとき、

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\phi^\alpha \nabla w_i) &= (\nabla \cdot (\alpha \phi^{\alpha-1} \phi' \nabla v_i) + \zeta_{i\theta u}) \vartheta_1 \quad \text{in } D, \\ \phi^\alpha \partial_\nu w_i &= \alpha \phi^{\alpha-1} \phi' \partial_\nu v_i \vartheta_1 \quad \text{on } \Gamma_N, \\ w_i &= 0 \quad \text{on } \Gamma_D \end{aligned}$$

を満たす  $w_i = w_i(\vartheta_1) \in U$  を求めよ。□

式 (8.5.25) の右辺第 3 項は、

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{1iv_i}(\theta, u, v_i, w_i, z_i)[\hat{v}_i] \\ &= \int_D \{(b' \hat{v}_i - \alpha \phi^{\alpha-1} \phi' \nabla u \cdot \nabla \hat{v}_i) \vartheta_1 - \phi^\alpha \nabla z_i \cdot \nabla \hat{v}_i\} dx \end{aligned} \quad (8.5.27)$$

となる。任意の  $\hat{v}_i \in U$  に対して式 (8.5.27) がゼロとなる条件は、 $z_i$  を次の随伴問題の解とおくことと同値である。

**問題 8.5.6** ( $\langle g_i, \vartheta_1 \rangle$  に対する  $z_i$  の随伴問題) 問題 8.3.2 の仮定のもとで、 $\vartheta_1 \in X$  が与えられたとき、

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\phi^\alpha \nabla z_i) &= (\nabla \cdot (\alpha \phi^{\alpha-1} \phi' \nabla u) + b') \vartheta_1 \quad \text{in } D, \\ \phi^\alpha \partial_\nu z_i &= \alpha \phi^{\alpha-1} \phi' \partial_\nu u \vartheta_1 \quad \text{on } \Gamma_N, \\ z_i &= 0 \quad \text{on } \Gamma_D \end{aligned}$$

を満たす  $z_i = z_i(\vartheta_1) \in U$  を求めよ。□

さらに、式 (8.5.25) の右辺第 1 項は、

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{1i\theta}(\theta, u, v_i, w_i, z_i)[\vartheta_2] \\ &= \int_D \left[ \zeta_{i\theta\theta} u + b'' v_i - (\alpha(\alpha-1) \phi^{\alpha-2} \phi'^2 + \alpha \phi^{\alpha-1} \phi'') \nabla u \cdot \nabla v_i \right] \vartheta_2 \end{aligned}$$

$$-\alpha\phi^{\alpha-1}\phi'(\nabla u \cdot \nabla w_i + \nabla v_i \cdot \nabla z_i) + b'(w_i + z_i)]\vartheta_2 dx$$

となる.

そこで,  $u, v_i, w_i(\vartheta_1)$  および  $z_i(\vartheta_1)$  はそれぞれ問題 8.2.3, 問題 8.5.1, 問題 8.5.5 および問題 8.5.6 の弱解とする. このときの  $f_i(\theta, u)$  を  $\tilde{f}_i(\theta)$  とかくことにすれば,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{i\theta}(\theta, u, v_i, w_i(\vartheta_1), z_i(\vartheta_1))[\vartheta_2] &= \tilde{f}_i''(\theta)[\vartheta_1, \vartheta_2] \\ &= \langle g_{\text{Hi}}(\theta, \vartheta_1), \vartheta_2 \rangle \end{aligned} \quad (8.5.28)$$

のようにかける. ここで,  $f_i$  の Hesse 勾配  $g_{\text{Hi}}$  は

$$\begin{aligned} g_{\text{Hi}}(\theta, \vartheta_1) &= \{ -(\alpha(\alpha-1)\phi^{\alpha-2}\phi'^2 + \alpha\phi^{\alpha-1}\phi'') \nabla u \cdot \nabla v_i + \zeta_{i\theta\theta}u + b''v_i \} \vartheta_1 \\ &\quad - \alpha\phi^{\alpha-1}\phi'(\nabla u \cdot \nabla w_i(\vartheta_1) + \nabla v_i \cdot \nabla z_i(\vartheta_1)) \\ &\quad + b'(w_i(\vartheta_1) + z_i(\vartheta_1)) \end{aligned} \quad (8.5.29)$$

のように与えられる.

## 8.6 評価関数の降下方向

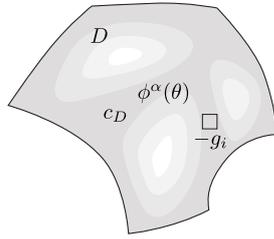
注意 8.5.3 において,  $\theta$  型位相最適化問題は, 特別な正則性の仮定をもうけなければ, 不正則になることが示された. そこで, 評価関数の  $\theta$  微分を正則化する機能をもつ設計変数の線形空間  $X$  上の勾配法と Newton 法について考えよう. ここでは,  $i \in \{0, \dots, m\}$  番目の評価関数  $f_i$  に対して, 式 (8.5.6) の勾配  $g_i \in X'$  と式 (8.5.19) の Hesse 形式  $h_i \in \mathcal{L}^2(X \times X; \mathbb{R})$  が与えられたと仮定して,  $f_i$  の降下方向を設計変数の線形空間  $X$  上の勾配法と Newton 法によって求める方法を考えよう.

### 8.6.1 $H^1$ 勾配法

上記の降下方向ベクトルを次の問題の解  $\vartheta_{g_i} \in X$  によって求める方法を,  $\theta$  型  $H^1$  勾配法とよぶことにする.

**問題 8.6.1 ( $\theta$  型  $H^1$  勾配法)**  $X$  と  $\mathcal{D}$  をそれぞれ式 (8.1.3) と式 (8.1.4) とする.  $a_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  を  $X$  上の強圧的かつ有界な双 1 次形式とする. すなわち, 任意の  $\vartheta \in X$  と  $\psi \in X$  に対して,

$$a_X(\vartheta, \vartheta) \geq \alpha_X \|\vartheta\|_X^2, \quad |a_X(\vartheta, \psi)| \leq \beta_X \|\vartheta\|_X \|\psi\|_X \quad (8.6.1)$$

図 8.10:  $H^1$  空間の内積を用いた  $H^1$  勾配法

を満たす正定数  $\alpha_X$  と  $\beta_X$  が存在するとする.  $f_i \in C^1(D; \mathbb{R})$  に対して, 極小点ではない  $\theta_k \in D^\circ$  における  $f_i$  の  $\theta$  微分を  $g_i(\theta_k) \in X'$  とする. このとき, 任意の  $\psi \in X$  に対して

$$a_X(\vartheta_{g_i}, \psi) = -\langle g_i(\theta_k), \psi \rangle \quad (8.6.2)$$

を満たす  $\vartheta_{g_i} \in X$  を求めよ.  $\square$

問題 8.6.1 で仮定された  $a_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  の選び方には任意性がある. 以下の項では, いくつかの具体例を示すことにする.

### $H^1$ 空間の内積を用いた方法

実 Hilbert 空間  $X$  上の内積は強圧性をもつ. そこで, 内積を応用して,

$$a_X(\vartheta, \psi) = \int_D (\nabla \vartheta \cdot \nabla \psi + c_D \vartheta \psi) \, dx \quad (8.6.3)$$

とおいてみよう. ただし,  $c_D$  はほとんど至るところで正となる  $L^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$  の要素であると仮定する. このとき,  $a_X$  は  $X$  上の強圧的双 1 次形式となる (例題 5.2.7 (1) の解答を参照). また,  $c_D$  の選び方に関して次のことがいえる.  $c_D$  が大きな値をとれば, 式 (8.6.3) 右辺の積分において, 第 1 項に比べて第 2 項が優位となり, 平滑化の機能が抑えられて,  $-g_i$  を直接探索ベクトルにえらんだときの結果に近づくことになる. なお, 探索ベクトルの大きさ (ステップサイズ) は, 7.7.1 項 (3.7 節と同様) のアルゴリズムのなかで使われた正の定数  $c_a$  の大きさを調整されるものとする.

式 (8.6.3) を用いたときの  $H^1$  勾配法の強形式は次のようになる.

**問題 8.6.2** ( $H^1$  内積を用いた  $H^1$  勾配法)  $\theta \in D^\circ$  において式 (8.5.6) の  $g_i \in X'$  が与えられたとき,

$$-\Delta \vartheta_{g_i} + c_D \vartheta_{g_i} = -g_i \quad \text{in } D,$$

$$\partial_\nu \vartheta_{g_i} = 0 \quad \text{on } \partial D$$

を満たす  $\vartheta_{g_i} : D \rightarrow \mathbb{R}$  を求めよ. □

図 8.6.1 は, 問題 8.6.2 のイメージを示す. この問題は, 問題 5.1.3 の拡張 Poisson 問題において,  $\Omega$  を  $D$  に変更し,  $c_{\partial D} = 0$  とおいたときの楕円型偏微分方程式の境界値問題になっている. そこで, 有限要素法などの数値解析法によって数値解が求められる.

### 境界条件を用いた方法

また,  $\theta$  に対する Dirichlet 条件や Robin 条件を用いても, 双 1 次形式  $a_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  に強圧性をもたせることができる.

最初に, Dirichlet 境界条件を用いることを考えよう. 設計変数の線形空間  $X$  が定義された式 (8.1.3) において, 設計上の制約で  $\theta$  を固定する領域あるいは境界として,  $\bar{\Omega}_C \subset \bar{D}$  が定義された. ここでは,  $\bar{\Omega}_C$  は領域あるいは境界の測度が正値をもつと仮定する. このとき,

$$a_X(\vartheta, \psi) = \int_{D \setminus \bar{\Omega}_C} \nabla \vartheta \cdot \nabla \psi \, dx \quad (8.6.4)$$

は, 例題 5.2.5 の解答でみたように,  $X$  上の強圧的かつ有界な双 1 次形式となる. このときの  $H^1$  勾配法の強形式は次のようになる.

**問題 8.6.3 (Dirichlet 条件を用いた  $H^1$  勾配法)**  $\theta \in \mathcal{D}^\circ$  において式 (8.5.6) の  $g_i \in X'$  が与えられたとき,

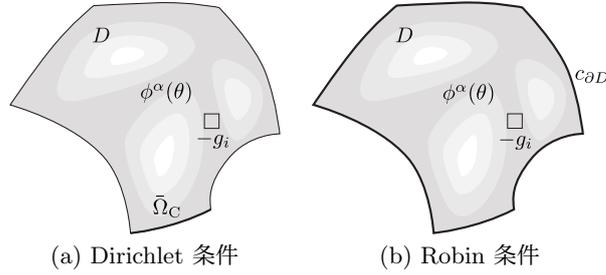
$$\begin{aligned} -\Delta \vartheta_{g_i} &= -g_i \quad \text{in } D \setminus \bar{\Omega}_C, \\ \partial_\nu \vartheta_{g_i} &= 0 \quad \text{on } \partial D \setminus \bar{\Omega}_C, \\ \vartheta_{g_i} &= 0 \quad \text{in } \bar{\Omega}_C \end{aligned}$$

を満たす  $\vartheta_{g_i} : D \setminus \bar{\Omega}_C \rightarrow \mathbb{R}$  を求めよ. □

問題 8.6.3 は問題 5.1.1 の Poisson 問題において,  $\Omega$  と  $\Gamma_D$  をそれぞれ  $D \setminus \bar{\Omega}_C$  と  $\partial \Omega_C$  におきかえた問題である. 図 8.6.2 (a) は, そのイメージを示す. この問題の数値解も有限要素法などの数値解析法によって求められる.

さらに, Robin 条件を用いれば, 式 (8.1.3) において  $\bar{\Omega}_C = \emptyset$  を仮定しても  $a_X(\vartheta, \psi)$  の強圧性が得られる. ある正値関数  $c_{\partial D} \in L^\infty(\partial D; \mathbb{R})$  を選び,

$$a_X(\vartheta, \psi) = \int_D \nabla \vartheta \cdot \nabla \psi \, dx + \int_{\partial D} c_{\partial D} \vartheta \psi \, d\gamma \quad (8.6.5)$$

図 8.11: 境界条件を用いた  $H^1$  勾配法

とおく. この  $a_X$  が  $X$  上の強圧的双 1 次形式となることは例題 5.2.7 (2) に対する解答の中に示されている. このときの強形式は次のようになる.

**問題 8.6.4 (Robin 条件を用いた  $H^1$  勾配法)**  $\theta \in \mathcal{D}^\circ$  において式 (8.5.6) の  $g_i \in X'$  が与えられたとき,

$$\begin{aligned} -\Delta \vartheta_{g_i} &= -g_i \quad \text{in } D, \\ \partial_\nu \vartheta_{g_i} + c_{\partial D} \vartheta_{g_i} &= 0 \quad \text{on } \partial D \end{aligned}$$

を満たす  $\vartheta_{g_i} : D \rightarrow \mathbb{R}$  を求めよ.  $\square$

図 8.6.2 (b) は, 問題 8.6.4 のイメージを示す. この問題における Robin 条件は, Poisson 問題を定常熱伝導問題とみなしたとき, 境界の外側の温度を 0 とおき,  $c_{\partial D}$  を熱伝達率とおいたときの熱伝達境界で使われる条件となっている. そこで, この問題の数値解も有限要素法などの数値解析法によって求められる.

### $H^1$ 勾配法の正則性

$\theta$  型位相最適化問題に対する  $H^1$  勾配法 (問題 8.6.2 から問題 8.6.4) の弱解に対して, 次の結果が得られる. なお, 本項では,  $D$  が 2 次元領域のときには,  $\partial D$  上の凹角の角点, 混合境界条件の境界  $\partial\Gamma_D$  の開き角は  $\pi/2$  以上の角点,  $D$  が 3 次元領域のときには,  $\partial D$  上の凹角の辺, 混合境界条件の境界  $\partial\Gamma_D$  の開き角が  $\pi/2$  以上の辺の近傍を特異点近傍とよび,  $B$  とかくことにする. また,  $u$  が問題 8.2.3 の解であるときの  $f_i(\theta, u)$  を  $\tilde{f}_i(\theta)$  とかくことにする.

**定理 8.6.5 ( $\theta$  型  $H^1$  勾配法)** 定理 8.5.2 の  $g_i \in L^{q_i}(D; \mathbb{R})$  に対して, 問題 8.6.2 から問題 8.6.4 の弱解  $\vartheta_{g_i}$  は一意に存在する.  $\vartheta_{g_i}$  は  $D \setminus \tilde{B}$  上で,  $H^2(D; \mathbb{R}) \cap C^{0,1}$  級となる. また,  $\vartheta_{g_i}$  は  $\tilde{f}_i(\theta)$  の降下方向を向いている.  $\square$

**証明**  $g_i$  は  $L^{q_R}(D; \mathbb{R}) \subset X'$  に入ることから, Lax-Milgram の定理により, 問題 8.6.2 から問題 8.6.4 の弱解  $\vartheta_{g_i}$  は一意に存在する. また, 解  $\vartheta_{g_i}$  の正則性について, 次の結果が得られる.  $\vartheta_{g_i}$  は楕円型偏微分方程式を満たすことから,  $g_i$  よりも微分可能性が 2 階分増加し,  $D \setminus \bar{B}$  上で  $W^{2, q_R} \subset H^2(D; \mathbb{R})$  級となる. これに Sobolev の埋蔵定理 (定理 4.3.14) を適用すれば,  $q_R > d$  のとき,

$$2 - \frac{d}{q_R} = 1 + \sigma > 1$$

となる. ただし,  $\sigma \in (0, 1)$  である. よって, 定理 4.3.14 の (3) において  $p = q_R$ ,  $q = \infty$ ,  $k = 1$  および  $j = 1$  とおいたとき,  $D \setminus \bar{B}$  上で

$$W^{2, q_R}(D \setminus \bar{B}, \mathbb{R}) \subset C^{0,1}(D \setminus \bar{B}, \mathbb{R})$$

が成り立つ. そこで,  $\vartheta_{g_i}$  は  $D \setminus \bar{B}$  上で  $H^2(D; \mathbb{R}) \cap C^{0,1}$  級となる. さらに, 問題 8.6.2 から問題 8.6.4 の弱解  $\vartheta_{g_i}$  に対して, 正の定数  $\bar{\epsilon}$  に対して,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(\theta + \bar{\epsilon}\vartheta_{g_i}) - \tilde{f}_i(\theta) &= \bar{\epsilon} \langle g_i, \vartheta_{g_i} \rangle + o(|\bar{\epsilon}|) = -\bar{\epsilon} a_X(\vartheta_{g_i}, \vartheta_{g_i}) + o(|\bar{\epsilon}|) \\ &\leq -\bar{\epsilon} \alpha_X \|\vartheta_{g_i}\|_X^2 + o(|\bar{\epsilon}|) \end{aligned}$$

が成り立つ. そこで,  $\bar{\epsilon}$  を十分小さくすれば,  $\tilde{f}_i(\theta)$  は減少することになる.  $\square$

定理 8.6.5 より,  $H^1$  勾配法を用いて設計変数の変動方向を決定すれば, 特異点近傍を除いて, 設計変数の許容集合  $\mathcal{D}$  の中で解を探索することになる. そのことから,  $H^1$  勾配法は正則な勾配法になっていると考えられる.

## 8.6.2 $H^1$ Newton 法

さらに, 評価関数  $f_i$  の 2 階微分 (Hesse 形式)  $h_i \in \mathcal{L}^2(X \times X; \mathbb{R})$  が計算可能であれば,  $X = H^1(D; \mathbb{R})$  上の Newton 法が考えられる. その方法を,  $\theta$  型  $H^1$  Newton 法とよぶことにする.

