目 次

第 4 章　変分原理と関数解析の基礎

第 3 章までは，有限次元ベクトル空間上の最適化問題に関する理論と解法についてみてきた．本章からは，設計変数を場所や時間の関数に選んだ場合の最適化問題について考えてみたい．

本章では，最初に力学の変分原理をとりあげて，それらが関数最適化問題の構造をもち，運動方程式などは最適性の条件になっていることを確認する．その後で，関数最適化問題を考えるうえで必要となる道具を用意していきたい．第 3 章までの最適化問題では，設計変数が入る線形空間は有限次元のベクトル空間であった．それに対して本章では，設計変数が入る線形空間として関数空間を用意する．しかし，関数空間の説明に至るまでには，線形空間の定義からはじめて，極限操作がとれる連続な (完備な) 距離空間や内積が使える線形空間などいくつかの抽象的な空間に対する説明が必要となる．いろいろな関数空間はそれらの抽象空間との関係をみながら説明されることになる．

関数空間が定義されたならば，次に，関数空間から関数空間への写像について考えてみたい．ここでは，その写像を作用素とよんで定義し，その有界性と線形性の説明からはじめることにする．作用素の例としては，トレース作用素がとりあげられる．トレース作用素は第 5 章以降で偏微分方程式の境界値問題の解の存在を示すときや，数値解析の誤差評価において使われる．その後，作用素の中でも値域が実数に限定された作用素を汎関数とよんで定義する．その汎関数の中でも有界かつ線形な汎関数の集合は，定義域となっている関数空間の双対空間とよばれる．双対空間は，そのあとで示される作用素の一般化微分の中で，Fréchet 微分における勾配が入る関数空間となる．

以上のように，関数最適化問題で必要となる道具をそろえたあとで，もう一度変分原理にもどって，変分原理で使われていた関数空間をあきらかにしたい．それにより，変分原理はある関数空間上の最適化問題になっていて，最適性の条件は Fréchet 微分が零となる条件 (制約つきの問題では KKT 条件) で与えられていることが確認される．変分原理の関数最適化問題としての理解は，第 5 章ですぐに役立つことになる．

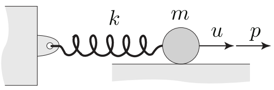


図 4.1: 1 自由度ばね質点系

4.1　変分原理

力学でよく知られた Hamilton の原理やポテンシャルエネルギー最小原理は，運動方程式や力のつり合い方程式があるエネルギーの停留点として得られることを示している．さらに，制御系の最適な制御則は，最適制御問題に対する Pontryagin の最小原理によって得られることが知られている．ここでは，それらが関数最適化問題の構造をもっていることをみていくことにする．

4.1.1　Hamilton の原理

図 4.1.1 のようなばね質点系を考えよう．k と m をばね定数と質量を表す正の定数とする．t_{T} を終端時刻を表す正の定数として，時間 $(0, t_{\mathrm{T}})$ に対して $p : (0, t_{\mathrm{T}}) \to \mathbb{R}$ と $u : (0, t_{\mathrm{T}}) \to \mathbb{R}$ をそれぞれ外力と変位を表す時間の関数とする．ここでは，p が与えられたとき，u を決定するための運動方程式を Hamilton の原理から求めてみよう．

時刻 $t \in (0, t_{\mathrm{T}})$ に対して $\dot{u} = \partial u / \partial t$ を速度，u と $\dot{u}$ の関数 $\kappa(u, \dot{u})$ と $\pi(u, \dot{u})$ をそれぞれ運動エネルギーとポテンシャルエネルギーとする．このとき，

$$l(u) = \kappa(u, \dot{u}) - \pi(u, \dot{u}) = \frac{1}{2} m \dot{u}^2 - \frac{1}{2} k u^2 + p u \tag{4.1.1}$$

を図 4.1.1 のばね質点系に対する力学における Lagrange 関数という．第 3 章までにおいて使われた Lagrange 関数とは区別するために,「力学における」をつけた．さらに，

$$a(u) = \int_0^{t_{\mathrm{T}}} l(u) \, \mathrm{d}t \tag{4.1.2}$$

を作用積分という．Hamilton の原理は，時刻 $t = 0$ と $t = t_{\mathrm{T}}$ のときの変位 $u(0)$ と $u(t_{\mathrm{T}})$ が与えられているとき，u は式 (4.1.2) の $a(u)$ が停留するようにきめられることを主張する．停留の定義も含めて，次の問題に対する解答の中で Hamilton の原理の意味について考えてみよう．ただし，次の問題では，今後のために，Hamilton の原理の終端条件が変更されている．