**問題 8.6.6 ( $\theta$  型  $H^1$  Newton 法)**  $X$  と  $\mathcal{D}$  をそれぞれ式 (8.1.3) と式 (8.1.4) とする.  $f_i \in C^2(\mathcal{D}; \mathbb{R})$  に対して, 極小点ではない  $\theta_k \in \mathcal{D}^\circ$  における  $f_i$  の  $\theta$  微分と 2 階  $\theta$  微分をそれぞれ  $g_i(\theta_k) \in X'$  および  $h_i(\theta_k) \in \mathcal{L}^2(X \times X; \mathbb{R})$  とする. また,  $a_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  を  $h_i(\theta_k)$  の  $X$  上における強圧性と正則性を補うための双 1 次形式とする. このとき, 任意の  $\psi \in X$  に対して

$$h_i(\theta_k)[\vartheta_{g_i}, \psi] + a_X(\vartheta_{g_i}, \psi) = -\langle g_i(\theta_k), \psi \rangle \quad (8.6.6)$$

を満たす  $\vartheta_{g_i} \in X$  を求めよ.  $\square$

問題 8.6.6 において, 式 (8.6.6) の左辺を  $h_i$  のみにおいた場合, 注意 8.5.3 で指摘された  $g_i(\theta_k)$  の不正則性を補正する作用が期待されない. 実際, 式 (8.5.19) で

表 8.1: 抽象的最適設計問題 (問題 7.3.1) と  $\theta$  型位相最適化問題 (問題 8.3.2) の対応

	抽象的最適設計問題	$\theta$ 型位相最適化問題
設計変数	$\phi \in X$	$\theta \in X = H^1(D; \mathbb{R})$
状態変数	$u \in U$	$u \in U = H^1(D; \mathbb{R})$
$f_i$ の Fréchet 微分	$g_i \in X'$	$g_i \in X' = H^{1'}(D; \mathbb{R})$
勾配法の解	$\varphi_{g_i} \in X$	$\vartheta_{g_i} \in X = H^1(D; \mathbb{R})$

計算された  $h_i$  では,  $\nabla\vartheta_1 \cdot \nabla\vartheta_2$  の項が含まれていないからである. そこで, 問題 8.6.6 では,  $X$  上の強圧的かつ有界な双 1 次形式  $a_X$  を式 (8.6.6) の左辺に追加することで, それを補うことにした. たとえば,  $X$  上の内積を用いた式 (8.6.3) をもとにする場合には,

$$a_X(\vartheta, \psi) = \int_D (c_{D1} \nabla\vartheta \cdot \nabla\psi + c_{D0}\vartheta\psi) \, dx \quad (8.6.7)$$

のようにおく. ここで,  $c_{D0}$  と  $c_{D1}$  はそれぞれ強圧性と正則性を確保するための正の定数である. それらの意味は, 式 (8.6.3) のあとで説明された内容と同じである.

さらに,  $f_i(\theta)$  の 2 階  $\theta$  微分が Hesse 勾配によって与えられる場合は, 問題 8.6.6 が次の問題に置き換えられる.

**問題 8.6.7 (Hesse 勾配を用いた  $\theta$  型 Newton 法)**  $X$  と  $D$  をそれぞれ式 (8.1.3) と式 (8.1.4) とする.  $f_i \in C^2(D; \mathbb{R})$  に対して, 極小点ではない  $\theta_k \in D^\circ$  における  $f_i$  の  $\theta$  微分の勾配, 探索ベクトルおよび Hesse 勾配をそれぞれ  $g_i(\theta_k) \in X'$ ,  $\bar{\vartheta}_{g_i} \in X$  および  $g_{Hi}(\theta_k, \bar{\vartheta}_{g_i}) \in X'$  とするとき, 任意の  $\psi \in X$  に対して

$$a_X(\vartheta_{g_i}, \psi) = -\langle (g_i(\theta_k) + g_{Hi}(\theta_k, \bar{\vartheta}_{g_i})), \psi \rangle \quad (8.6.8)$$

を満たす  $\vartheta_{g_i} \in X$  を求めよ. □

## 8.7 $\theta$ 型位相最適化問題の解法

抽象的最適設計問題 (問題 7.3.1) と  $\theta$  型位相最適化問題 (問題 8.3.2) の対応は表 8.7.1 のようになる. したがって, 適切なおきかえにより, 7.7.1 項 (3.7 節) と 7.7.2 項 (3.8 節) で示された制約つき問題に対する勾配法と Newton 法を適用することができる.

### 8.7.1 制約つき問題に対する勾配法

制約つき問題に対する勾配法は、次のような変更により、3.7.1 項で示された簡単なアルゴリズム 3.7.2 が利用可能となる。

- (1) 設計変数  $\boldsymbol{x}$  とその変動  $\boldsymbol{y}$  をそれぞれ  $\theta$  と  $\vartheta$  におきかえる。
- (2) 勾配法を与える式 (3.7.10) を、任意の  $\psi \in X$  に対して

$$c_a a_X(\vartheta_{gi}, \psi) = -\langle g_i, \psi \rangle \quad (8.7.1)$$

が成り立つ条件におきかえる。ただし、 $a_X(\vartheta_{gi}, \psi)$  は、問題 8.6.2 から問題 8.6.4 の弱形式で使われた  $X$  上の双 1 次形式とする。

- (3) 探索ベクトルを求める式 (3.7.11) を

$$\vartheta_g = \vartheta_{g0} + \sum_{i \in I_A} \lambda_i \vartheta_{gi} \quad (8.7.2)$$

におきかえる。

- (4) Lagrange 乗数を求める式 (3.7.12) を

$$\langle (g_i, \vartheta_{gj})_{(i,j) \in I_A^2} (\lambda_j)_{j \in I_A} = -(f_i + \langle g_i, \vartheta_{g0} \rangle)_{i \in I_A} \quad (8.7.3)$$

におきかえる。

さらに、複雑なアルゴリズム 3.7.6 を使う場合には、上記 (1) から (4) に加えて、次の変更も追加する。

- (5) Armijo の規準式 (3.7.26) を、 $\xi \in (0, 1)$  に対して

$$\mathcal{L}(\theta + \vartheta_g, \boldsymbol{\lambda}_{k+1}) - \mathcal{L}(\theta, \boldsymbol{\lambda}) \leq \xi \left\langle g_0 + \sum_{i \in I_A} \lambda_i g_i, \vartheta_g \right\rangle \quad (8.7.4)$$

におきかえる。

- (6) Wolfe の規準式 (3.7.27) を、 $\mu$  ( $0 < \xi < \mu < 1$ ) に対して

$$\begin{aligned} & \mu \left\langle g_0 + \sum_{i \in I_A} \lambda_i g_i, \vartheta_g \right\rangle \\ & \leq \left\langle g_0(\theta + \vartheta_g) + \sum_{i \in I_A} \lambda_{i, k+1} g_i(\theta + \vartheta_g), \vartheta_g \right\rangle \end{aligned} \quad (8.7.5)$$

におきかえる。

(7) Newton-Raphson 法による  $\lambda_{k+1}$  の更新式 (式 (3.7.21)) を

$$\begin{aligned}\delta\lambda &= (\delta\lambda_j)_{j \in I_A} \\ &= -(\langle g_i(\lambda_{k+1l}), \vartheta_{gj}(\lambda_{k+1l}) \rangle_{(i,j) \in I_A^2})^{-1} (f_i(\lambda_{k+1l}))_{i \in I_A}\end{aligned}\quad (8.7.6)$$

におきかえる。

上記のような  $\theta$  型位相最適化問題に対する解法を用いる場合の注意点についてみておこう。

$\theta$  型位相最適化問題 (問題 8.3.2) では, 設計変数  $\theta \in X$  に対して状態決定問題の解や評価関数は非凸の非線形写像となる. なぜならば, SIMP モデルで使われる偏微分方程式の係数  $\phi^\alpha(\theta)$  はシグモイド関数とべき関数の合成関数であるからである. そこで, 評価関数や境界条件の与え方によっては, 極小点が複数存在するような場合も起こりうる. そのような場合には,  $\theta$  の初期分布の与え方を変えて, 収束結果を比較することが必要になる.

また,  $\theta$  の初期分布は式 (8.1.4) で定義された設計変数の許容集合  $\mathcal{D}$  に入っていないといけない. すなわち, 連続関数でなければならない. もしも,  $\theta$  の初期分布を, ある穴の配置に対応した特性関数 ( $L^\infty$  級の関数) で与えた場合には, その穴の境界における  $\theta$  の不連続性は上記の解法を用いても取り除かれないことに注意する必要がある.

さらに, 本章で示された  $\theta$  型位相最適化問題では, シグモイド関数を用いて  $\theta$  を  $\phi$  に変換している. そのために,  $\phi$  が 0 と 1 に近づく際に,  $\theta$  に対する  $\phi$  の勾配が小さくなり, 収束が遅くなるという欠点がある. その欠点は, 次節で示される Newton 法によって改善されることが期待される.

## 8.7.2 制約つき問題に対する Newton 法

評価関数の  $\theta$  微分に加えて, 評価関数の 2 階  $\theta$  微分が計算可能ならば, 制約つき問題に対する勾配法を制約つき問題に対する Newton 法に変更することができる. ただし, 式 (8.6.6) の  $h_i(\theta_k)[\vartheta_{gi}, \psi]$  を

$$h_{\mathcal{L}}(\theta_k)[\vartheta_{gi}, \psi] = h_0(\theta_k)[\vartheta_{gi}, \psi] + \sum_{i \in I_A(\theta_k)} \lambda_{ik} h_i(\theta_k)[\vartheta_{gi}, \psi] \quad (8.7.7)$$

におきかえる. すなわち, 式 (8.6.6) を

$$c_h h_{\mathcal{L}}(\theta_k)[\vartheta_{gi}, \psi] + c_a a_X(\vartheta_{gi}, \psi) = -\langle g_i(\theta_k), \psi \rangle \quad (8.7.8)$$

とする. ただし,  $a_X$  は式 (8.6.7) で与えられ,  $c_h, c_{D0}, c_{D1}$  はステップサイズを制御するための正定数とする. このとき, 3.8.1 項で示された簡単なアルゴリズム 3.8.4 が次のおきかえによって利用可能となる.

- (1) 設計変数  $\boldsymbol{x}$  とその変動  $\boldsymbol{y}$  をそれぞれ  $\theta$  と  $\vartheta$  におきかえる.
- (2) 式 (3.7.10) を式 (8.7.8) の解におきかえる.
- (3) 式 (3.7.11) を式 (8.7.2) におきかえる.
- (4) 式 (3.7.12) を式 (8.7.3) におきかえる.

評価関数の 2 階  $\theta$  微分が Hesse 勾配で与えられる場合には, 式 (8.7.7) と式 (8.7.8) はそれぞれ

$$g_{H\mathcal{L}}(\theta_k, \bar{\vartheta}_g) = g_{H0}(\theta_k, \bar{\vartheta}_g) + \sum_{i \in I_A(\theta_k)} \lambda_{ik} g_{Hi}(\theta_k, \bar{\vartheta}_g), \quad (8.7.9)$$

$$c_a a_X(\vartheta_{gi}, \psi) = -\langle (g_i(\theta_k) + c_h g_{H\mathcal{L}}(\theta_k, \bar{\vartheta}_g)), \psi \rangle \quad (8.7.10)$$

に置き換えられる. そのうえで, 次のように変更される.

- (5) 式 (3.8.11) を式 (8.7.10) におきかえる.

さらに, 3.8.2 項に示された複雑なアルゴリズムを考える場合には, 問題の性質や追加される機能に応じたさまざまな工夫が必要となる.

## 8.8 誤差評価

8.7 節で示されたようなアルゴリズムで  $\theta$  型位相最適化問題 (問題 8.3.2) を解く場合, 探索ベクトル  $\vartheta_g$  は式 (8.7.2) で求められる. そのためには, 三つの楕円型偏微分方程式の境界値問題の解, すなわち状態決定問題 (問題 8.2.3) の解  $u, f_0, f_{i_1}, \dots, f_{i_{|I_A|}}$  に対する随伴問題 (問題 8.5.1) の解  $v_0, v_{i_1}, \dots, v_{i_{|I_A|}}$  および  $\theta$  型  $H^1$  勾配法 (問題 8.6.1) の解  $\vartheta_0, \vartheta_{i_1}, \dots, \vartheta_{i_{|I_A|}}$  に対する数値解を求める必要がある. さらに, 式 (8.7.3) によって Lagrange 乗数  $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_{|I_A|}}$  を求める必要がある. ここでは, 三つの境界値問題に対する数値解を有限要素法で求めることを仮定して, 6.6 節でみてきた有限要素法の数値解に対する誤差評価の結果を使って, 探索ベクトル  $\vartheta_g$  の誤差評価をおこなってみよう [29, 30].

なお,  $H^1$  勾配法のかわりに  $H^1$  Newton 法を用いる場合は, 目的関数の 2 階微分に対する評価が必要となる. しかしながら,  $H^1$  Newton 法の双 1 次形式が  $H^1$  勾配法の双 1 次形式と同等の性質を備えていれば, 同様の結果となる. そこで, ここでは省略することにする.

本節では,  $D$  を 2 次元のときは多角形, 3 次元のときは多面体と仮定して,  $D$  に対する正則な有限要素分割  $\mathcal{T} = \{D_i\}_{i \in \mathcal{E}}$  を考える. また, 有限要素の最大直径  $h$  を式 (6.6.2) の  $h(\mathcal{T})$  で定義して, 有限要素分割列  $\{\mathcal{T}_h\}_{h \rightarrow 0}$  を考える. 以下では, 次のような記号法を用いることにする.

- (1) 状態決定問題 (問題 8.2.3) と  $f_0, f_{i_1}, \dots, f_{i_{|I_A|}}$  に対する随伴問題 (問題 8.5.1) の厳密解を  $u$  と  $v_0, v_{i_1}, \dots, v_{i_{|I_A|}}$  とかく. また, 有限要素法によるそれらの数値解を,  $i \in I_A \cup \{0\}$  に対して

$$u_h = u + \delta u_h, \quad (8.8.1)$$

$$v_{ih} = v_i + \delta v_{ih} \quad (8.8.2)$$

とかく.

- (2) 評価関数  $f_0, f_{i_1}, \dots, f_{i_{|I_A|}}$  の  $\theta$  微分の数値解を,  $i \in I_A \cup \{0\}$  に対して

$$g_{ih} = g_i + \delta g_{ih} \quad (8.8.3)$$

とかく. ここで,  $g_i$  は  $u, v_0, v_{i_1}, \dots, v_{i_{|I_A|}}$  の関数であり,  $g_{ih}$  は  $u_h, v_{0h}, v_{i_1h}, \dots, v_{i_{|I_A|h}}$  の関数である.

- (3)  $\theta$  微分の厳密解  $g_0, g_{i_1}, \dots, g_{i_{|I_A|}}$  を用いて計算された  $H^1$  勾配法 (たとえば, 問題 8.6.2) の厳密解を  $\vartheta_{g_0}, \vartheta_{g_{i_1}}, \dots, \vartheta_{g_{i_{|I_A|}}}$  とかく. また, 数値解  $g_{0h}, g_{i_1h}, \dots, g_{i_{|I_A|h}}$  を用いて計算された  $H^1$  勾配法の厳密解を,  $i \in I_A \cup \{0\}$  に対して

$$\hat{\vartheta}_{g_i} = \vartheta_{g_i} + \delta \hat{\vartheta}_{g_i} \quad (8.8.4)$$

とかく.

- (4) 数値解  $g_{0h}, g_{i_1h}, \dots, g_{i_{|I_A|h}}$  を用いて計算された  $H^1$  勾配法の数値解を,  $i \in I_A \cup \{0\}$  に対して

$$\vartheta_{g_{ih}} = \hat{\vartheta}_{g_i} + \delta \hat{\vartheta}_{g_{ih}} = \vartheta_{g_i} + \delta \vartheta_{g_{ih}} \quad (8.8.5)$$

とかく.

- (5)  $g_0, g_{i_1}, \dots, g_{i_{|I_A|}}$  と  $\vartheta_{g_0}, \vartheta_{g_{i_1}}, \dots, \vartheta_{g_{i_{|I_A|}}}$  を用いて構成された式 (8.7.3) の係数行列  $(\langle g_i, \vartheta_{g_j} \rangle)_{(i,j) \in I_A^2}$  を  $\mathbf{A}$  とかく. また,  $g_{0h}, g_{i_1h}, \dots, g_{i_{|I_A|h}}$  と  $\vartheta_{g_{0h}}, \vartheta_{g_{i_1h}}, \dots, \vartheta_{g_{i_{|I_A|h}}}$  を用いて構成された式 (8.7.3) の係数行列  $(\langle g_{ih}, \vartheta_{g_{jh}} \rangle)_{(i,j) \in I_A^2}$  を  $\mathbf{A}_h = \mathbf{A} + \delta \mathbf{A}_h$  とかく. ここでは  $f_i = 0$  を仮定し,  $-(\langle g_i, \vartheta_{g_0} \rangle)_{i \in I_A}$  を  $\mathbf{b}$  とかく. また,  $-(\langle g_{ih}, \vartheta_{g_{0h}} \rangle)_{i \in I_A}$  を  $\mathbf{b}_h = \mathbf{b} + \delta \mathbf{b}_h$  とかく. さらに, Lagrange 乗数の厳密解を  $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$  とかく. また, その数値解を

$$\boldsymbol{\lambda}_h = (\lambda_{ih})_{i \in I_A} = \mathbf{A}_h^{-1} \mathbf{b}_h = \boldsymbol{\lambda} + \delta \boldsymbol{\lambda}_h \quad (8.8.6)$$

とかく.

(6) 数値解  $\vartheta_{g0h}, \vartheta_{gi_1h}, \dots, \vartheta_{gi_{|I_A|}h}$  と  $\lambda_{i_1h}, \dots, \lambda_{i_{|I_A|}h}$  で構成された式 (8.7.2) を

$$\vartheta_{gh} = \vartheta_{g0h} + \sum_{i \in I_A} \lambda_{ih} \vartheta_{gih} = \vartheta_g + \delta \vartheta_{gh} \quad (8.8.7)$$

とかく.

上記の定義において, 式 (8.8.7) で定義された  $\delta \vartheta_{gh}$  が探索ベクトルの誤差を表す. 本節では,  $\delta \vartheta_{gh}$  のノルム  $\|\delta \vartheta_{gh}\|_X$  の  $h$  に対するオーダーを評価することが目標である. ここで, 次の仮定を設ける.

**仮定 8.8.1** ( $\vartheta_g$  の誤差評価) 状態決定問題と  $f_0, f_{i_1}, \dots, f_{i_{|I_A|}}$  に対する随伴問題において  $\alpha > 1$  とする. また,  $q_R > d$  および  $k, j \in \{1, 2, \dots\}$  に対して次のことを仮定する.

(1) 状態決定問題と  $f_0, f_{i_1}, \dots, f_{i_{|I_A|}}$  に対する随伴問題の厳密解  $u$  と  $v_0, v_{i_1}, \dots, v_{i_{|I_A|}}$  の同次形は

$$\mathcal{S}_k = U \cap W^{k+1, 2q_R}(D; \mathbb{R}) \quad (8.8.8)$$

の要素とする. この条件が成り立つように, 仮定 8.2.1, 仮定 8.2.2 および仮定 8.3.1 を修正する.

(2) 評価関数  $f_i$  の被積分関数は,  $i \in I_A \cup \{0\}$  に対して

$$\zeta_{i\theta u} \in L^{2q_R}(D; \mathbb{R})$$

とする.

(3)  $i \in I_A \cup \{0\}$  に対して

$$\|\delta u_h\|_{W^{j, 2q_R}(D; \mathbb{R})} \leq c_1 h^{k+1-j} |u|_{W^{k+1, 2q_R}(D; \mathbb{R})}, \quad (8.8.9)$$

$$\|\delta v_{ih}\|_{W^{j, 2q_R}(D; \mathbb{R})} \leq c_2 h^{k+1-j} |v_i|_{W^{k+1, 2q_R}(D; \mathbb{R})}, \quad (8.8.10)$$

$$\|\delta \hat{\vartheta}_{gih}\|_{W^{j, 2q_R}(D; \mathbb{R})} \leq c_3 h^{k+1-j} |\hat{\vartheta}_{gi}|_{W^{k+1, 2q_R}(D; \mathbb{R})} \quad (8.8.11)$$

を満たす  $h$  に依存しない正定数  $c_1, c_2, c_3$  が存在する. ただし,  $|\cdot|$  はセミノルム (式 (4.3.12) 参照) を表す.

(4) 式 (8.8.6) の係数行列  $\mathbf{A}_h$  に対して,

$$\|\mathbf{A}_h^{-1}\|_{\mathbb{R}^{|I_A| \times |I_A|}} \leq c_4$$

を満たす正定数  $c_4$  が存在する. ただし,  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^{|I_A| \times |I_A|}}$  は行列のノルム (式 (4.4.3) 参照) を表す.

□

仮定 8.8.1 の (1) は,  $k \in \{1, 2, \dots\}$  なので, 式 (8.2.2) で定義された  $\mathcal{S}$  よりも強い条件になっている. その理由は, 仮定 8.8.1 の (3) において, 式 (8.8.9) と式 (8.8.10) の右辺で  $u$  と  $v_0, v_{i_1}, \dots, v_{i_{|I_A|}}$  が  $W^{k+1, 2q_R}$  級に入ることを必要とするためである. 仮定 8.8.1 の (3) は系 6.6.4 に基づいている. 仮定 8.8.1 の (4) は  $g_{i_1}, \dots, g_{i_{|I_A|}}$  が 1 次独立であれば成り立つ条件になっている.

このとき, 後に示される定理 8.8.5 が得られる. この結果を示すために, 次の三つの補題が使われる.

**補題 8.8.2** ( $g_i$  の誤差評価) 仮定 8.8.1 の (1) と (2) および式 (8.8.9) と式 (8.8.10) が満たされているとき, 任意の  $\vartheta \in X$  に対して,

$$\langle \delta g_{ih}, \vartheta \rangle \leq c_5 h^k \|\vartheta\|_X$$

を満たす  $h$  に依存しない正定数  $c_5$  が存在する. ただし,  $\delta g_{ih}$  は式 (8.8.3) で定義される. □

**証明**  $\delta g_{ih}$  は  $\delta u_h$  と  $\delta v_{ih}$  による数値誤差である. そこで, 式 (8.5.5) より,

$$|\langle \delta g_i, \vartheta \rangle| \leq |\mathcal{L}_{i\theta u}(\theta, u, v_i)[\vartheta, \delta u_h] + \mathcal{L}_{i\theta v_i}(\theta, u, v_i)[\vartheta, \delta v_{ih}]| \quad (8.8.12)$$

が成り立つ. 式 (8.8.12) の右辺に対して Hölder の不等式 (定理 A.9.1) と Poincaré の不等式の系 (系 A.9.4) を用いれば,

$$\begin{aligned} & |\mathcal{L}_{i\theta u}(\theta, u, v_i)[\vartheta, \delta u_h] + \mathcal{L}_{i\theta v_i}(\theta, u, v_i)[\vartheta, \delta v_{ih}]| \\ & \leq \left\{ \|\zeta_{i\theta u}\|_{L^{2q_R}(D; \mathbb{R})} \|\delta u_h\|_{L^{2q_R}(D; \mathbb{R})} + \|b'\|_{L^{2q_R}(D; \mathbb{R})} \|\delta v_{ih}\|_{L^{2q_R}(D; \mathbb{R})} \right. \\ & \quad + \|\alpha \phi^{\alpha-1} \phi'\|_{L^\infty(D; \mathbb{R})} \|\nabla \delta u_h\|_{L^{2q_R}(D; \mathbb{R}^d)} \|\nabla v_i\|_{L^{2q_R}(D; \mathbb{R}^d)} \\ & \quad \left. + \|\alpha \phi^{\alpha-1} \phi'\|_{L^\infty(D; \mathbb{R})} \|\nabla u_h\|_{L^{2q_R}(D; \mathbb{R}^d)} \|\nabla \delta v_{ih}\|_{L^{2q_R}(D; \mathbb{R}^d)} \right\} \|\vartheta\|_X \\ & \leq \left\{ \|\zeta_{i\theta u}\|_{L^{2q_R}(D; \mathbb{R})} \|\delta u_h\|_{W^{1, 2q_R}(D; \mathbb{R})} + \|b'\|_{L^{2q_R}(D; \mathbb{R})} \|\delta v_{ih}\|_{W^{1, 2q_R}(D; \mathbb{R})} \right. \\ & \quad + \|\alpha \phi^{\alpha-1} \phi'\|_{L^\infty(D; \mathbb{R})} \|\delta u_h\|_{W^{1, 2q_R}(D; \mathbb{R})} \|v_i\|_{W^{1, 2q_R}(D; \mathbb{R})} \\ & \quad \left. + \|\alpha \phi^{\alpha-1} \phi'\|_{L^\infty(D; \mathbb{R})} \|u_h\|_{W^{1, 2q_R}(D; \mathbb{R})} \|\delta v_{ih}\|_{W^{1, 2q_R}(D; \mathbb{R})} \right\} \|\vartheta\|_X \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで,  $j = 1$  とおいた式 (8.8.9) と式 (8.8.10) および仮定 8.8.1 の (1) より, 補題の結果が得られる. □

**補題 8.8.3** ( $\vartheta_{g_i}$  の誤差評価) 仮定 8.8.1 の (1), (2) および (3) が満たされているとき,

$$\|\delta \vartheta_{g_{ih}}\|_X \leq c_6 h^k$$

を満たす  $h$  に依存しない正の定数  $c_6$  が存在する. ただし,  $\delta \vartheta_{g_i}$  は式 (8.8.5) で定義される. □

**証明** 式 (8.8.4) と式 (8.8.5) より,

$$\|\delta\vartheta_{gih}\|_X \leq \|\delta\hat{\vartheta}_{gi}\|_X + \|\delta\hat{\vartheta}_{gih}\|_X \quad (8.8.13)$$

が成り立つ。ただし,  $\|\delta\hat{\vartheta}_{gi}\|_X$  は補題 8.8.2 の  $\delta g_{ih}$  が  $H^1$  勾配法 (たとえば, 問題 8.6.2) の厳密解におよぼす誤差を表し,  $\|\delta\hat{\vartheta}_{gih}\|_X$  は  $H^1$  勾配法の数値解に対する誤差を表す。式 (8.8.13) の  $\|\delta\hat{\vartheta}_{gi}\|_X$  は, 任意の  $\vartheta \in X$  に対して,

$$a_X(\delta\hat{\vartheta}_{gi}, \vartheta) = -\langle \delta g_{ih}, \vartheta \rangle$$

が満たされる。そこで,  $\vartheta = \delta\hat{\vartheta}_{gi}$  とおけば,

$$\alpha_X \|\delta\hat{\vartheta}_{gi}\|_X^2 \leq \left| \langle \delta g_{ih}, \delta\hat{\vartheta}_{gi} \rangle \right| \quad (8.8.14)$$

が成り立つ。ただし,  $\alpha_X$  は式 (8.6.1) で使われた正の定数である。式 (8.8.14) の  $\delta g_{ih}$  に対して, 補題 8.8.2 を用いれば,

$$\|\delta\hat{\vartheta}_{gi}\|_X \leq \frac{c_5}{\alpha_X} h^k \quad (8.8.15)$$

が得られる。一方,  $\|\delta\hat{\vartheta}_{gih}\|_X$  は,  $j=1$  とおいた式 (8.8.11) より,

$$\|\delta\hat{\vartheta}_{gih}\|_X \leq \|\delta\hat{\vartheta}_{gih}\|_{W^{1,2q_R}(D;\mathbb{R})} \leq c_3 h^k \|\hat{\vartheta}_{gi}\|_{W^{k+1,2q_R}(D;\mathbb{R})} \quad (8.8.16)$$

が満たされる。式 (8.8.16) において,  $\|\hat{\vartheta}_{gi}\|_{W^{k+1,2q_R}(D;\mathbb{R})}$  は有界である。なぜならば, 定理 8.6.5 の証明において, 仮定 8.8.1 の (1) を用いれば,  $\hat{\vartheta}_{gi} \in W^{k+1,\infty}(D;\mathbb{R})$  が得られるからである。そこで, 式 (8.8.15) と式 (8.8.16) を式 (8.8.13) に代入すれば補題の結果が得られる。□

**補題 8.8.4** ( $\lambda_h$  の誤差評価) 仮定 8.8.1 が満たされているとき,

$$\|\delta\lambda_h\|_{\mathbb{R}^{|I_A|}} \leq c_7 h^k$$

を満たす  $h$  に依存しない正定数  $c_7$  が存在する。ただし,  $\lambda_h$  は式 (8.8.6) で定義される。□

**証明** 式 (8.8.6) の  $\lambda_h$  に対して,

$$\begin{aligned} \delta\lambda_h &= \mathbf{A}_h^{-1} (-\delta\mathbf{A}_h\lambda + \delta\mathbf{b}_h) \\ &= \mathbf{A}_h^{-1} \left\{ -\left( (\langle \delta g_{ih}, \vartheta_{gj} \rangle)_{(i,j) \in I_A^2} + (\langle g_i, \delta\vartheta_{gjh} \rangle)_{(i,j) \in I_A^2} \right) \lambda \right. \\ &\quad \left. + (\langle \delta g_{ih}, \vartheta_{g0} \rangle)_{i \in I_A} + (\langle g_i, \delta\vartheta_{g0h} \rangle)_{i \in I_A} \right\} \end{aligned} \quad (8.8.17)$$

が成り立つ。式 (8.8.17) に仮定 8.8.1 の (4) を用いれば,

$$\|\delta\lambda_h\|_{\mathbb{R}^{|I_A|}}$$

$$\leq c_4 \left( 1 + |I_A| \max_{i \in I_A} |\lambda_i| \right) \max_{(i,j) \in I_A \times (I_A \cup \{0\})} (|\langle \delta g_{ih}, \vartheta_{gj} \rangle| + |\langle g_i, \delta \vartheta_{gjh} \rangle|) \quad (8.8.18)$$

が成り立つ。 $|I_A|$  は有界なので、式 (8.8.18) の  $|\langle \delta g_{ih}, \vartheta_{gj} \rangle|$  について、補題 8.8.2 より

$$|\langle \delta g_{ih}, \vartheta_{gj} \rangle| \leq c_5 h^k \|\vartheta_{gj}\|_X \quad (8.8.19)$$

が得られる。また、 $|\langle g_i, \delta \vartheta_{gjh} \rangle|$  について、補題 8.8.3 より

$$|\langle g_i, \delta \vartheta_{gjh} \rangle| \leq c_6 h^k \|g_i\|_X \quad (8.8.20)$$

が得られる。式 (8.8.20) において、 $\|g_i\|_X$  は有界である。なぜならば、定理 8.5.2 の証明において、仮定 8.8.1 の (1) を用いれば、 $g_i \in W^{k,qr}(D; \mathbb{R})$  が得られるからである。そこで、式 (8.8.18) と式 (8.8.19) を式 (8.8.17) に代入すれば補題の結果が得られる。□

これらの補題に基づいて、次のような結果が得られる。

**定理 8.8.5** ( $\vartheta_g$  の誤差評価) 仮定 8.8.1 が満たされているとき、

$$\|\delta \vartheta_{gh}\|_X \leq ch^k$$

を満たす  $h$  に依存しない正定数  $c$  が存在する。 $\delta \vartheta_{gh}$  は式 (8.8.7) で定義される。□

**証明** 式 (8.8.7) より

$$\delta \vartheta_{gh} = \delta \vartheta_{g0h} + \sum_{i \in I_A} (\delta \lambda_{ih} \vartheta_{gi} + \lambda_i \delta \vartheta_{gih}) \quad (8.8.21)$$

が成り立つ。式 (8.8.21) より

$$\begin{aligned} \|\delta \vartheta_{gh}\|_X &\leq \left( 1 + |I_A| \max_{i \in I_A} |\lambda_i| \right) \max_{i \in I_A \cup \{0\}} \|\delta \vartheta_{gih}\|_X \\ &\quad + \|\delta \lambda_h\|_{\mathbb{R}^{|I_A|}} |I_A| \max_{i \in I_A} \|\vartheta_{gi}\|_X \end{aligned} \quad (8.8.22)$$

が得られる。式 (8.8.22) に補題 8.8.3 と補題 8.8.4 の結果を代入すれば、定理の結果が得られる。□

定理 8.8.5 より、 $\theta$  型位相最適化問題に対する有限要素解の誤差評価について次のことがいえる。

**注意 8.8.6** ( $\theta$  型位相最適化問題に対する有限要素解の誤差評価) 定理 8.8.5 より、三つの境界値問題 (状態決定問題、随伴問題 および  $H^1$  勾配法) の数値解を  $k=1$  次の基底関数を用いた有限要素解によって求めたとき、有限要素分割列  $\{\mathcal{T}_h\}_{h \rightarrow 0}$  に対して探索ベクトル  $\vartheta_{gh}$  の誤差  $\|\delta \vartheta_{gh}\|_X$  は  $h$  の 1 次のオーダーで減少する。□

## 8.9 線形弾性体の位相最適化問題

$\theta$  型位相最適化問題の状態決定問題を線形弾性問題に変更してみよう. ここでは, 線形弾性体の平均コンプライアンス最小化問題を定義して,  $\theta$  微分と 2 階  $\theta$  微分を求めるまでをみてることにする. 評価関数の  $\theta$  微分と 2 階  $\theta$  微分が求められれば, その問題は Poisson 問題の場合と同様の方法で解くことが可能となる.

$D, \Gamma_D$  および  $\Gamma_N$  を  $\theta$  型 Poisson 問題 (問題 8.2.3) のときと同様に, 線形弾性問題の定義域, Dirichlet 境界および Neumann 境界であるとする.  $X$  と  $\mathcal{D}$  に関してはそれぞれ式 (8.1.3) と式 (8.1.4) を用いることにする.

### 8.9.1 状態決定問題

状態決定問題として線形弾性問題を定義しよう. 状態変数の線形空間  $U$  と許容集合  $\mathcal{S}$  を

$$U = \{ \mathbf{u} \in H^1(D; \mathbb{R}^d) \mid \mathbf{u} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \Gamma_D \}, \quad (8.9.1)$$

$$\mathcal{S} = U \cap W^{1,2q_R}(D; \mathbb{R}^d) \quad (8.9.2)$$

とおく. また, 仮定 8.2.1 を次のように変更する.

**仮定 8.9.1 (既知関数の正則性)**  $q_R > d$  に対して

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &\in C^1(X; L^{2q_R}(D; \mathbb{R}^d)), \quad \mathbf{p}_N \in L^{2q_R}(\Gamma_N; \mathbb{R}^d), \\ \mathbf{u}_D &\in H^2(D; \mathbb{R}^d), \quad \mathbf{C} \in L^\infty(D; \mathbb{R}^{d \times d \times d \times d}) \end{aligned}$$

であると仮定する. □

そのうえで, 図 8.9.1 のような  $\theta$  型線形弾性体に対して, 次のような問題を定義する.

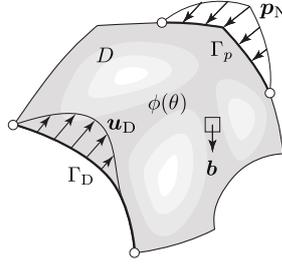
**問題 8.9.2 ( $\theta$  型線形弾性問題)** 仮定 8.9.1 と仮定 8.2.2 が成り立つとする. また,  $\alpha > 1$  は定数,  $\phi(\theta)$  は  $\theta \in \mathcal{D}$  に対して式 (8.1.1) あるいは式 (8.1.2) で与えられるとする. このとき,

$$-\nabla^\top(\phi^\alpha(\theta) \mathbf{S}(\mathbf{u})) = \mathbf{b}^\top(\theta) \quad \text{in } D, \quad (8.9.3)$$

$$\phi^\alpha(\theta) \mathbf{S}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} = \mathbf{p}_N \quad \text{on } \Gamma_N, \quad (8.9.4)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D \quad \text{on } \Gamma_D. \quad (8.9.5)$$

を満たす  $\mathbf{u} : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  を求めよ. □

図 8.12:  $\theta$  型線形弾性体

あとのために, 問題 8.9.2 に対する Lagrange 関数を

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = & \int_D (-\phi^\alpha(\theta) \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) + \mathbf{b}(\theta) \cdot \mathbf{v}) dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{p}_N \cdot \mathbf{v} d\gamma \\ & + \int_{\Gamma_D} \{(\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) \cdot (\phi^\alpha(\theta) \mathbf{S}(\mathbf{v}) \boldsymbol{\nu}) + \mathbf{v} \cdot (\phi^\alpha(\theta) \mathbf{S}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu})\} d\gamma \end{aligned}$$

と定義しておく. ただし,  $\mathbf{u}$  は問題 8.9.2 の解とはかぎらないとする.  $\mathbf{v} \in U$  は Lagrange 乗数である.  $\mathbf{u}$  が問題 8.9.2 の解ならば, 任意の  $\mathbf{v} \in U$  に対して,

$$\mathcal{L}_S(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$$

が成り立つ.

### 8.9.2 平均コンプライアンス最小化問題

線形弾性問題に対する  $\theta$  型位相最適化問題を定義しよう. 評価関数を次のように定義する. 問題 8.9.2 の解  $\mathbf{u}$  に対して,

$$f_0(\theta, \mathbf{u}) = \int_D \mathbf{b}(\theta) \cdot \mathbf{u} dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{p}_N \cdot \mathbf{u} d\gamma - \int_{\Gamma_D} \mathbf{u}_D \cdot (\phi^\alpha(\theta) \mathbf{S}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu}) d\gamma \quad (8.9.6)$$

を平均コンプライアンスとよぶ. また,

$$f_1(\theta) = \int_D \phi(\theta) dx - c_1 \quad (8.9.7)$$

を線形弾性体の大きさに対する制約関数とよぶ. ただし,  $c_1$  は, ある  $\theta \in \mathcal{D}$  に対して  $f_1(\theta) \leq 0$  が成り立つような正の定数とする.