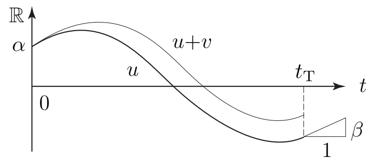


図 4.2: 拡張 Hamilton の原理で使われる変位 u と任意変動 v

問題 4.1.1 (拡張 Hamilton の原理) α と β を与えられた定数として，U を $u(0) = \alpha$ を満たす $u : (0, t_{\mathrm{T}}) \to \mathbb{R}$ の集合，$l(u)$ を式 (4.1.1) とする．また，拡張作用積分を

$$f(u) = \int_0^{t_{\mathrm{T}}} l(u)\, \mathrm{d}t - m\beta u(t_{\mathrm{T}})$$

とおく．u が集合 U の中で任意に変動するとき，f が停留する条件を求めよ． □

問題 4.1.1 において，u は $u(0) = \alpha$ の条件を満たす関数の集合 U の要素である．そこで，u からの任意の変動を表す関数を $v : (0, t_{\mathrm{T}}) \to \mathbb{R}$ とかくことにすれば，v は $v(0) = 0$ の条件を満たす必要がある．図 4.1.2 に u と v の例を示す．このような v の集合をここでは V とかくことにする．このとき，任意の $v \in V$ に対して

$$\begin{aligned} f(u+v) &= \int_0^{t_{\mathrm{T}}} \left\{ \frac{1}{2} m (\dot{u} + \dot{v})^2 - \frac{1}{2} k (u+v)^2 + p(u+v) \right\} \mathrm{d}t \\ &\quad - m\beta \left(u(t_{\mathrm{T}}) + v(t_{\mathrm{T}}) \right) \\ &= f(u) + \left\{ \int_0^{t_{\mathrm{T}}} (m\dot{u}\dot{v} - kuv + pv)\, \mathrm{d}t - m\beta v(t_{\mathrm{T}}) \right\} \\ &\quad + \int_0^{t_{\mathrm{T}}} \left(\frac{1}{2} m\dot{v}^2 - \frac{1}{2} kv^2 \right) \mathrm{d}t \\ &= f(u) - \left\{ \int_0^{t_{\mathrm{T}}} (m\ddot{u} + ku - p)\, v\, \mathrm{d}t - m\left(\dot{u}(t_{\mathrm{T}}) - \beta \right) v(t_{\mathrm{T}}) \right\} \\ &\quad + \int_0^{t_{\mathrm{T}}} \left(\frac{1}{2} m\dot{v}^2 - \frac{1}{2} kv^2 \right) \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

が成り立つ．ただし，最後の等号において $m\dot{u}\dot{v}$ の積分に対する部分積分と $v(0) = 0$ が使われた．この式の右辺を v の次数ごとにまとめて

$$f(u+v) = f(u) + f'(u)[v] + \frac{1}{2} f''(u)[v, v] \tag{4.1.4}$$

とかくことにしよう．式 (4.1.4) の $f'(u)[v]$ と $f''(u)[v, v]$ は，変分法において u における f の第 1 変分と第 2 変分とよばれる．f が停留する条件は，任意の $v \in V$

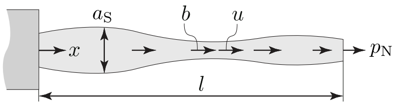


図 4.3: 1 次元線形弾性体

に対して，第 1 変分が 0 になる条件として定義される．この問題においては，

$$f'(u)[v] = -\int_0^{t_{\mathrm{T}}} (m\ddot{u} + ku - p)\, v\, \mathrm{d}t + m(\dot{u}(t_{\mathrm{T}}) - \beta)\, v(t_{\mathrm{T}}) = 0 \tag{4.1.5}$$