式 (8.9.6) の  $f_0$  が平均コンプライアンスとよばれる理由は次のようである. 式 (8.9.6) の右辺第 1 項と第 2 項はそれぞれ体積力  $\mathbf{b}$  と境界力  $\mathbf{p}_N$  がおこなった仕

事である。  $\mathbf{b}$  と  $\mathbf{p}_N$  は固定されているので、これらの仕事小さいことは  $\mathbf{u}$  は小さいということになる。これら二つの項だけであれば、外力仕事とよべる。しかし、式 (8.9.6) の右辺第 3 項は、  $\mathbf{u}_D$  がおこなった仕事の負値になっている。  $\mathbf{u}_D$  がおこなった仕事は大きい方が変形に対する抵抗する力が強くなることから、負号がつけられている。このような事情により、  $f_0$  は、平均的な変形のしやすさ (コンプライアンス) という意味で、平均コンプライアンスとよばれることになった。

これらの定義を用いて、平均コンプライアンス最小化問題を次のように定義する。

**問題 8.9.3 (平均コンプライアンス最小化問題)**  $D$  と  $S$  をそれぞれ式 (8.1.4) と式 (8.9.2) とおく。  $f_0$  と  $f_1$  をそれぞれ式 (8.9.6) と式 (8.9.7) とする。このとき、

$$\min_{(\theta, \mathbf{u}-\mathbf{u}_D) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}} \{f_0(\theta, \mathbf{u}) \mid f_1(\theta) \leq 0, \text{問題 8.9.2}\}$$

を満たす  $\theta$  を求めよ。 □

### 8.9.3 評価関数の $\theta$ 微分

$f_0(\theta, \mathbf{u})$  の  $\theta$  微分を随伴変数法で求めよう。  $f_0$  の Lagrange 関数を

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) &= f_0(\theta, \mathbf{u}) + \mathcal{L}_S(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) \\ &= \int_D \{-\phi^\alpha(\theta) \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}_0) + \mathbf{b}(\theta) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}_0)\} dx \\ &\quad + \int_{\Gamma_N} \mathbf{p}_N \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}_0) d\gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_D} \{(\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) \cdot (\phi^\alpha(\theta) \mathbf{S}(\mathbf{v}_0) \boldsymbol{\nu}) \\ &\quad + (\mathbf{v}_0 - \mathbf{u}_D) \cdot (\phi^\alpha(\theta) \mathbf{S}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu})\} d\gamma \end{aligned} \quad (8.9.8)$$

とおく。  $(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)$  の任意変動  $(\vartheta, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}_0) \in X \times U \times U$  に対する  $\mathcal{L}_0$  の Fréchet 微分は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_0(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\vartheta, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}_0] &= \mathcal{L}_{0\theta}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\vartheta] + \mathcal{L}_{0\mathbf{u}}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\hat{\mathbf{u}}] + \mathcal{L}_{0\mathbf{v}_0}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\hat{\mathbf{v}}_0] \end{aligned} \quad (8.9.9)$$

とかける。以下で各項について考察する。

式 (8.9.9) の右辺第 3 項は、

$$\mathcal{L}_{0\mathbf{v}_0}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\hat{\mathbf{v}}_0] = \mathcal{L}_{S\mathbf{v}_0}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\hat{\mathbf{v}}_0] = \mathcal{L}_S(\theta, \mathbf{u}, \hat{\mathbf{v}}_0) \quad (8.9.10)$$

となる．式 (8.9.10) は状態決定問題 (問題 8.9.2) の Lagrange 関数になっている．そこで， $\mathbf{u}$  が状態決定問題の弱解ならば，式 (8.9.9) の右辺第 3 項は 0 となる．

また，式 (8.9.9) の右辺第 2 項は，

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{0\mathbf{u}}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) [\hat{\mathbf{u}}] \\ &= \int_D (-\phi^\alpha(\theta) \mathbf{S}(\hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}_0) + \mathbf{b}(\theta) \cdot \hat{\mathbf{u}}) dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{p}_N \cdot \hat{\mathbf{u}} d\gamma \\ & \quad + \int_{\Gamma_D} \{\hat{\mathbf{u}} \cdot (\phi^\alpha(\theta) \mathbf{S}(\mathbf{v}_0) \boldsymbol{\nu}) + (\mathbf{v}_0 - \mathbf{u}_D) \cdot (\phi^\alpha(\theta) \mathbf{S}(\hat{\mathbf{u}}) \boldsymbol{\nu})\} d\gamma \\ &= \mathcal{L}_S(\theta, \mathbf{v}_0, \hat{\mathbf{u}}) \end{aligned} \quad (8.9.11)$$

となる．ここで，式 (8.9.11) がゼロとなるように  $\mathbf{v}_0$  を決定できれば，式 (8.9.9) の右辺第 2 項は 0 となる．この関係は，[自己随伴関係](#)

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_0 \quad (8.9.12)$$

が成り立つことを意味している．

さらに，式 (8.9.9) の右辺第 1 項は，

$$\mathcal{L}_{0\theta}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) [\vartheta] = \int_D \{\mathbf{b}' \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}_0) - \alpha \phi^{\alpha-1} \phi' \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}_0)\} \vartheta dx \quad (8.9.13)$$

となる．

そこで， $\mathbf{u}$  が問題 8.9.2 の弱解で，自己随伴関係 (式 (8.9.12)) が成り立つとする．このときの  $f_0(\theta, \mathbf{u})$  を  $\tilde{f}_0(\theta)$  とかくことにすれば，

$$\tilde{f}'_0(\theta) [\vartheta] = \mathcal{L}_{0\theta}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) [\vartheta] = \langle g_0, \vartheta \rangle \quad (8.9.14)$$

のようにかかれる．ここで，

$$g_0 = 2\mathbf{b}' \cdot \mathbf{u} - \alpha \phi^{\alpha-1} \phi' \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}) \quad (8.9.15)$$

となる．

一方， $f_1(\theta)$  に関しては，任意の  $\vartheta \in X$  に対して

$$f'_1(\theta) [\vartheta] = \int_D \phi' \vartheta dx = \langle g_1, \vartheta \rangle \quad (8.9.16)$$

が成り立つ．

以上の結果に基づけば，式 (8.9.15) の  $g_0$  が入る関数空間は，定理 8.5.2 と同様の結果となる．そこで， $H^1$  勾配法を適用することで，探索ベクトル  $\vartheta_g$  が  $C^{0,1}$  級となることが保証される．

### 8.9.4 評価関数の 2 階 $\theta$ 微分

さらに、平均コンプライアンス  $f_0$  と線形弾性体の大きさ制約に対する評価関数  $f_1$  の 2 階  $\theta$  微分を求めることもできる。ここでは、8.5.2 項で示された手続きに沿ってみていくことにする。

まず、 $f_0$  の 2 階  $\theta$  微分について考えよう。仮定 8.5.4 の (1) に対応して、ここでは、 $\mathbf{b}$  は  $\theta$  の関数ではないと仮定する。仮定 8.5.4 の (2) に対応する関係はここでは満たされている。

$f_0$  の Lagrange 関数  $\mathcal{L}_0$  は式 (8.9.8) によって定義されている。 $(\theta, \mathbf{u})$  を設計変数とみなし、その許容集合と許容方向集合を

$$S = \{(\theta, \mathbf{u}) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S} \mid \mathcal{L}_S(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \text{ for all } \mathbf{v} \in U\},$$

$$T_S(\theta, \mathbf{u}) = \{(\vartheta, \hat{\mathbf{v}}) \in X \times U \mid \mathcal{L}_{S\theta\mathbf{u}}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v})[\vartheta, \hat{\mathbf{v}}] = 0 \text{ for all } \mathbf{v} \in U\}$$

とおく。このとき、 $(\theta, \mathbf{u}) \in S$  の任意変動  $(\vartheta_1, \hat{\mathbf{v}}_1), (\vartheta_2, \hat{\mathbf{v}}_2) \in T_S(\theta, \mathbf{u})$  に対する  $\mathcal{L}_0$  の 2 階 Fréchet 偏微分は

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{0(\theta, \mathbf{u})(\theta, \mathbf{u})}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[(\vartheta_1, \hat{\mathbf{v}}_1), (\vartheta_2, \hat{\mathbf{v}}_2)] \\ &= \mathcal{L}_{0\theta\theta}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\vartheta_1, \vartheta_2] + \mathcal{L}_{0\theta\mathbf{u}}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\vartheta_1, \hat{\mathbf{v}}_2] \\ & \quad + \mathcal{L}_{0\theta\mathbf{u}}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\vartheta_2, \hat{\mathbf{v}}_1] + \mathcal{L}_{0\mathbf{u}\mathbf{u}}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2] \end{aligned} \quad (8.9.17)$$

となる。式 (8.9.17) 右辺の各項は、

$$\mathcal{L}_{0\theta\theta}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\vartheta_1, \vartheta_2] = \int_D -(\phi^\alpha(\theta))'' \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}_0) \vartheta_1 \vartheta_2 \, dx, \quad (8.9.18)$$

$$\mathcal{L}_{0\theta\mathbf{u}}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\vartheta_1, \hat{\mathbf{v}}_2] = \int_D -(\phi^\alpha(\theta))' \mathbf{S}(\hat{\mathbf{v}}_2) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}_0) \vartheta_1 \, dx, \quad (8.9.19)$$

$$\mathcal{L}_{0\theta\mathbf{u}}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\vartheta_2, \hat{\mathbf{v}}_1] = \int_D -(\phi^\alpha(\theta))' \mathbf{S}(\hat{\mathbf{v}}_1) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}_0) \vartheta_2 \, dx, \quad (8.9.20)$$

$$\mathcal{L}_{0\mathbf{u}\mathbf{u}}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2] = 0 \quad (8.9.21)$$

となる。ただし、 $\mathbf{u} - \mathbf{u}_D, \mathbf{v}_0 - \mathbf{u}_D, \hat{\mathbf{v}}_1$  および  $\hat{\mathbf{v}}_2$  は  $\Gamma_D$  上で  $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$  となることを用いた。また、 $(\phi^\alpha(\theta))'$  と  $(\phi^\alpha(\theta))''$  はそれぞれ式 (8.5.14) と式 (8.5.15) である。ここで、 $j \in \{1, 2\}$  を用いて、任意変動  $(\vartheta_j, \hat{\mathbf{v}}_j) \in T_S(\theta, \mathbf{u})$  に対する状態決定問題の Lagrange 関数  $\mathcal{L}_S$  の Fréchet 偏微分は、任意の  $\mathbf{v} \in U$  に対して

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{S\theta\mathbf{u}}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v})[\vartheta_j, \hat{\mathbf{v}}_j] \\ &= \int_D \{ -(\phi^\alpha(\theta))' \vartheta_j \mathbf{S}(\mathbf{v}) - \phi^\alpha(\theta) \mathbf{S}(\hat{\mathbf{v}}_j) \} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) \, dx \\ &= 0 \end{aligned} \quad (8.9.22)$$

となる. ただし,  $\mathbf{v}$  と  $\hat{\mathbf{v}}_j$  は  $\Gamma_D$  上で  $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$  となることが使われた. 式 (8.9.22) より,

$$\mathbf{S}(\hat{\mathbf{v}}_j) = -\frac{(\phi^\alpha(\theta))'}{\phi^\alpha(\theta)} \vartheta_j \mathbf{S}(\mathbf{u}) \quad \text{in } D \quad (8.9.23)$$

が得られる. そこで, 式 (8.9.23) の  $\hat{\mathbf{v}}_j$  を式 (8.9.20) の  $\hat{\mathbf{v}}_1$  と式 (8.9.19) の  $\hat{\mathbf{v}}_2$  に代入し, 状態決定問題と  $f_0$  に対する随伴問題の Dirichlet 境界条件と  $\Gamma_D$  上で  $\hat{\mathbf{v}}_j = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$  を考慮すれば,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{0\theta\mathbf{u}}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\vartheta_1, \hat{\mathbf{v}}_2] &= \mathcal{L}_{0\theta\mathbf{u}}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\vartheta_2, \hat{\mathbf{v}}_1] \\ &= \int_D \frac{(\phi^\alpha(\theta))^2}{\phi^\alpha(\theta)} \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}_0) \vartheta_1 \vartheta_2 \, dx \end{aligned} \quad (8.9.24)$$

が得られる.

以上の結果をまとめれば, 平均コンプライアンス  $f_0$  の 2 階  $\theta$  微分は, 式 (8.9.24) と式 (8.9.18) を式 (8.9.17) に代入することにより,

$$\begin{aligned} h_0(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\vartheta_1, \vartheta_2] &= \int_D \left\{ 2 \frac{(\phi^\alpha(\theta))^2}{\phi^\alpha(\theta)} - (\phi^\alpha(\theta))'' \right\} \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}_0) \vartheta_1 \vartheta_2 \, dx \\ &= \int_D \beta(\alpha, \theta) \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}_0) \vartheta_1 \vartheta_2 \, dx \end{aligned} \quad (8.9.25)$$

となる. ただし,  $\beta(\alpha, \theta)$  は式 (8.5.20) とする. さらに, 自己随伴関係を用いれば,  $\mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}_0) > 0$  となり,  $h_0(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\cdot, \cdot]$  は  $X$  上の強圧的かつ有界なある双 1 次形式となる.

一方,  $f_1(\theta)$  の 2 階  $\theta$  微分は, 任意の  $\vartheta_1, \vartheta_2 \in X$  に対して

$$h_1(\theta)[\vartheta_1, \vartheta_2] = f_1''(\theta)[\vartheta_1, \vartheta_2] = \int_D \phi''(\theta) \vartheta_1 \vartheta_2 \, dx \quad (8.9.26)$$

となる. ここで,  $\phi(\theta)$  に式 (8.1.1) を用いたときには,

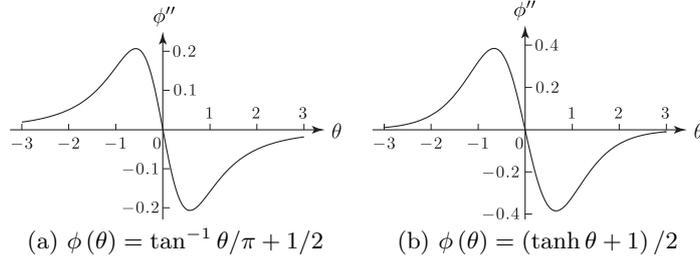
$$\phi''(\theta) = -\frac{1}{\pi} \frac{2\theta}{(1+\theta^2)^2} \quad (8.9.27)$$

となる. また,  $\phi(\theta)$  が式 (8.1.2) で与えられたときには,

$$\phi''(\theta) = -\operatorname{sech}^2 \theta \tanh \theta \quad (8.9.28)$$

となる. 図 8.9.2 は  $\phi''(\theta)$  のグラフを示す.

このように, 平均コンプライアンス最小化問題では, 目的関数  $f_0$  の 2 階  $\theta$  微分は強圧的になるが, 制約関数  $f_1$  の 2 階  $\theta$  微分は強圧的にはならないことになる. そこで, Newton 法 (問題 8.6.6) を使う場合には, 強圧性を確保するための工夫が必要となる.

図 8.13:  $h_1$  における係数関数  $\phi''(\theta)$ 

### 8.9.5 Lagrange 乗数法による評価関数の 2 階 $\theta$ 微分

Lagrange 乗数法を用いて平均コンプライアンス  $f_0$  の 2 階  $\theta$  微分を求める場合には次のようになる. 式 (8.9.14) の  $\tilde{f}'_0(\theta)[\vartheta_1] = \langle g_0, \vartheta_1 \rangle$  に対する Lagrange 関数を

$$\mathcal{L}_{10}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{w}_0) = \langle g_0, \vartheta_1 \rangle + \mathcal{L}_S(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{w}_0) \quad (8.9.29)$$

とおく. ここで,  $\mathcal{L}_S$  は問題 8.9.2 に対する Lagrange 関数である.  $\mathbf{w}_0 \in U$  は,  $g_0$  が  $\mathbf{u}$  の関数であるために用意された随伴変数である.  $\vartheta_1$  は  $\mathcal{L}_{10}$  においては定ベクトルとみなす.

$(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{w}_0)$  の任意変動  $(\vartheta_2, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{w}}_0) \in X \times U^2$  に対する  $\mathcal{L}_{10}$  の Fréchet 微分は

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}'_{10}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{w}_0)[\vartheta_2, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{w}}_0] \\ &= \mathcal{L}_{10\theta}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{w}_0)[\vartheta_2] + \mathcal{L}_{10\mathbf{u}}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{w}_0)[\hat{\mathbf{u}}] \\ & \quad + \mathcal{L}_{10\mathbf{w}_0}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{w}_0)[\hat{\mathbf{w}}_0] \end{aligned} \quad (8.9.30)$$

となる. 式 (8.9.30) の右辺第 3 項は,  $\mathbf{u}$  が状態決定問題の解ならばゼロとなる.

また, 式 (8.9.30) の右辺第 2 項は,

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{10\mathbf{u}}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{w}_0)[\hat{\mathbf{u}}] \\ &= \int_D \{ (2\mathbf{b}' \cdot \hat{\mathbf{u}} - 2\alpha\phi^{\alpha-1}\phi' \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\hat{\mathbf{u}})) \vartheta_1 - \phi^\alpha \mathbf{S}(\mathbf{w}_0) \cdot \mathbf{E}(\hat{\mathbf{u}}) \} dx \end{aligned} \quad (8.9.31)$$

となる. そこで, 任意の  $\hat{\mathbf{u}} \in U$  に対して式 (8.9.31) がゼロとなる条件は,  $\mathbf{w}_0$  を次の随伴問題の解とおくことと同値である.

**問題 8.9.4** ( $\langle g_0, \vartheta_1 \rangle$  に対する  $\mathbf{w}_0$  の随伴問題) 問題 8.9.2 の仮定のもとで,  $\vartheta_1 \in X$  が与えられたとき,

$$-\nabla^\top(\phi^\alpha \mathbf{S}(\mathbf{w}_0)) = 2 \left( \nabla^\top(\alpha\phi^{\alpha-1}\phi' \mathbf{S}(\mathbf{u})) + \mathbf{b}'^\top \right) \vartheta_1 \quad \text{in } D,$$

$$\begin{aligned}\phi^\alpha \mathbf{S}(\mathbf{w}_0) \boldsymbol{\nu} &= 2\alpha\phi^{\alpha-1}\phi' \mathbf{S}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} \vartheta_1 \quad \text{on } \Gamma_N, \\ \mathbf{w}_0 &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{on } \Gamma_D\end{aligned}$$

を満たす  $\mathbf{w}_0 = \mathbf{w}_0(\vartheta_1) \in U$  を求めよ.  $\square$

さらに, 式 (8.9.30) の右辺第 1 項は,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{10\theta}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{w}_0)[\vartheta_2] &= \int_D \left[ \{2\mathbf{b}'' \cdot \mathbf{u} - (\alpha(\alpha-1)\phi^{\alpha-2}\phi'^2 + \alpha\phi^{\alpha-1}\phi'') \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u})\} \vartheta_1 \right. \\ &\quad \left. - \alpha\phi^{\alpha-1}\phi' \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{w}_0) + \mathbf{b}' \cdot \mathbf{w}_0 \right] \vartheta_2 \, dx\end{aligned}$$

となる.

そこで,  $\mathbf{u}$  と  $\mathbf{w}_0(\vartheta_1)$  はそれぞれ問題 8.9.2 と問題 8.9.4 の弱解であるとする. このときの  $f_0(\theta, \mathbf{u})$  を  $\tilde{f}_0(\theta)$  とかくことにすれば,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{10\theta}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0(\vartheta_1), \mathbf{z}_0(\vartheta_1))[\vartheta_2] &= \tilde{f}_0''(\theta)[\vartheta_1, \vartheta_2] \\ &= \langle g_{H0}(\theta, \vartheta_1), \vartheta_2 \rangle\end{aligned}\tag{8.9.32}$$

のようにかける. ここで, 平均コンプライアンスの Hesse 勾配  $g_{H0}$  は

$$\begin{aligned}g_{H0}(\theta, \vartheta_1) &= \left\{ -(\alpha(\alpha-1)\phi^{\alpha-2}\phi'^2 + \alpha\phi^{\alpha-1}\phi'') \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}) + 2\mathbf{b}'' \cdot \mathbf{u} \right\} \vartheta_1 \\ &\quad - \alpha\phi^{\alpha-1}\phi' \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{w}_0(\vartheta_1)) + \mathbf{b}' \cdot \mathbf{w}_0(\vartheta_1)\end{aligned}\tag{8.9.33}$$

となる.

なお,  $\mathbf{b}$  は  $\theta$  の関数ではないと仮定すれば, 問題 8.9.4 の解  $\mathbf{w}_0$  について,

$$\mathbf{E}(\mathbf{w}_0(\vartheta_1)) = -2\frac{\alpha\phi'}{\phi} \mathbf{E}(\mathbf{v}_0) \vartheta_1\tag{8.9.34}$$

が成り立つ. 式 (8.9.34) を式 (8.9.33) に代入すれば, 式 (8.9.32) は式 (8.9.25) と一致することが確かめられる.

### 8.9.6 数値例

2次元線形弾性体のコートがけ問題とよばれる境界条件に対する平均コンプライアンス最小化の結果が図 8.9.3 から図 8.9.5 に示されている. 初期密度 ( $\theta = 0$ ) と線形弾性問題の境界条件を図 8.9.3 (a) に示す. 密度を制約する領域 (式 (8.1.3) の  $\bar{\Omega}_{C0}$ ) は設けなかった. プログラムは, 有限要素法プログラミング言語 FreeFEM

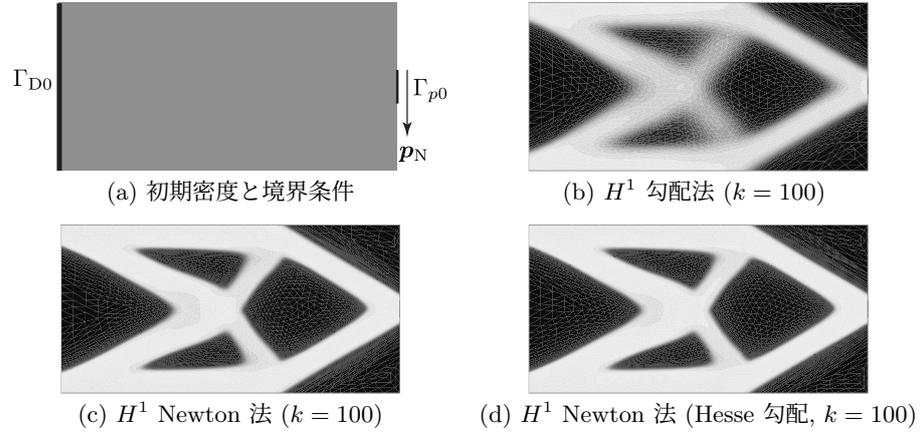


図 8.14: 平均コンプライアンス最小化に対する数値例: 密度

(<https://freefem.org/>) でかかれている。線形弾性問題と  $H^1$  勾配法あるいは  $H^1$  Newton 法の有限要素法解析では三角形 2 次要素が使われた。また、 $H^1$  Newton 法を用いた場合には、 $k_N = 10$  から  $H^1$  Newton 法が開始された。式 (8.7.1) の  $c_a$ 、式 (8.6.3) の  $c_D$ 、式 (8.6.7) の  $c_{D1}$  と  $c_{D0}$ 、式 (8.7.8) の  $c_h$  および適合メッシュの誤差レベルを決めるパラメータ (errelas) の決め方によって結果は変化する。詳細は、プログラムをみていただきたい<sup>1</sup>。

図 8.9.3 (b) から (d) は 3 つの方法 ( $g_{\mathcal{L}} = g_0 + \lambda_1 g_1$  を用いた  $H^1$  勾配法、 $h_{\mathcal{L}} = h_0 + \lambda_1 h_1$  と  $g_{\mathcal{L}}$  を用いた  $H^1$  Newton 法、 $g_{H0}, h_1, g_{\mathcal{L}}$  を用いた  $H^1$  Newton 法) で得られた密度の結果を示す。図 8.9.4 (a) は、初期密度のときの  $f_0$  を表す  $f_{0\text{init}}$  と初期密度の領域積分 (体積) の値に設定された  $c_1$  で規準化された評価関数  $f_0/f_{0\text{init}}$  と  $1 + f_1/c_1$  の繰返し数  $k$  に対する変化を示している。図 8.9.4 (b) は、これらの評価関数を、 $X$  上の探索距離  $\sum_{i=0}^{k-1} \|\vartheta_{g^{(i)}}\|_X$  に対して示している。図 8.9.4 (c) と (d) は、探索経路に沿って観測したときの  $f_0$  の勾配 (すなわち Lagrange 関数  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \lambda_1 f_1$  の勾配)  $\langle g_{\mathcal{L}}, \vartheta_{g^{(k)}} \rangle / \|\vartheta_{g^{(k)}}\|_X$  の変化をそれぞれ繰返し数と探索距離に対して示している。さらに、図 8.9.4 (e) と (f) は、探索経路に沿って観測したときの  $f_0$  の 2 階微分  $h_{\mathcal{L}}[\vartheta_{g^{(k)}}, \vartheta_{g^{(k)}}] / \|\vartheta_{g^{(k)}}\|_X^2$  (Hesse 勾配を用いた  $H^1$  Newton 法の場合は  $(\langle g_{H0}, \vartheta_{g^{(k)}} \rangle + \lambda_1 h_1[\vartheta_{g^{(k)}}, \vartheta_{g^{(k)}}]) / \|\vartheta_{g^{(k)}}\|_X^2$ ) の変化をそれぞれ繰返し数と探索距離に対して示している。ただし、 $i$  回目の探索ベクトルのノルムを

$$\|\vartheta_{g^{(i)}}\|_X = \left( \int_D (\nabla \vartheta_{g^{(i)}} \cdot \nabla \vartheta_{g^{(i)}} + \vartheta_{g^{(i)}}^2) \, dx \right)^{1/2} \quad (8.9.35)$$

<sup>1</sup>講義資料 [FreeFEM\\_program\\_chap\\_8.zip](#)

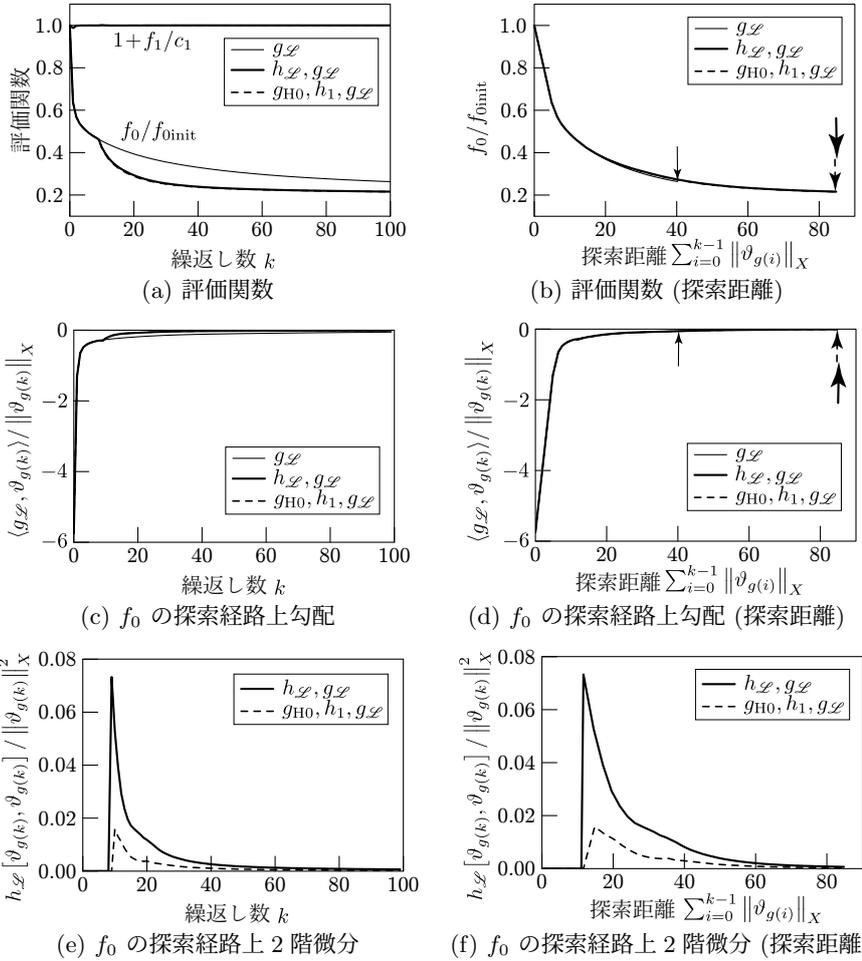


図 8.15: 平均コンプライアンス最小化に対する数値例: 評価関数と探索経路に沿った評価関数の勾配と2階微分 ( $g_{\mathcal{L}}$ :  $H^1$  勾配法,  $h_{\mathcal{L}}, g_{\mathcal{L}}$ :  $H^1$  Newton 法,  $g_{H0}, h_1, g_{\mathcal{L}}$ : Hesse 行列を用いた  $H^1$  Newton 法)

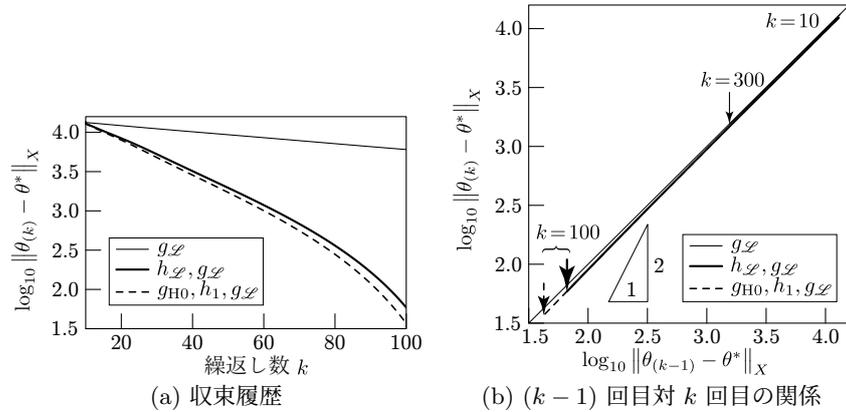


図 8.16: 平均コンプライアンス最小化に対する数値例: 近似最小点  $\theta^*$  からの距離  $\|\theta^{(k)} - \theta^*\|_X$  ( $g_{\mathcal{L}}$ :  $H^1$  勾配法,  $h_{\mathcal{L}}, g_{\mathcal{L}}$ :  $H^1$  Newton 法,  $g_{H0}, h_1, g_{\mathcal{L}}$ : Hesse 勾配を用いた  $H^1$  Newton 法)

と定義した. PC を用いて  $k = 100$  まで計算したときの時間は,  $H^1$  勾配法,  $H^1$  Newton 法, Hesse 勾配を用いた  $H^1$  Newton 法に対して, それぞれ 6.897, 17.073, 32.394 sec であった.

これらの結果について, 説明を補足して, 考察を加えたい. 図 8.9.4 (a) は,  $H^1$  勾配法よりも  $H^1$  Newton 法を使うことによって, 繰返し数  $k$  に対して評価関数の収束が早まったように見える. しかしながら, 実際は,  $H^1$  Newton 法に切り替えた際に式 (8.6.7) の  $c_{D1}$  と  $c_{D0}$  を数値不安定現象が現れない程度に小さな値に置き換えている. その結果, ステップサイズが大きくなり, 収束が早くなったと考えられる. それを裏付ける根拠として, 次のような現象が観察される.  $H^1$  Newton 法のプログラムにおいて  $c_h$  を 0 とおいた計算 ( $H^1$  勾配法) を行うと,  $k = k_N$  において計算が破綻する. しかし, 式 (8.6.7) の  $c_{D0}$  をやや大きくすると  $H^1$  Newton 法と同程度の収束挙動が得られる. さらに, 図 8.9.4 (b) において, 探索距離に対する 3 つのグラフが重なることから, ほぼ同じ探索経路をたどっていると考えられる. これらの観察に基づけば, ステップサイズをやや大きくとれるという点で  $H^1$  Newton 法は優れているといえる.

最小点近傍の様子は, 図 8.9.4 の (d) と (f) より観察される. これらのグラフより, 探索方向に沿った  $f_0$  の 2 階微分は正值をとり, 局所最小点になっていることが確認される. また, 最小点近傍は, 1 階微分だけでなく, 2 階微分もゼロとなるような点であることがわかる. この原因は, 密度を設計変数  $\theta$  のシグモイド関数で与えたために, 密度が 0 と 1 に漸近する最小点では,  $\theta$  の変動に対する密度の勾配が小さくなり, その結果, 評価関数の変動も小さくなったと考えられる.

さらに、図 8.9.5 (a) には、 $H^1$  Newton 法の繰返し数を指定された値よりもおおきくとったときの  $\theta$  の数値解を近似最小点  $\theta^*$  とみなして、3つの方法で得られた  $\theta^*$  からの距離  $\|\theta_{(k)} - \theta^*\|_X$  を繰返し数  $k$  に対して示している。この図から、 $H^1$  Newton 法や Hesse 勾配を用いた  $H^1$  Newton 法の結果は、収束次数が1次以上であることが確認される。しかしながら、繰返し数  $(k-1)$  回目に対して  $k$  回目の距離  $\|\theta_{(k)} - \theta^*\|_X$  をプロットした図 8.9.5 (b) (このグラフの勾配は、式 (3.8.13) を使って説明されたように、収束次数を表す) より、 $H^1$  Newton 法の収束次数は、1次よりは大きい、2次にはなっていないことが確認される。その理由として考えられることは、 $H^1$  Newton 法において、式 (8.6.6) 左辺の強圧性と正則性を補うために、本来の Hesse 形式に  $X$  上の双1次形式  $a_X$  を追加したことである。それにより、 $H^1$  Newton 法は本来の Newton 法とは異なる構造になっていた。本節で扱ってきたような問題に対して2次の収束性をもつ解法が存在するかについては依然として不明である。

## 8.10 Stokes 流れ場の位相最適化問題

流れ場に対しても位相最適化問題が構成できることが文献 [1, 8, 11–14, 33] に示された。ここでは、1.3 節でとりあげられた1次元分岐 Stokes 流れ場の平均流れ抵抗最小化問題を  $d \in \{2, 3\}$  次元の  $\theta$  型位相最適化問題に拡張する。ここでも、評価関数の  $\theta$  微分と2階  $\theta$  微分が求められるところまでを示すことにする。本節では、 $D$  を Stokes 流れ場と仮定し、 $X$  と  $\mathcal{D}$  はそれぞれ式 (8.1.3) と式 (8.1.4) で定義されているものとする。

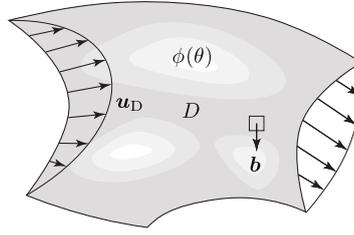
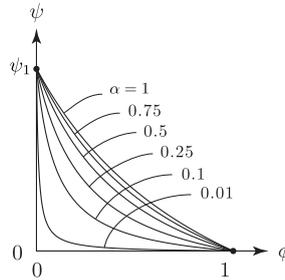
### 8.10.1 状態決定問題

状態決定問題として Stokes 問題を定義しよう。5.5 節で Stokes 問題 (問題 5.5.1) が定義されたが、ここでは、図 8.10.1 のような  $\theta$  型 Stokes 流れ場を考える。そのために、一部の定義を追加する。 $U$  および  $\mathcal{S}$  に関しては、それぞれ式 (8.9.1) および式 (8.9.2) を用いることにする。ただし、 $\Gamma_D = \partial D$  とする。さらに、 $q_R > d$  に対して

$$P = \left\{ q \in L^2(D; \mathbb{R}) \mid \int_D q \, dx = 0 \right\}, \quad (8.10.1)$$

$$\mathcal{Q} = P \cap L^{2q_R}(D; \mathbb{R}) \quad (8.10.2)$$

とおく。

図 8.17:  $\theta$  型 Stokes 流れ場図 8.18: 含水率  $\phi$  に対する流れにくさを表す係数  $\psi$ 

流れ場の位相最適化問題では、多孔質媒体を通過する流体の流れ (浸透流) を利用する。浸透流では、流速  $\mathbf{u}$  と圧力  $p$  に対して **Darcy 則**

$$\mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla p$$

が成り立つと仮定される。ここで、 $k$  および  $\mu$  を透過係数および粘性係数とよばれる正定数である。流れ場の位相最適化問題では、浸透流の流れにくさを表す定数  $\mu/k$  を

$$\psi(\phi) = \psi_1 \left\{ 1 - \frac{\phi(1+\alpha)}{\phi+\alpha} \right\} = \psi_1 \frac{\alpha(1-\phi)}{\alpha+\phi} \quad (8.10.3)$$

におきかえて、Stokes 方程式の  $\nabla p$  を  $\psi(\phi(\theta)) \mathbf{u} + \nabla p$  におきかえる。ここで、 $\phi$  は流体の密度に相当する含水率を表し、その値域は  $[0, 1]$  に制限されていると仮定する。そこで、密度と同様に、 $\phi$  は設計変数  $\theta \in X$  に対するシグモイド関数で与えられると仮定する。また、 $\psi_1$  は流れにくさの最大値を与える正定数、 $\alpha$  は非線形性を制御するための定数で  $(0, 1]$  から選ぶことにする。文献 [1] では計算の進行に合わせて 0.01 から 1 へと変化させている。図 8.10.2 は、関数  $\psi(\phi)$  を示す。

ここでは、次の仮定をおく。

**仮定 8.10.1 (既知関数の正則性)**  $q_R > d$  に対して

$$\mathbf{b} \in L^{2q_R}(D; \mathbb{R}^d), \quad \mathbf{u}_D \in \{ \mathbf{u} \in W^{1,2q_R}(D; \mathbb{R}^d) \mid \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ in } D \}$$

であると仮定する. □

これらの仮定を用いて,  $\theta$  型 Stokes 問題を次のように定義する.