となる．この条件が任意の $v \in V$ に対して成り立つことは，

$$m\ddot{u} + ku = p \quad \text{in } (0, t_{\mathrm{T}}), \tag{4.1.6}$$

$$\dot{u}(t_{\mathrm{T}}) = \beta \tag{4.1.7}$$

が成り立つことと同値である．

式 (4.1.6) と式 (4.1.7) はそれぞれ運動方程式と速度の終端条件とよばれる．例題 4.5.5 では，$f'(u)[v]$ と $f''(u)[v, v]$ がそれぞれ Fréchet 微分と 2 階 Fréchet 微分の定義 (定義 4.5.4) を満たしていることが確認される．また，4.6.1 項では，U がどのような関数空間であるのか，p に対してはどのような関数空間を用意すればよいのかなどについて詳しくみていくことにする．

4.1.2　ポテンシャルエネルギー最小原理

次に，図 4.1.3 のような 1 次元線形弾性体を考えてみよう．l を長さを表す正の定数，$a_{\mathrm{S}} : (0, l) \to \mathbb{R}$ と $e_{\mathrm{Y}} : (0, l) \to \mathbb{R}$ をそれぞれ断面積と縦弾性係数 (Young 率) を表す正値をとる関数とする．また，$b : (0, l) \to \mathbb{R}$, $p_{\mathrm{N}} \in \mathbb{R}$ および $u : (0, l) \to \mathbb{R}$ をそれぞれ体積力 (単位体積当りの力)，$x = l$ における境界力 (単位面積当りの力) および変位とする．このとき，u 以外が与えられたとき，ポテンシャルエネルギー最小原理により，u を決定する力のつり合い方程式が得られることをみてみよう．

例題 1.1.1 でみてきたように，$u = 0$ のときを基準にした系全体のポテンシャルエネルギーは，$\pi_{\mathrm{I}}(u)$ と $\pi_{\mathrm{E}}(u)$ をそれぞれ内部ポテンシャルエネルギー (弾性ポテンシャルエネルギー) と外部ポテンシャルエネルギー (外力ポテンシャルエネルギー) としたとき，

$$\begin{aligned} \pi(u) &= \pi_{\mathrm{I}}(u) + \pi_{\mathrm{E}}(u) \\ &= \int_0^l \frac{1}{2} \sigma(u)\, \varepsilon(u)\, a_{\mathrm{S}}\, \mathrm{d}x - \int_0^l b u a_{\mathrm{S}}\, \mathrm{d}x - p_{\mathrm{N}} u(l)\, a_{\mathrm{S}}(l) \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

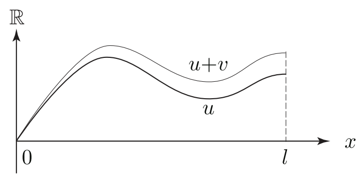


図 4.4: ポテンシャルエネルギー最小原理で使われる変位 u と任意変動 v

によって定義される．ただし，ひずみと応力をそれぞれ

$$\varepsilon(u) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \nabla u,$$
$$\sigma(u) = e_{\mathrm{Y}}\varepsilon(u)$$

とおいた．

図 4.1.3 の 1 次元線形弾性体に対して，ポテンシャルエネルギー最小原理によって得られる u の条件を求めてみよう．

問題 4.1.2 (ポテンシャルエネルギー最小原理) U を $u(0) = 0$ を満たす関数 $u : (0,l) \to \mathbb{R}$ の集合，$\pi(u)$ を式 (4.1.8) とする．このとき，

$$\min_{u \in U} \pi(u)$$

を満たす u の条件を求めよ． □

問題 4.1.2 において，u は $u(0) = 0$ を満たす関数の集合 U の要素である．u からの任意変動を表す関数を $v : (0,l) \to \mathbb{R}$ とかくことにする．このとき，v は $v(0) = 0$ を満たす必要がある．図 4.1.4 に u と v の例を示す．そこで，v の集合は U と同じことになる．このとき，任意の $v \in U$ に対して

$$\begin{aligned}
\pi(u+v) &= \int_0^l \frac{1}{2} e_{\mathrm{Y}} (\nabla u + \nabla v)^2 a_{\mathrm{S}}\,\mathrm{d}x - \int_0^l b(u+v)\,a_{\mathrm{S}}\,\mathrm{d}x \\
&\quad - p_{\mathrm{N}}(u(l) + v(l))\,a_{\mathrm{S}}(l) \\
&= \pi(u) + \left\{ \int_0^l (e_{\mathrm{Y}} \nabla u \nabla v - bv)\,a_{\mathrm{S}}\,\mathrm{d}x - p_{\mathrm{N}} v(l)\,a_{\mathrm{S}}(l) \right\} \\
&\quad + \int_0^l \frac{1}{2} e_{\mathrm{Y}} (\nabla v)^2 a_{\mathrm{S}}\,\mathrm{d}x \\
&= \pi(u) \\
&\quad + \left[\int_0^l \{-\nabla(e_{\mathrm{Y}} \nabla u) - b\}\,v\,a_{\mathrm{S}}\,\mathrm{d}x + (e_{\mathrm{Y}} \nabla u(l) - p_{\mathrm{N}})\,v(l)\,a_{\mathrm{S}}(l) \right]
\end{aligned}$$

$$+\int_0^l \frac{1}{2} e_{\mathrm{Y}} \left(\nabla v\right)^2 a_{\mathrm{S}} \, \mathrm{d}x \tag{4.1.9}$$

が成り立つ．ただし，最後の等号において $e_{\mathrm{Y}} \nabla u \nabla v$ の積分に対する部分積分と $v(0)=0$ が使われた．この式の右辺を v の次数ごとにまとめて

$$\pi\left(u+v\right) = \pi\left(u\right) + \pi'\left(u\right)\left[v\right] + \frac{1}{2}\pi''\left(u\right)\left[v,v\right] \tag{4.1.10}$$

とかくことにする．このとき，$\pi\left(u\right)$ の停留条件は，任意の $v \in U$ に対して，π の第 1 変分

$$\pi'\left(u\right)\left[v\right] = \int_0^l \left\{-\nabla\left(e_{\mathrm{Y}} \nabla u\right) - b\right\} v \, a_{\mathrm{S}} \, \mathrm{d}x + \left(e_{\mathrm{Y}} \nabla u\left(l\right) - p_{\mathrm{N}}\right) v\left(l\right) a_{\mathrm{S}}\left(l\right)$$

がゼロとなることである．この条件は，

$$-\nabla\left(e_{\mathrm{Y}} \nabla u\right) = -\nabla \sigma\left(u\right) = b \quad \text{in } \left(0,l\right), \tag{4.1.11}$$

$$\sigma\left(u\left(l\right)\right) = e_{\mathrm{Y}} \nabla u\left(l\right) = p_{\mathrm{N}} \tag{4.1.12}$$

と同値である．さらに，任意の $v \in U$ に対する π の第 2 変分に対して

$$\pi''\left(u\right)\left[v,v\right] = \int_0^l \frac{1}{2} e_{\mathrm{Y}} \left(\nabla v\right)^2 a_{\mathrm{S}} \, \mathrm{d}x \geq \alpha \int_0^l \left(\nabla v\right)^2 \, \mathrm{d}x \tag{4.1.13}$$

が成り立つ．ここで，$\alpha = \min_{x\in(0,l)} e_{\mathrm{Y}}\left(x\right) \min_{x\in(0,l)} a_{\mathrm{S}}\left(x\right)/2 > 0$ である．これにより，式 (4.1.11) と式 (4.1.12) の停留条件は最小条件を表すことになる．

式 (4.1.13) は，例題 2.4.8 において，ポテンシャルエネルギーの Hesse 行列が正定値であったことに対応する．関数最適化問題では，式 (4.1.13) が満たされることを $\pi''\left(u\right)\left[v,v\right]$ は強圧的 (定義 5.2.1) であると表現する．

4.1.3　Pontryagin の最小原理

最後に，制約が課された例として最適制御問題をとりあげてみよう．本項の内容は，時間発展問題や非線形問題を状態決定問題においた場合の最適設計問題を考える際には示唆を与えるが，先を急ぐ読者は飛ばしてほしい．