**問題 8.10.2 ( $\theta$  型 Stokes 問題)**  $\mathbf{b}$  および  $\mathbf{u}_D$  は仮定 8.10.1 を満たし, 境界上角点の開き角に対して仮定 8.2.2 が成り立つと仮定する. また,  $\psi(\phi)$  を式 (8.10.3) とする. さらに,  $\phi(\theta)$  は式 (8.1.1) あるいは式 (8.1.2) で与えられるとする. このとき,

$$-\nabla^\top (\mu \nabla \mathbf{u}^\top) + \psi(\phi(\theta)) \mathbf{u}^\top + \nabla^\top p = \mathbf{b}^\top \quad \text{in } D, \quad (8.10.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } D, \quad (8.10.5)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D \quad \text{on } \partial D, \quad (8.10.6)$$

$$\int_D p \, dx = 0 \quad (8.10.7)$$

を満たす  $(\mathbf{u}, p) : D \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$  を求めよ. □

あとのために, 問題 8.10.2 に対する Lagrange 関数を

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}, q) &= \int_D \{ -\mu (\nabla \mathbf{u}^\top) \cdot (\nabla \mathbf{v}^\top) - \psi(\phi(\theta)) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \\ &\quad + p \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + q \nabla \cdot \mathbf{u} \} dx \\ &\quad + \int_{\partial D} \{ (\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) \cdot (\mu \partial_\nu \mathbf{v} - q \boldsymbol{\nu}) + \mathbf{v} \cdot (\mu \partial_\nu \mathbf{u} - p \boldsymbol{\nu}) \} d\gamma \end{aligned} \quad (8.10.8)$$

と定義しておく. ただし,  $(\mathbf{u}, p)$  は問題 8.10.2 の解とはかぎらないとする.  $(\mathbf{v}, q) \in U \times P$  は Lagrange 乗数である.

$(\mathbf{u}, p)$  が問題 8.10.2 の解のとき, 任意の  $(\mathbf{v}, q) \in U \times P$  に対して,

$$\mathcal{L}_S(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}, q) = 0$$

が成り立つ.

### 8.10.2 平均流れ抵抗最小化問題

Stokes 流れ場に対して  $\theta$  型位相最適化問題を定義しよう. 評価関数を次のように定義する. まず, 流れにくさを表す評価関数として

$$f_0(\theta, \mathbf{u}, p) = - \int_D \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, dx + \int_{\partial D} \mathbf{u}_D \cdot (\mu \partial_\nu \mathbf{u} - p \boldsymbol{\nu}) \, d\gamma \quad (8.10.9)$$

を定義する. 式 (8.10.9) の右辺第 1 項は体積力による仕事率の負値を表す. この値は大きい方が流速が大きくなることから, 負号がつけられた. 一方, 式 (8.10.9) の右辺第 2 項は, Stokes 流れ場の内部で粘性によって失われた単位時間あたりのエネルギーを境界積分で表したものに相当する. これらは, いずれも平均的な流れにくさを表すことから,  $f_0$  を平均流れ抵抗とよぶことにする. それに対して,

$$f_1(\theta) = \int_D \phi(\theta) \, dx - c_1 \quad (8.10.10)$$

を流れ場の大きさ制約に対する評価関数とする. ただし,  $c_1$  は, ある  $\theta \in \mathcal{D}$  に対して  $f_1(\theta) \leq 0$  が成り立つような正の定数とする. これらを用いて, 平均流れ抵抗最小化問題を次のように定義する.

**問題 8.10.3 (平均流れ抵抗最小化問題)**  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{S}$  および  $\mathcal{Q}$  をそれぞれ式 (8.1.4), 式 (8.9.2) および式 (8.10.2) とおく.  $(\mathbf{u}, p)$  を  $\theta \in \mathcal{D}$  に対する問題 8.10.2 の解として,  $f_0$  と  $f_1$  を式 (8.10.9) と式 (8.10.10) で与えられるとする. このとき,

$$\min_{(\theta, \mathbf{u} - \mathbf{u}_D, p) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S} \times \mathcal{Q}} \{ f_0(\theta, \mathbf{u}, p) \mid f_1(\theta) \leq 0, \text{ Problem 8.10.2} \}$$

を満たす  $\theta$  を求めよ. □

### 8.10.3 評価関数の $\theta$ 微分

$f_0(\theta, \mathbf{u}, p)$  の  $\theta$  微分を随伴変数法で求めよう.  $f_0$  の Lagrange 関数を

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0) &= f_0(\theta, \mathbf{u}, p) - \mathcal{L}_S(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0) \\ &= \int_D \left\{ \mu (\nabla \mathbf{u}^\top) \cdot (\nabla \mathbf{v}_0^\top) + \psi(\phi(\theta)) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_0 - p \nabla \cdot \mathbf{v}_0 \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{v}_0 + \mathbf{u}) - q_0 \nabla \cdot \mathbf{u} \right\} dx \\ &\quad - \int_{\partial D} \{ (\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) \cdot (\mu \partial_\nu \mathbf{v}_0 - q_0 \boldsymbol{\nu}) + (\mathbf{v}_0 - \mathbf{u}_D) \cdot (\mu \partial_\nu \mathbf{u} - p \boldsymbol{\nu}) \} d\gamma \end{aligned} \quad (8.10.11)$$

とおく. 線形弾性体の平均コンプライアンスに対する Lagrange 関数が定義された式 (8.9.8) と比較して, ここでは  $\mathcal{L}_S$  に負号がつけられた. この変更は, のちに自己随伴関係を得るためのものである. 線形弾性体の平均コンプライアンス最小化問題では変位の最小化を目指していたが, Stokes 流れ場の平均流れ抵抗最小化問題では流速の最大化を目指しているために, このような違いが生じた.  $(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0)$  の任意変動  $(\vartheta, \hat{\mathbf{u}}, \hat{p}, \hat{\mathbf{v}}_0, \hat{q}_0) \in X \times (U \times P)^2$  に対する  $\mathcal{L}_0$  の Fréchet 微分は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_0(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0)[\vartheta, \hat{\mathbf{u}}, \hat{p}, \hat{\mathbf{v}}_0, \hat{q}_0] \\ = \mathcal{L}_{0\theta}(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0)[\vartheta] + \mathcal{L}_{0up}(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0)[\hat{\mathbf{u}}, \hat{p}] \\ + \mathcal{L}_{0v_0q_0}(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0)[\hat{\mathbf{v}}_0, \hat{q}_0] \end{aligned} \quad (8.10.12)$$

とかける. 以下で各項について考察する.

式 (8.10.12) の右辺第 3 項は,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{0v_0q_0}(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0)[\hat{\mathbf{v}}_0, \hat{q}_0] &= \mathcal{L}_{Sv_0q_0}(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0)[\hat{\mathbf{v}}_0, \hat{q}_0] \\ &= -\mathcal{L}_S(\theta, \mathbf{u}, p, \hat{\mathbf{v}}_0, \hat{q}_0) \end{aligned} \quad (8.10.13)$$

となる. 式 (8.10.13) は状態決定問題 (問題 8.10.2) の Lagrange 関数になっている. そこで,  $(\mathbf{u}, p)$  が状態決定問題の弱解ならば, 式 (8.10.12) の右辺第 3 項はゼロとなる.

また, 式 (8.10.12) の右辺第 2 項は,  $(\mathbf{u}, p)$  の任意の変動  $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{p}) \in U \times P$  に対して,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{0up}(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0)[\hat{\mathbf{u}}, \hat{p}] \\ = \int_D \left\{ \mu \left( \nabla \hat{\mathbf{u}}^\top \right) \cdot \left( \nabla \mathbf{v}_0^\top \right) + \psi(\phi(\theta)) \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}_0 - \hat{p} \nabla \cdot \mathbf{v}_0 \right. \\ \left. - \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}} - q_0 \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} \right\} dx \\ - \int_{\partial D} \left\{ \hat{\mathbf{u}} \cdot (\mu \partial_\nu \mathbf{v}_0 - q_0 \boldsymbol{\nu}) + (\mathbf{v}_0 - \mathbf{u}_D) \cdot (\mu \partial_\nu \hat{\mathbf{u}} - \hat{p} \boldsymbol{\nu}) \right\} d\gamma \\ = -\mathcal{L}_S(\theta, \mathbf{v}_0, q_0, \hat{\mathbf{u}}, \hat{p}) \end{aligned} \quad (8.10.14)$$

となる. そこで, [自己随伴関係](#)

$$(\mathbf{u}, p) = (\mathbf{v}_0, q_0) \quad (8.10.15)$$

が成り立つとき, 式 (8.10.12) の右辺第 2 項はゼロとなる.

さらに, 式 (8.10.12) の右辺第 1 項は,

$$\mathcal{L}_{0\theta}(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0)[\vartheta] = \int_D \psi'(\phi(\theta)) \phi'(\theta) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_0 \vartheta \, dx \quad (8.10.16)$$

となる.

そこで,  $(\mathbf{u}, p)$  が問題 8.10.2 の弱解で, 自己随伴関係式 (8.10.15) が成り立つとする. このときの  $f_0(\theta, \mathbf{u}, p)$  を  $\tilde{f}_0(\theta)$  とかくことにすれば,

$$\tilde{f}'_0(\theta)[\vartheta] = \mathcal{L}_{0\theta}(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0)[\vartheta] = \langle g_0, \vartheta \rangle \quad (8.10.17)$$

のようにかかれる. ここで,

$$g_0 = \psi' \phi' \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \quad (8.10.18)$$

となる.  $\psi(\phi)$  に式 (8.10.3) を用いたときには,

$$\psi'(\phi) = -\psi_1 \frac{\alpha(1+\alpha)}{(\phi+\alpha)^2} \quad (8.10.19)$$

となる.

一方,  $f_1(\theta)$  に関しては, 任意の  $\vartheta \in X$  に対して

$$f'_1(\theta)[\vartheta] = \int_D \phi' \vartheta \, dx \quad (8.10.20)$$

が成り立つ.

以上の結果に基づけば, 式 (8.10.18) の  $g_0$  が入る関数空間について定理 8.5.2 の結果よりも滑らかな  $W^{1,q_{\mathbb{R}}}(D; \mathbb{R}) \subset X'$  に入る.  $W^{1,q_{\mathbb{R}}}(D; \mathbb{R}) \subset C^0(D; \mathbb{R})$  であることから,  $H^1$  勾配法を適用しなくても数値不安定現象が発生しないことが考えられる. しかし, 探索ベクトル  $\vartheta_g$  が  $C^{0,1}$  級を保証するためには  $H^1$  勾配法が必要である.

#### 8.10.4 評価関数の 2 階 $\theta$ 微分

さらに, 平均流れ抵抗  $f_0$  と流れ場の大きさ制約に対する評価関数  $f_1$  の 2 階  $\theta$  微分を求めることもできる. ここでも, 8.5.2 項でみてきた手続きに沿って,  $f_0$  と  $f_1$  の 2 階  $\theta$  微分を求めてみよう.

まず,  $f_0$  の 2 階  $\theta$  微分について考えよう. 仮定 8.5.4 の (1) に対応して, ここでは,  $\mathbf{b}$  は  $\theta$  の関数ではないと仮定する. 仮定 8.5.4 の (2) に対応する関係はここでは満たされている.

$f_0$  の Lagrange 関数  $\mathcal{L}_0$  は式 (8.10.11) によって定義されている.  $(\theta, \mathbf{u}, p)$  を設計変数とみなし, その許容集合と許容方向集合を

$$S = \{(\theta, \mathbf{u}, p) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S} \times \mathcal{Q} \mid \mathcal{L}_S(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}, q) = 0 \text{ for all } (\mathbf{v}, q) \in U \times P\},$$

$$T_S(\theta, \mathbf{u}, p) = \{(\vartheta, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\pi}) \in X \times U \times P \mid \\ \mathcal{L}_{S\theta up}(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}, q)[\vartheta, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\pi}] = 0 \text{ for all } (\mathbf{v}, \hat{\pi}) \in U \times P\}.$$

とおく. このとき,  $(\theta, \mathbf{u}, p) \in S$  の任意変動  $(\vartheta_1, \hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\pi}_1), (\vartheta_2, \hat{\mathbf{v}}_2, \hat{\pi}_2) \in T_S(\theta, \mathbf{u}, p)$  に対する  $\mathcal{L}_0$  の 2 階 Fréchet 偏微分は

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{0(\theta, \mathbf{u}, p)(\theta, \mathbf{u}, p)}(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0)[(\vartheta_1, \hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\pi}_1), (\vartheta_2, \hat{\mathbf{v}}_2, \hat{\pi}_2)] \\ &= \mathcal{L}_{0\theta\theta}(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0)[\vartheta_1, \vartheta_2] + \mathcal{L}_{0\theta up}(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0)[\vartheta_1, \hat{\mathbf{v}}_2, \hat{\pi}_2] \\ & \quad + \mathcal{L}_{0\theta up}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\vartheta_2, \hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\pi}_1] + \mathcal{L}_{0upup}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\pi}_1, \hat{\mathbf{v}}_2, \hat{\pi}_2] \end{aligned} \quad (8.10.21)$$

となる. 式 (8.10.21) 右辺の各項は,

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{0\theta\theta}(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0)[\vartheta_1, \vartheta_2] \\ &= \int_D \left\{ \psi''(\phi(\theta))(\phi'(\theta))^2 + \psi'(\phi(\theta))\phi''(\theta) \right\} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_0 \vartheta_1 \vartheta_2 \, dx, \end{aligned} \quad (8.10.22)$$

$$\mathcal{L}_{0\theta up}(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0)[\vartheta_1, \hat{\mathbf{v}}_2, \hat{\pi}_2] = \int_D \psi'(\phi(\theta))\phi'(\theta) \hat{\mathbf{v}}_2 \cdot \mathbf{v}_0 \vartheta_1 \, dx, \quad (8.10.23)$$

$$\mathcal{L}_{0\theta up}(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0)[\vartheta_2, \hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\pi}_1] = \int_D \psi'(\phi(\theta))\phi'(\theta) \hat{\mathbf{v}}_1 \cdot \mathbf{v}_0 \vartheta_2 \, dx, \quad (8.10.24)$$

$$\mathcal{L}_{0upup}(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0)[\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\pi}_1, \hat{\mathbf{v}}_2, \hat{\pi}_2] = 0 \quad (8.10.25)$$

となる. ただし,  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_D, \mathbf{v}_0 - \mathbf{u}_D, \hat{\mathbf{v}}_1$  および  $\hat{\mathbf{v}}_2$  は  $\partial D$  上で  $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$  となることを用いた. ここで,  $j \in \{1, 2\}$  を用いて, 任意変動  $(\vartheta_j, \hat{\mathbf{v}}_j, \hat{\pi}_j) \in T_S(\theta, \mathbf{u}, p)$  に対する状態決定問題の Lagrange 関数  $\mathcal{L}_S$  の Fréchet 偏微分は, 任意の  $(\mathbf{v}, q) \in U \times P$  に対して

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{S\theta up}(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}, q)[\vartheta, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\pi}] \\ &= \int_D \left\{ -\mu(\nabla \hat{\mathbf{v}}^\top) \cdot (\nabla \mathbf{v}^\top) - \psi'(\phi(\theta))\phi'(\theta) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \vartheta \right. \\ & \quad \left. - \psi(\phi(\theta)) \hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \hat{\pi} \nabla \cdot \mathbf{v} + q \nabla \cdot \hat{\mathbf{v}} \right\} dx \\ &= 0 \end{aligned} \quad (8.10.26)$$

が成り立つ. ただし,  $\mathbf{v}$  と  $\hat{\mathbf{v}}$  は  $\Gamma_D$  上で  $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$  となること, および式 (8.10.5) が使われた.

ここで, 次の仮定を設ける. 平均流れ抵抗最小化問題 (問題 8.10.3) の極小点では流れ場の含水率  $\phi(\theta)$  が収束し, 流れにくさを与えるために導入された項は十分小

さくなくと考えられる。そこで、式 (8.10.26) において、

$$\int_D \left\{ -\mu \left( \nabla \hat{\mathbf{v}}_j^\top \right) \cdot \left( \nabla \mathbf{v}^\top \right) + \hat{\pi}_j \nabla \cdot \mathbf{v} + q \nabla \cdot \hat{\mathbf{v}}_j \right\} dx = 0 \quad (8.10.27)$$

が成り立つと仮定する。このとき、

$$\hat{\mathbf{v}}_j = -\frac{\psi'(\phi(\theta)) \phi'(\theta)}{\psi(\phi(\theta))} \vartheta_j \mathbf{u} \quad \text{in } D \quad (8.10.28)$$

が得られる。そこで、式 (8.10.28) の  $\hat{\mathbf{v}}_j$  を式 (8.10.24) の  $\hat{\mathbf{v}}_1$  と式 (8.10.23) の  $\hat{\mathbf{v}}_2$  に代入すれば、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{0\theta\mathbf{u}p}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) [\vartheta_1, \hat{\mathbf{v}}_2, \hat{\pi}_2] \\ &= \mathcal{L}_{0\theta\mathbf{u}p}(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0) [\vartheta_2, \hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\pi}_1] \\ &= \int_D -\frac{(\psi'(\phi(\theta)) \phi'(\theta))^2}{\psi(\phi(\theta))} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_0 \vartheta_1 \vartheta_2 \, dx \end{aligned} \quad (8.10.29)$$

が得られる。

以上の結果をまとめれば、平均流れ抵抗  $f_0$  の 2 階  $\theta$  微分は、式 (8.10.29) と式 (8.10.22) を式 (8.10.21) に代入することにより、

$$\begin{aligned} h_0(\vartheta_1, \vartheta_2) &= \int_D \left\{ \psi''(\phi')^2 + \psi' \phi'' - 2 \frac{(\psi' \phi')^2}{\psi} \right\} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_0 \vartheta_1 \vartheta_2 \, dx \\ &= \int_D \psi_1 \beta(\alpha, \theta) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_0 \vartheta_1 \vartheta_2 \, dx \end{aligned} \quad (8.10.30)$$

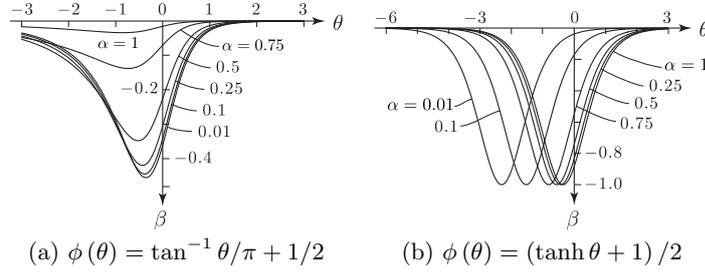
となる。ただし、 $\psi'(\phi)$  は式 (8.10.19) となり、

$$\psi''(\phi) = \frac{2\alpha(1+\alpha)}{(\phi+\alpha)^3} \quad (8.10.31)$$

となる。 $\phi(\theta)$  に式 (8.1.1) を用いたときには、 $\phi'(\theta)$  と  $\phi''(\theta)$  はそれぞれ式 (8.5.7) および式 (8.9.27) で与えられる。また、 $\phi(\theta)$  が式 (8.1.2) で与えられたときには、それぞれ式 (8.5.8) および式 (8.9.28) で与えられる。図 8.10.3 は、 $\beta(\alpha, \theta)$  のグラフを示す。それらのグラフから確認される  $\beta(\alpha, \theta) < 0$  と自己随伴関係  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_0 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0$  より、 $h_0(\cdot, \cdot)$  は強圧的ではないことになる。

一方、 $f_1(\theta)$  の 2 階  $\theta$  微分は、式 (8.9.26) となる。 $\phi''(\theta)$  のグラフは図 8.9.2 に示されていた。

このように、平均流れ抵抗最小化問題では、目的関数  $f_0$  の 2 階  $\theta$  微分は強圧的にはならず、制約関数  $f_1$  の 2 階  $\theta$  微分も強圧的にはならないことになる。そこで、平均流れ抵抗最小化問題に対して Newton 法 (問題 8.6.6) を適用する場合には、適切な双 1 次形式  $a_X(\vartheta_{gi}, \psi)$  を用いて、強圧性を補う必要がある。

図 8.19: 平均流れ抵抗の 2 階  $\theta$  微分における係数関数  $\beta(\alpha, \theta)$ 

### 8.10.5 Lagrange 乗数法による評価関数の 2 階 $\theta$ 微分

Lagrange 乗数法を用いて平均流れ抵抗  $f_0$  の 2 階  $\theta$  微分を求める合には, 次のようになる. 式 (8.10.17) の  $\tilde{f}'_0(\theta)[\vartheta_1] = \langle g_0, \vartheta_1 \rangle$  に対する Lagrange 関数を

$$\mathcal{L}_{10}(\theta, \vartheta_1, \mathbf{u}, p, \mathbf{w}_0, r_0) = \langle g_0, \vartheta_1 \rangle - \mathcal{L}_S(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{w}_0, r_0) \quad (8.10.32)$$

とおく. ここで,  $\mathcal{L}_S$  は式 (8.10.8) で与えられる.  $(\mathbf{w}_0, r_0) \in U \times P$  は,  $g_0$  が  $(\mathbf{u}, p)$  の関数であるために用意された随伴変数である.  $\vartheta_1$  は  $\mathcal{L}_{10}$  においては定ベクトルとみなす.

$(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{w}_0, r_0)$  の任意変動  $(\vartheta_2, \hat{\mathbf{u}}, \hat{p}, \hat{\mathbf{w}}_0, \hat{r}_0) \in X \times (U \times P)^2$  に対する  $\mathcal{L}_{10}$  の Fréchet 微分は

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}'_{10}(\theta, \vartheta_1, \mathbf{u}, p, \mathbf{w}_0, r_0)[\vartheta_2, \hat{\mathbf{u}}, \hat{p}, \hat{\mathbf{w}}_0, \hat{r}_0] \\ &= \mathcal{L}_{10\theta}(\theta, \vartheta_1, \mathbf{u}, p, \mathbf{w}_0, r_0)[\vartheta_2] + \mathcal{L}_{10up}(\theta, \vartheta_1, \mathbf{u}, p, \mathbf{w}_0, r_0)[\hat{\mathbf{u}}, \hat{p}] \\ & \quad + \mathcal{L}_{10w_0r_0}(\theta, \vartheta_1, \mathbf{u}, p, \mathbf{w}_0, r_0)[\hat{\mathbf{w}}_0, \hat{r}_0] \end{aligned} \quad (8.10.33)$$

となる. 式 (8.10.33) の右辺第 3 項は,  $(\mathbf{u}, p)$  が状態決定問題の解ならばゼロとなる. また, 式 (8.10.33) の右辺第 2 項は,

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{10up}(\theta, \vartheta_1, \mathbf{u}, p, \mathbf{w}_0, r_0)[\hat{\mathbf{u}}, \hat{p}] \\ &= \int_D \left\{ 2\psi' \phi' \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{u}} \vartheta_1 + \mu (\nabla \mathbf{w}_0^\top) \cdot (\nabla \hat{\mathbf{u}}^\top) + \psi(\phi(\theta)) \mathbf{w}_0 \cdot \hat{\mathbf{u}} \right. \\ & \quad \left. - \hat{p} \nabla \cdot \mathbf{w}_0 - r_0 \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} \right\} dx \end{aligned} \quad (8.10.34)$$

となる. そこで, 任意の  $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{p}) \in U \times P$  に対して式 (8.10.34) がゼロとなる条件は,  $(\mathbf{w}_0, r_0)$  を次の随伴問題の解とおくことと同値である.

**問題 8.10.4** ( $\langle g_0, \vartheta_1 \rangle$  に対する  $(\mathbf{w}_0, r_0)$  の随伴問題) 問題 8.10.2 の仮定のもとで,  $\vartheta_1 \in X$  が与えられたとき,

$$\begin{aligned} -\nabla^\top (\mu \nabla \mathbf{w}_0^\top) + \psi \mathbf{w}_0^\top + \nabla^\top r_0 &= -2\psi' \phi' \mathbf{v}_0^\top \vartheta_1 \quad \text{in } D, \\ \nabla \cdot \mathbf{w}_0 &= 0 \quad \text{in } D, \\ \mathbf{w}_0 &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{on } \partial D, \\ \int_D r_0 \, dx &= 0 \end{aligned}$$

を満たす  $(\mathbf{w}_0, r_0) = (\mathbf{w}_0(\vartheta_1), r_0(\vartheta_1)) \in U \times P$  を求めよ.  $\square$

さらに, 式 (8.10.33) の右辺第 1 項は,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{10\theta}(\theta, \vartheta_1, \mathbf{u}, p, \mathbf{w}_0, r_0)[\vartheta_2] \\ = \int_D \left\{ (\psi''(\phi')^2 + \psi' \phi'') \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \vartheta_1 + \psi' \phi' \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_0(\vartheta_1) \right\} \vartheta_2 \, dx \end{aligned}$$

となる.

そこで,  $(\mathbf{u}, p)$  と  $(\mathbf{w}_0(\vartheta_1), r_0(\vartheta_1))$  がそれぞれ問題 8.10.4 の弱解とする. このときの  $f_0(\theta, \mathbf{u}, p)$  を  $\tilde{f}_0(\theta)$  とかくことにすれば,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{10\theta}(\theta, \vartheta_1, \mathbf{u}, p, \mathbf{w}_0(\vartheta_1), r_0(\vartheta_1))[\vartheta_2] &= \tilde{f}_0''(\theta)[\vartheta_1, \vartheta_2] \\ &= \langle g_{\text{H0}}(\theta, \vartheta_1), \vartheta_2 \rangle \end{aligned} \quad (8.10.35)$$

のようにかける. ここで, 平均流れ抵抗の Hesse 勾配  $g_{\text{H0}}$  は

$$g_{\text{H0}}(\theta, \vartheta_1) = (\psi''(\phi')^2 + \psi' \phi'') \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \vartheta_1 + \psi' \phi' \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_0(\vartheta_1) \quad (8.10.36)$$

となる.

なお, 問題 8.10.4 においても式 (8.10.27) と同様の関係が成り立つと仮定すれば,

$$\mathbf{w}_0(\vartheta_1) = -\frac{\psi' \phi'}{\psi} \mathbf{v}_0 \vartheta_1 \quad (8.10.37)$$

が成り立つ. 式 (8.10.37) を式 (8.10.36) に代入すれば, 式 (8.10.35) は式 (8.10.30) と一致することが確かめられる.

### 8.10.6 数値例

孤立物体まわりの 2 次元 Stokes 流れ場に対する平均流れ抵抗最小化の結果が図 8.10.4 から図 8.10.7 に示されている. 状態決定問題の境界条件は, 図 8.10.4 (a) の

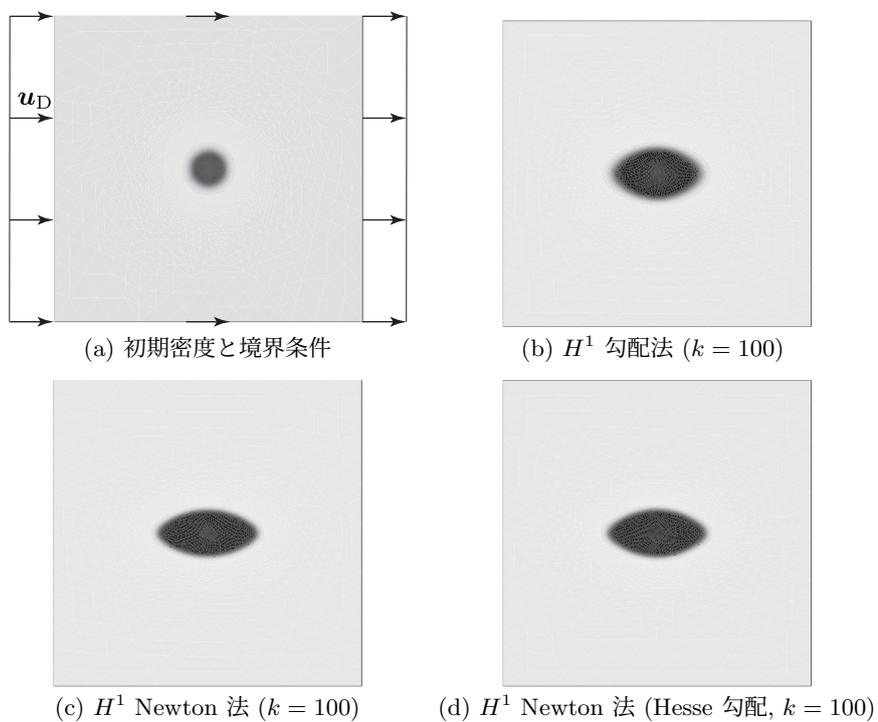


図 8.20: 平均流れ抵抗最小化に対する数値例: 密度 (白黒反転)

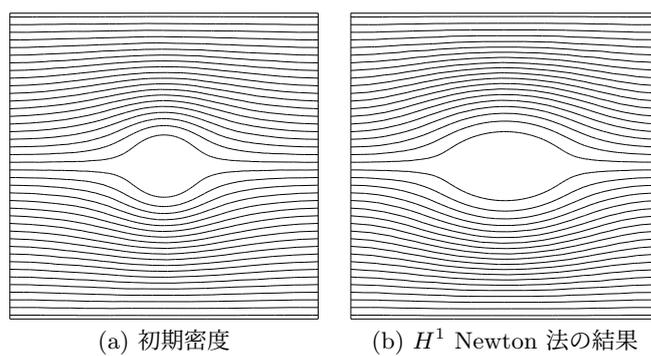


図 8.21: 平均流れ抵抗最小化に対する数値例: 流線

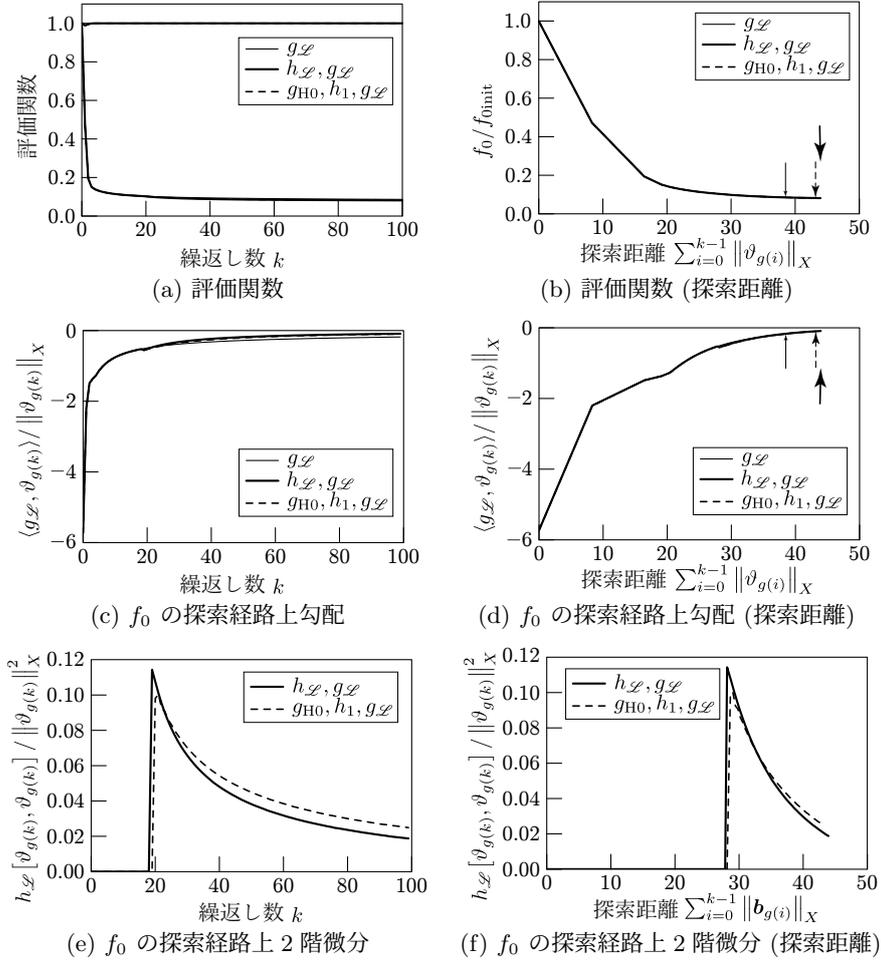


図 8.22: 平均流れ抵抗最小化に対する数値例: 評価関数, 評価関数の勾配および 2 階微分 ( $g_{\mathcal{L}}$ :  $H^1$  勾配法,  $h_{\mathcal{L}}, g_{\mathcal{L}}$ :  $H^1$  Newton 法,  $g_{H0}, h_1, g_{\mathcal{L}}$ : Hesse 勾配を用いた  $H^1$  Newton 法)

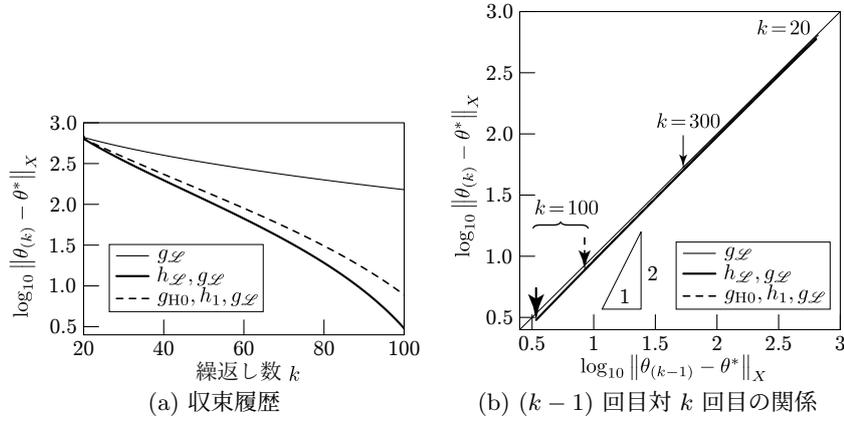


図 8.23: 平均流れ抵抗最小化に対する数値例: 近似最小点  $\theta^*$  からの距離  $\|\theta^{(k)} - \theta^*\|_X$  ( $g_{\mathcal{L}}$ :  $H^1$  勾配法,  $h_{\mathcal{L}}, g_{\mathcal{L}}$ :  $H^1$  Newton 法,  $g_{H0}, h_1, g_{\mathcal{L}}$ : Hesse 勾配を用いた  $H^1$  Newton 法)

ように, 外側境界上で水平方向の一様な流速が仮定された. 初期の  $\theta$  には, 許容集合  $\mathcal{D}$  に入るように, 2 次元 Gauss 分布が仮定された. この問題でも密度を制約する領域 (式 (8.1.3) の  $\bar{\Omega}_{C0}$ ) は設けなかった. プログラムは, 有限要素法プログラミング言語 FreeFEM (<https://freefem.org/>) [16] でかかっている. Stokes 問題の有限要素法解析では, 三角形要素が使われ, 流速に対して 2 次要素, 圧力に対して 1 次要素が用いられた.  $H^1$  勾配法あるいは  $H^1$  Newton 法の有限要素法解析では三角形 2 次要素が使われた. また,  $H^1$  Newton 法を用いた場合には,  $k_N = 20$  から  $H^1$  Newton 法が開始された. ここでも詳細は, プログラムをみていただきたい<sup>2</sup>.