まず，システムの状態方程式について考えてみよう．$n \in \mathbb{N}$ 自由度系の運動方程式は，一般に

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\xi} \tag{4.1.14}$$

のようにかかれる．ただし，$\boldsymbol{M}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{K} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ はそれぞれ質量，減衰，剛性を表す行列とみなされる．また，$\boldsymbol{\xi} : (0, t_{\mathrm{T}}) \to \mathbb{R}^n$ と $\boldsymbol{u} : (0, t_{\mathrm{T}}) \to \mathbb{R}^n$ はそれぞれ制御力と変位とみなされる．ここで，$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{u}}$ とおく．このとき，式 (4.1.14) は

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^{n\times n}} \\ \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^{n\times n}} & \boldsymbol{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{u}} \\ \dot{\boldsymbol{v}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^{n\times n}} & -\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{K} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^n} \\ \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix} \tag{4.1.15}$$

のようにかきかえられる．このように，2 階の定数係数常微分方程式である式 (4.1.14) は，変数を 2 倍にした 1 階の定数係数常微分方程式 (式 (4.1.15)) にかきかえられる．高階であっても同様のかきかえが可能である．

そこで，あらためて記号を定義しなおして，制御力は $d \in \mathbb{N}$ 次元であるとして，最適制御問題の状態決定問題を次のように定義することにしよう．

問題 4.1.3 (線形制御システム) $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times d}$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ および制御力 $\boldsymbol{\xi} : (0, t_{\mathrm{T}}) \to \mathbb{R}^d$ が与えられたとき，

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi} \quad \text{in } (0, t_{\mathrm{T}}), \tag{4.1.16}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{\alpha} \tag{4.1.17}$$

を満たすシステムの状態 $\boldsymbol{u} : (0, t_{\mathrm{T}}) \to \mathbb{R}^n$ を求めよ． □

第 1 章において，状態決定問題としての段つき 1 次元線形弾性問題 (問題 1.1.3) に対して Lagrange 関数 $\mathscr{L}_{\mathrm{S}}$ を式 (1.1.12) のように定義したように，問題 4.1.3 に対する Lagrange 関数を

$$\mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}) = \int_0^{t_{\mathrm{T}}} -(\dot{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{z} \, \mathrm{d}t \tag{4.1.18}$$

のように定義する．ただし，$\boldsymbol{z} : (0, t_{\mathrm{T}}) \to \mathbb{R}^n$ は問題 4.1.3 に対する Lagrange 乗数と仮定する．

制御力 $\boldsymbol{\xi}$ と問題 4.1.3 の解 $\boldsymbol{u}$ を用いて，最適制御の評価関数を

$$f_0(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}) = \frac{1}{2} \int_0^{t_{\mathrm{T}}} \left(\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbb{R}^d}^2 \right) \mathrm{d}t + \frac{1}{2} \|\boldsymbol{u}(t_{\mathrm{T}})\|_{\mathbb{R}^n}^2 \tag{4.1.19}$$

とおく．また，制御力の制約を

$$\frac{1}{2} \|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbb{R}^d}^2 - 1 \le 0 \quad \text{in } (0, t_{\mathrm{T}}) \tag{4.1.20}$$

とおく．このとき，最適制御問題は次のように構成される．

問題 4.1.4 (線形システムの最適制御問題) Ξ を $\boldsymbol{\xi}:(0,t_{\mathrm{T}})\to\mathbb{R}^d$ の集合，U を $\boldsymbol{u}:(0,t_{\mathrm{T}})\to\mathbb{R}^n$ の集合とする．f_0 を式 (4.1.19) とする．このとき，

$$\min_{(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{u})\in\Xi\times U}\{f_0(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{u})\mid \text{式 (4.1.20), 問題 4.1.3}\}$$

を満たす $\boldsymbol{\xi}$ に対する KKT 条件を求めよ．□

問題 4.1.4 は等式と不等式制約つき最適化問題となっており，問題 2.8.1 と同じ構造をしている．問題 2.8.1 では，Ξ と U は有限次元のベクトル空間として定義された．ここでは，Ξ と U は無限次元のベクトル空間に拡張されたものとみなして，形式的に KKT 条件を求めてみることにしよう．

問題 4.1.4 の Lagrange 関数を次のように定義する．$\boldsymbol{z}_0:(0,t_{\mathrm{T}})\to\mathbb{R}^n$ ($\boldsymbol{z}_0(t_{\mathrm{T}})=\boldsymbol{u}(t_{\mathrm{T}})$) を f_0 のために用意された問題 4.1.3 に対する Lagrange 乗数として，その集合を Z とかくことにする．また，$p:(0,t_{\mathrm{T}})\to\mathbb{R}$ を式 (4.1.20) に対する Lagrange 乗数として，その集合を P とかくことにする．このとき，任意の $(\boldsymbol{z}_0,p)\in Z\times P$ に対して，問題 4.1.4 の Lagrange 関数を

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{u},\boldsymbol{z}_0,p)=\mathscr{L}_0(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{u},\boldsymbol{z}_0)+\mathscr{L}_1(\boldsymbol{\xi},p) \tag{4.1.21}$$

とおく．ただし，

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_0(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{u},\boldsymbol{z}_0)&=f_0(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{u})+\mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{u},\boldsymbol{z}_0)\\&=\int_0^{t_{\mathrm{T}}}\left\{\frac{\|\boldsymbol{u}\|^2_{\mathbb{R}^n}}{2}+\frac{\|\boldsymbol{\xi}\|^2_{\mathbb{R}^d}}{2}-(\dot{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi})\cdot\boldsymbol{z}_0\right\}\mathrm{d}t\\&\quad+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}(t_{\mathrm{T}})\|^2_{\mathbb{R}^n},\end{aligned} \tag{4.1.22}$$

$$\mathscr{L}_1(\boldsymbol{\xi},p)=\int_0^{t_{\mathrm{T}}}\left(\frac{\|\boldsymbol{\xi}\|^2_{\mathbb{R}^d}}{2}-1\right)p\,\mathrm{d}t \tag{4.1.23}$$

をそれぞれ $f_0(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{u})$ と式 (4.1.20) に対する Lagrange 関数とおく．ここで，$(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{u},\boldsymbol{z}_0,p)\in\Xi\times U\times Z\times P$ の任意変動を $\{\boldsymbol{\eta},\hat{\boldsymbol{u}},\hat{\boldsymbol{z}}_0,\hat{p}\}\in\Xi\times V\times W\times P$ とおく．ただし，V は $\hat{\boldsymbol{u}}(0)=\boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^n}$ を満たす $\hat{\boldsymbol{u}}:(0,t_{\mathrm{T}})\to\mathbb{R}^n$ の集合，W は $\hat{\boldsymbol{z}}_0(t_{\mathrm{T}})=\boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^n}$ を満たす $\hat{\boldsymbol{z}}_0:(0,t_{\mathrm{T}})\to\mathbb{R}^n$ の集合とする．このとき，$\mathscr{L}$ の第 1 変分は，任意の $\{\boldsymbol{\eta},\hat{\boldsymbol{u}},\hat{\boldsymbol{z}}_0,\hat{p}\}\in\Xi\times V\times W\times P$ に対して

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}'(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{u},\boldsymbol{z}_0,p)[\boldsymbol{\eta},\hat{\boldsymbol{u}},\hat{\boldsymbol{z}}_0,\hat{p}]\\&\quad=\mathscr{L}_{0\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{u},\boldsymbol{z}_0)[\boldsymbol{\eta}]+\mathscr{L}_{1\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi},p)[\boldsymbol{\eta}]+\mathscr{L}_{0\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{u},\boldsymbol{z}_0)[\hat{\boldsymbol{u}}]\\&\qquad+\mathscr{L}_{0\boldsymbol{z}_0}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{u},\boldsymbol{z}_0)[\hat{\boldsymbol{z}}_0]+\mathscr{L}_{1p}(\boldsymbol{\xi},p)[\hat{p}]\end{aligned} \tag{4.1.24}$$

となる．式 (4.1.24) の右辺第 4 項と第 5 項はそれぞれ

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{0\boldsymbol{z}_0}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{u},\boldsymbol{z}_0)[\hat{\boldsymbol{z}}_0] &= -\int_0^{t_\mathrm{T}} (\dot{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi})\cdot\hat{\boldsymbol{z}}_0\,\mathrm{d}t,\\ \mathscr{L}_{1p}(\boldsymbol{\xi},p)[\hat{p}] &= \int_0^{t_\mathrm{T}} \left(\frac{\|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbb{R}^d}^2}{2} - 1\right)\hat{p}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