図 8.10.4 (b) から (d) に 3 つの方法 ( $g_{\mathcal{L}} = g_0 + \lambda_1 g_1$  を用いた  $H^1$  勾配法,  $h_{\mathcal{L}} = h_0 + \lambda_1 h_1$  と  $g_{\mathcal{L}}$  を用いた  $H^1$  Newton 法,  $g_{H0}, h_1, g_{\mathcal{L}}$  を用いた  $H^1$  Newton 法) で得られた密度の結果を示す. 図 8.10.5 には初期密度と  $H^1$  Newton 法で得られた最適密度のときの流線がえがかれている. 流線は, 流速  $\mathbf{u}$  が  $(\partial\psi/\partial x_2, -\partial\psi/\partial x_1)^\top$  で与えられるような流れ関数  $\psi: D \rightarrow \mathbb{R}$  の等高線で定義される.

図 8.10.6 のグラフは, 規準化された評価関数, 探索経路に沿った目的関数  $f_0$  の勾配と 2 階微分の変化をそれぞれ繰返し数  $k$  と  $X$  上の探索距離  $\sum_{i=0}^{k-1} \|\vartheta_{g^{(i)}}\|_X$  に対して示している. 図中,  $f_{0\text{init}}$  は初期形状のときの  $f_0$  を表している.  $c_1$  には初期密度の領域積分 (体積) の値が使われた. 探索経路に沿った  $f_0$  の勾配は, Lagrange 関数  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \lambda_1 f_1$  の勾配  $\langle g_{\mathcal{L}}, \vartheta_{g^{(k)}} \rangle / \|\vartheta_{g^{(k)}}\|_X$  によって計算された. また,  $f_0$  の 2 階微分は,  $h_{\mathcal{L}} [\vartheta_{g^{(k)}}, \vartheta_{g^{(k)}}] / \|\vartheta_{g^{(k)}}\|_X^2$  によって計算された. ただし, Hesse 勾配を用いた Newton 法の場合は  $(\langle g_{H0}, \vartheta_{g^{(k)}} \rangle + \lambda_1 h_1 [\vartheta_{g^{(k)}}, \psi]) / \|\vartheta_{g^{(k)}}\|_X^2$  を用い

<sup>2</sup>講義資料 [FreeFEM\\_program\\_chap\\_8.zip](#)

て計算された. ただし,  $i$  回目の探索ベクトルのノルム  $\|\vartheta_{g(i)}\|_X$  は式 (8.9.35) に従う. PC を用いて  $k = 100$  まで計算したときの時間は,  $H^1$  勾配法,  $H^1$  Newton 法, Hesse 勾配を用いた  $H^1$  Newton 法に対して, それぞれ 10.839, 14.763, 17.046 sec であった.

図 8.10.6 (c) のグラフをみれば, ここでも  $H^1$  勾配法よりも  $H^1$  Newton 法は繰返し数  $k$  に対して評価関数の収束が早まったように見える. しかしながら,  $H^1$  Newton 法に切り替えた際に式 (8.6.7) の  $c_{D1}$  と  $c_{D0}$  を小さな値に置き換えており, その結果, 収束が早くなったと考えられる. 図 8.10.6 (d) より, この問題においても, 3つの方法によるグラフが重なることから, ほぼ同じ探索経路をたどっていることが予想される. また, 図 8.10.6 (d) と (f) より, この問題においても, 最小点は探索経路に沿って 1 階微分だけでなく 2 階微分もゼロとなるような局所最小点になっていることがわかる. その原因は 8.9.6 項の最後で示したことと同様であると考えられる. さらに, Stokes 流れ場の場合には, 8.10.4 項で調べたように,  $h_0(\cdot, \cdot)$  自体は強圧的ではないが, 流れ場の大きさ制約を満たすような探索経路においては,  $f_0$  の 2 階微分は正值となり, 収束点は局所最小点となっていることが確認される.

さらに, 図 8.10.7 (a) には,  $H^1$  Newton 法の繰返し数を指定された値よりもおおきくとったときの  $\theta$  の数値解を近似最小点  $\theta^*$  とみなして, 3つの方法で得られた  $\theta^*$  からの距離  $\|\theta_{(k)} - \theta^*\|_X$  を繰返し数  $k$  に対して示している. この図から,  $H^1$  Newton 法や Hesse 勾配を用いた  $H^1$  Newton 法の結果は, 収束次数が 1 次以上であることが確認される. しかしながら, 繰返し数  $(k-1)$  回目に対して  $k$  回目の距離  $\|\theta_{(k)} - \theta^*\|_X$  をプロットした図 8.10.7 (b) より,  $H^1$  Newton 法の収束次数は, 1 次よりは大きい, 2 次にはなっていないことが確認される. その理由は, 8.9.6 項の最後にかかれたことと同様であると考えられる.

## 8.11 第 8 章のまとめ

第 8 章では, 偏微分方程式の境界値問題が定義された領域に対する最適な穴配置を求める問題を  $\theta$  型位相最適化問題として構成し, その解法について詳しくみてきた. 要点は以下のようである.

- (1) 領域の特性関数を設計変数にえらんだ場合には正則性が不足し, 最適化問題を構成できないことが知られている (第 8 章 冒頭).
- (2) 密度を設計変数に選べば, 位相最適化問題が構成される (第 8 章 冒頭). しかし, 密度の値域が  $[0, 1]$  に制限された関数の集合は線形空間にならない. そこで, 値域が制限されない関数  $\theta \in X = H^1(D; \mathbb{R})$  を設計変数に選び, 密度を

$\theta$  のシグモイド関数で与えることによって、第7章で示された抽象的最適設計問題の枠組みで  $\theta$  型位相最適化問題が構成される (8.1 節).

- (3) Poisson 問題を状態決定問題にえらんだとき (8.2 節),  $\theta$  型位相最適化問題は問題 8.3.2 のように構成される (8.3 節).
- (4) 評価関数の  $\theta$  微分は Lagrange 乗数法で求められる (8.5.1 項). しかし, その  $\theta$  微分は  $X$  にはいるとは限らない (注意 8.5.3). また, 評価関数の 2 階  $\theta$  微分は, Lagrange 関数の 2 階  $\theta$  微分に, 状態決定問題の解の  $\theta$  微分を代入することによって求められる (8.5.2 項).
- (5) 評価関数の  $\theta$  微分を用いた  $X = H^1(D; \mathbb{R})$  上の勾配法 ( $H^1$  勾配法) により, 評価関数の降下方向が求められる (8.6.1 項).  $H^1$  勾配法の解は, 特異点を除いて許容集合にはいる (定理 8.6.5). さらに, 評価関数の 2 階  $\theta$  微分が計算可能であれば,  $H^1$  Newton 法により, 評価関数の降下方向が求められる (8.6.2 項).
- (6)  $\theta$  型位相最適化問題の解法は, 第3章で示された制約つき問題に対する勾配法と制約つき問題に対する Newton 法と同じ枠組みで構成される (8.7.1 項と 8.7.2 項).
- (7) 状態決定問題, 随伴問題および  $H^1$  勾配法の数値解を有限要素法で求めるとき, 1 次の有限要素を用いて探索ベクトル  $\vartheta_g$  を求めたとき, 有限要素解の誤差は有限要素の最大直径に対して 1 次のオーダーで減少する (定理 8.8.5).
- (8) 線形弾性問題を状態決定問題とした領域の大きさ制約つき平均コンプライアンス最小化問題に対して, 評価関数の  $\theta$  微分と 2 階  $\theta$  微分が得られる (8.9.3 項).
- (9) Stokes 問題を状態決定問題とする領域の大きさ制約つき平均流れ抵抗最小化問題に対して, 評価関数の  $\theta$  微分と 2 階  $\theta$  微分が得られる (8.10.3 項).

## 8.12 第8章の演習問題

**8.1**  $\theta$  型 Poisson 問題 (問題 8.2.3) を状態決定問題にしたとき, 自己随伴関係が成り立つような評価関数は何かを答えよ. また, その  $\theta$  微分を示せ.

**8.2** 第5章で定義された拡張 Poisson 問題 (問題 5.1.3) が  $\theta$  型に変更されたときの状態決定問題をかき, 自己随伴関係が成り立つような評価関数を目的関数

にして、領域の大きさに対する関数を制約関数に用いたときの  $\theta$  型位相最適化問題を示せ. また, その問題に対する KKT 条件を示せ.

- 8.3 評価関数がたくさん定義されていて, その中の最大値を最小化したい場合には,  $\beta$  法とよばれる最適設計問題の構成法が使われる [39].  $\theta$  型位相最適化問題を  $\beta$  法でかきかえれば, 次のようになる.

**問題 8.12.1** ( $\beta$  法による  $\theta$  型位相最適化問題)  $\mathcal{D}$  と  $\mathcal{S}$  をそれぞれ式 (8.1.4) と式 (8.2.2) とおく.  $f_1, \dots, f_m : X \times U \rightarrow \mathbb{R}$  は式 (8.3.1) で与えられているとする. また,  $\beta \in \mathbb{R}$  とする. このとき,

$$\min_{(\theta, \mathbf{u}-\mathbf{u}_D) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}} \{\beta \mid f_1(\theta, \mathbf{u}) \leq \beta, \dots, f_m(\theta, \mathbf{u}) \leq \beta, \text{ Problem 8.2.3}\}.$$

を満たす  $\theta$  を求めよ. □

この問題に対する KKT 条件を示せ. また, この問題を制約つき問題に対する  $H^1$  勾配法 (8.7.1 項) で解く場合の Lagrange 乗数の決定法を示せ.

(補足)  $\beta$  法が好んで使われる理由は次のような点にある. 評価関数がたくさんあっても, 不等式制約が有効ではない評価関数に対する Lagrange 乗数はゼロとなる. そこで, それらの評価関数の制約はないとみなされ, それらの  $\theta$  微分を求める必要がなくなることになる.

- 8.4 演習問題 1.2 では, 平均コンプライアンス  $f_0$  の断面積勾配  $\mathbf{g}_0$  を, ポテンシャルエネルギーの  $\mathbf{u}$  に対する最小条件と  $\mathbf{a}$  に対する最大化問題の勾配を用いて求めた.  $d \in \{2, 3\}$  次元線形弾性体の平均コンプライアンス最小化問題 (問題 8.9.3) に対しては,

$$\begin{aligned} \pi(\theta, \mathbf{u}) = & \int_D \left( \frac{1}{2} \phi^\alpha(\theta) \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}) - \mathbf{b}(\theta) \cdot \mathbf{u} \right) dx \\ & - \int_{\Gamma_N} \mathbf{p}_N \cdot \mathbf{u} \, d\gamma - \int_{\Gamma_D} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) \cdot (\phi^\alpha(\theta) \mathbf{S}(\mathbf{v}_0) \boldsymbol{\nu}) \, d\gamma \end{aligned}$$

を用いて,

$$\max_{\theta \in \mathcal{D}} \min_{\mathbf{u} \in U} \pi(\theta, \mathbf{u})$$

を満たす  $(\theta, \mathbf{u})$  を求める問題を考える. このとき,  $\min_{\mathbf{u} \in U} \pi$  を満たす  $\mathbf{u}$  を用いたときの  $-\pi$  の  $\theta$  勾配が式 (8.9.14) における  $g_0$  の  $1/2$  と一致することを示せ.

8.5 演習問題 1.8 では, 平均流れ抵抗  $f_0$  の断面積勾配  $g_0$  を, 形式的な散逸系のポテンシャルエネルギーの  $p$  に対する最大条件と  $a$  に対する最小化問題の勾配を用いて求めた.  $d \in \{2, 3\}$  次元 Stokes 流れ場の平均流れ抵抗最小化問題 (問題 8.10.3) に対しては,

$$\pi(\theta, \mathbf{u}, p) = \int_D \left\{ \frac{1}{2} \mu (\nabla \mathbf{u}^\top) \cdot (\nabla \mathbf{u}^\top) + \frac{1}{2} \psi(\phi(\theta)) \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - p \nabla \cdot \mathbf{u} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \right\} dx - \int_{\partial D} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) \cdot (\mu \partial_\nu \mathbf{u} - p \boldsymbol{\nu}) d\gamma$$

を用いて,

$$\min_{\theta \in \mathcal{D}} \min_{\mathbf{u} \in U} \max_{p \in P} \pi(\theta, \mathbf{u}, p)$$

を満たす  $(\theta, \mathbf{u}, p)$  を求める問題を考える. このとき,  $\min_{\mathbf{u} \in U} \max_{p \in P} \pi$  を満たす  $(\mathbf{u}, p)$  を用いたときの  $\pi$  の  $\theta$  勾配が式 (8.10.17) における  $g_0$  の  $1/2$  と一致することを示せ.



## 参考文献

- [1] Aage, N., Poulsen, T. H., Gersborg-Hansen, A., and Sigmund, O. Topology optimization of large scale Stokes flow problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 35, pp. 175–180, 2008.
- [2] Allaire, G. *Shape Optimization by the Homogenization Method*. Springer, New York, 2002.
- [3] Avellaneda, M. Optimal bounds and microgeometries for elastic two-phase composites. *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 47, pp. 1216–1228, 1987.
- [4] Azegami, H., Kaizu, S., and Takeuchi, K. Regular solution to topology optimization problems of continua. *JSIAM Letters*, Vol. 3, pp. 1–4, 2011.
- [5] Bendsøe, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural Optimization*, Vol. 1, pp. 193–202, 1989.
- [6] Bendsøe, M. P. and Kikuchi, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71, pp. 197–224, 1988.
- [7] Bendsøe, M. P. and Sigmund, O. *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. Springer, Berlin; Tokyo, 2003.
- [8] Borrvall, T. and Petersson, J. Topology optimization of fluids in Stokes flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 41, pp. 77–107, 2003.
- [9] Diaz, A. R. and Kikuchi, N. Solutions to shape and topology eigenvalue optimization problems using a homogenization method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 35, pp. 1487–1502, 1992.
- [10] Diaz, A. R. and Sigmund, O. Checkerboard patterns in layout optimization. *Structural Optimization*, Vol. 10, pp. 40–45, 1995.

- [11] Evgrafov, A. Topology optimization of slightly compressible fluids. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 86, pp. 46–62, 2006.
- [12] Gersborg-Hansen, A., Sigmund, O., and Haber, R. B. Topology optimization of channel flow problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 3, pp. 181–192, 2005.
- [13] Guest, J. K. and Prévost, J. H. Topology optimization of creeping fluid flows using a Darcy-Stokes finite element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 66, pp. 461–484, 2006.
- [14] Guest, J. K. and Prévost, J. H. Design of maximum permeability material structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196, pp. 1006–1017, 2007.
- [15] Haslinger, J. and Mäkinen, R. A. E. *Introduction to Shape Optimization: Theory, Approximation, and Computation*. SIAM, Philadelphia, 2003.
- [16] Hecht, F. New development in freefem++. *Journal of Numerical Mathematics*, Vol. 20, No. 3-4, pp. 251–265, 2012.
- [17] Kawamoto, A., Matsumori, T., Yamasaki, S., Nomura, T., Kondoh, T., and Nishiwaki, S. Heaviside projection based topology optimization by a PDE-filtered scalar function. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 44, pp. 19–24, 2011.
- [18] Kohn, R. V. and Lipton, R. Optimal bounds for the effective energy of a mixture of isotropic, incompressible, elastic materials. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 102, No. 4, pp. 331–350, 1988.
- [19] Kohn, R. V. and Strang, G. Optimal design and relaxation of variational problems, part 1. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. 39, pp. 1–25, 1986.
- [20] Kohn, R. V. and Strang, G. Optimal design and relaxation of variational problems, part 2. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. 39, pp. 139–182, 1986.
- [21] Kohn, R. V. and Strang, G. Optimal design and relaxation of variational problems, part 3. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. 39, pp. 353–377, 1986.

- [22] Kohn, R. V. and Strang, G. Optimal design in elasticity and plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 22, pp. 183–188, 1986.
- [23] Lazarov, B. S. and Sigmund, O. Filters in topology optimization based on Helmholtz-type differential equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 86, No. 6, pp. 765–781, 2011.
- [24] Lurie, K. A., Cherkaev, A. V., and Fedorov, A. V. Regularization of optimal design problems for bars and plates, part 1. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 37, pp. 499–522, 1982.
- [25] Lurie, K. A., Cherkaev, A. V., and Fedorov, A. V. Regularization of optimal design problems for bars and plates, part 2. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 37, pp. 523–543, 1982.
- [26] Ma, Z. D., Kikuchi, N., and Hagiwara, I. Structural topology and shape optimization for a frequency response problem. *Computational Mechanics*, Vol. 13, pp. 157–174, 1993.
- [27] Matsui, K. and Terada, K. Continuous approximation of material distribution for topology optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 59, pp. 1925–1944, 2004.
- [28] Mlejnek, H. P. and Schirmacher, R. An engineer’s approach to optimal material distribution and shape finding. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 106, pp. 1–26, 1993.
- [29] Murai, D. and Azegami, H. Error analysis of H1 gradient method for topology optimization problems of continua. *JSIAM Letters*, Vol. 3, pp. 73–76, 2011.
- [30] 村井大介. 偏微分方程式の初期値境界値問題と形状最適化問題に対する数値解法の誤差解析. 博士論文, 名古屋大学, 2012.
- [31] Murat, F. Contre-exemples pour divers problèmes où le contrôle intervient dans les coefficients. *Annali di Matematica Pura ed Applicata, Serie 4*, Vol. 112, pp. 49–68, 1977.
- [32] 西脇眞二, 泉井一浩, 菊池昇. トポロジー最適化. 丸善出版, 東京, 2013.
- [33] Olesen, L. H., Okkels, F., and Bruus, H. A high-level programming-language implementation of topology optimization applied to steady-state

- Navier-Stokes flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 65, pp. 975–1001, 2006.
- [34] Rahmatalla, S. F. and Swan, C. C. A Q4/Q4 continuum structural topology optimization implementation. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 27, pp. 130–135, 2004.
- [35] Rozvany, G., Zhou, M., and Birker, T. Generalized shape optimization without homogenization. *Structural Optimization*, Vol. 4, pp. 250–254, 1992.
- [36] Sigmund, O. and Maute, K. Topology optimization approaches: A comparative review. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 48, pp. 1031–1055, 2013.
- [37] Sigmund, O. and Petersson, J. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural Optimization*, Vol. 16, pp. 68–75, 1998.
- [38] Suzuki, K. and Kikuchi, N. A homogenization method for shape and topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 93, pp. 291–318, 1991.
- [39] Taylor, J. E. and Bendsøe, M. P. An interpretation for min-max structural design problems including a method for relaxing constraints. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 20, pp. 301–314, 1984.
- [40] Wang, F., Lazarov, B. S., and Sigmund, O. On projection methods, convergence and robust formulations in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 43, pp. 767–784, 2011.
- [41] Yang, R. J. and Chuang, C. H. Optimal topology design using linear programming. *Computers & Structures*, Vol. 52, pp. 265–275, 1994.