となる．$\boldsymbol{u}$ が状態決定問題 (問題 4.1.3) の解で式 (4.1.20) が満たされるとき，これらの項はゼロとなる．また，式 (4.1.24) の右辺第 3 項は

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}_{0\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{u},\boldsymbol{z}_0)[\hat{\boldsymbol{u}}]\\ &= \int_0^{t_\mathrm{T}} \left\{\boldsymbol{u}\cdot\hat{\boldsymbol{u}} - \left(\dot{\hat{\boldsymbol{u}}} - \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{u}}\right)\cdot\boldsymbol{z}_0\right\}\mathrm{d}t + \boldsymbol{u}(t_\mathrm{T})\cdot\hat{\boldsymbol{u}}(t_\mathrm{T})\\ &= \int_0^{t_\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{u} + \dot{\boldsymbol{z}}_0 + \boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{z}_0\right)\cdot\hat{\boldsymbol{u}}\,\mathrm{d}t + (\boldsymbol{u}(t_\mathrm{T}) - \boldsymbol{z}_0(t_\mathrm{T}))\cdot\hat{\boldsymbol{u}}(t_\mathrm{T})\end{aligned}$$

となる．ただし，$\hat{\boldsymbol{u}}(0) = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^n}$ が使われた．この項は，$\boldsymbol{z}_0$ が次の随伴問題の解のときにゼロとなる．

問題 4.1.5 (f_0 に対する随伴問題) $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ を問題 4.1.3 のとおりとする．このとき，

$$\dot{\boldsymbol{z}}_0 = -\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{z}_0 - \boldsymbol{u} \quad \text{in } (0,t_\mathrm{T}), \tag{4.1.25}$$

$$\boldsymbol{z}_0(t_\mathrm{T}) = \boldsymbol{u}(t_\mathrm{T}) \tag{4.1.26}$$

を満たす $\boldsymbol{z}_0 : (0,t_\mathrm{T}) \to \mathbb{R}^n$ を求めよ． □

さらに，式 (4.1.24) の右辺第 1 項と第 2 項はそれぞれ

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{0\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{u},\boldsymbol{z}_0)[\boldsymbol{\eta}] &= \int_0^{t_\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{z}_0\right)\cdot\boldsymbol{\eta}\,\mathrm{d}t = \langle\boldsymbol{g}_0,\boldsymbol{\eta}\rangle,\\ \mathscr{L}_{1\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi},p)[\boldsymbol{\eta}] &= \int_0^{t_\mathrm{T}} p\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\eta}\,\mathrm{d}t = \langle\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{\eta}\rangle\end{aligned}$$

となる．ここで，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は双対積 (定義 4.4.5) を表す．ここでは，有限次元ベクトル空間における内積に相当するものとみなす．そこで，問題 2.8.2 の KKT 条件が式 (2.8.5) から式 (2.8.8) で与えられたことに対応させて，問題 4.1.4 の解 $\boldsymbol{\xi}$ に対する KKT 条件は

$$\boldsymbol{g}_0 + \boldsymbol{g}_1 = (1+p)\,\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{in } (0,t_\mathrm{T}), \tag{4.1.27}$$

$$\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbb{R}^d}^2 \le 1 \quad \text{in } (0,t_\mathrm{T}), \tag{4.1.28}$$

$$\left(\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbb{R}^d}^2-1\right)p=0 \quad \text{in } (0,t_{\mathrm{T}}), \tag{4.1.29}$$

$$p\geq 0 \quad \text{in } (0,t_{\mathrm{T}}) \tag{4.1.30}$$

となる．

ここで得られた KKT 条件を別の表現に変更してみよう．$\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{z}_0$ は式 (4.1.27) から式 (4.1.30) を満たすとする．$\boldsymbol{\zeta}\in\mathbb{R}^d$ を $\|\boldsymbol{\zeta}\|_{\mathbb{R}^d}^2/2\leq 1$ を満たす任意のベクトルとする．このとき，$\|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbb{R}^d}^2/2<1$ ならば $p=0$ となり，式 (4.1.27) より

$$\langle\boldsymbol{g}_0,\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\xi}\rangle=\left(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{z}_0\right)\cdot(\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\xi})=0 \quad \text{in } (0,t_{\mathrm{T}})$$

が成り立つ．また，$\|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbb{R}^d}^2/2=1$ ならば $p>0$, $\boldsymbol{\xi}\cdot(\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\xi})\leq 0$ および

$$\langle\boldsymbol{g}_0+\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\xi}\rangle=\left(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{z}_0\right)\cdot(\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\xi})+p\boldsymbol{\xi}\cdot(\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\xi})=0 \quad \text{in } (0,t_{\mathrm{T}})$$

が成り立つ．したがって，いずれの場合も

$$\left(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{z}_0\right)\cdot(\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{g}_0\cdot(\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\xi})\geq 0 \quad \text{in } (0,t_{\mathrm{T}}) \tag{4.1.31}$$

が成り立つ．式 (4.1.31) は，評価関数 f_0 の Lagrange 関数 $\mathscr{L}_0$ が $\boldsymbol{\xi}$ において極小となることを示している．この条件は Pontryagin の局所最小条件とよばれる．

さらに，Hamilton 関数を

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{u},\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi})\cdot\boldsymbol{z}+\frac{1}{2}\left(\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{R}^n}^2+\|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbb{R}^d}^2\right)$$

と定義するとき，随伴問題 (問題 4.1.5) は，任意の $\hat{\boldsymbol{u}}\in U$ に対して

$$\dot{\boldsymbol{z}}_0\cdot\hat{\boldsymbol{u}}=-\mathscr{H}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{u},\boldsymbol{z}_0)[\hat{\boldsymbol{u}}] \quad \text{in } (0,t_{\mathrm{T}}),$$
$$\boldsymbol{z}_0(t_{\mathrm{T}})=\boldsymbol{u}(t_{\mathrm{T}})$$

とかける．このとき，式 (4.1.31) は

$$\mathscr{H}_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{u},\boldsymbol{z}_0)[\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\xi}]\geq 0 \quad \text{in } (0,t_{\mathrm{T}})$$

とかける．この関係は，$\boldsymbol{\zeta}$ を $\|\boldsymbol{\zeta}\|_{\mathbb{R}^d}^2/2\leq 1$ を満たす任意のベクトルとして，そのときの状態決定問題 (問題 4.1.3) と随伴問題 (問題 4.1.5) の解をそれぞれ $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}_0$ とするとき，

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{u},\boldsymbol{z}_0)\leq\mathscr{H}(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}_0) \quad \text{in } (0,t_{\mathrm{T}})$$

が成り立つことを表している．このように，問題 4.1.4 の KKT 条件を満たす $\boldsymbol{\xi}$ は Hamilton 関数を最小にすることを表している．この最小条件は Pontryagin の最小原理とよばれる．

さらに，非線形システムに対しても同様の結果が得られる ([7, 5.4 節, p. 140] ただし，t_{T} は変数と仮定されている．ここでは固定とみなす)．非線形システムの最適制御問題に対する状態決定問題を次のように定義する．

問題 4.1.6 (非線形システムの制御問題) $\boldsymbol{b}: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ および制御力 $\boldsymbol{\xi}: (0, t_{\mathrm{T}}) \to \mathbb{R}^d$ が与えられたとき，

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial \boldsymbol{u}^{\top}} (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}) \, \boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial \boldsymbol{\xi}^{\top}} (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}) \, \boldsymbol{\xi} \quad \text{in } (0, t_{\mathrm{T}}), \tag{4.1.32}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{\alpha} \tag{4.1.33}$$

を満たすシステムの状態 $\boldsymbol{u}: (0, t_{\mathrm{T}}) \to \mathbb{R}^n$ を求めよ． □

制御力 $\boldsymbol{\xi}$ と状態決定問題 (問題 4.1.3) の解 $\boldsymbol{u}$ を用いて，最適制御の評価関数を

$$f_0(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}) = \int_0^{t_{\mathrm{T}}} h(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}t + j(\boldsymbol{u}(t_{\mathrm{T}})) \tag{4.1.34}$$

とおく．ここで，$h: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ と $j: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は与えられた関数とする．また，凸領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ が与えられたとき，制御力の制約を

$$\boldsymbol{\xi} \in \Omega \quad \text{in } (0, t_{\mathrm{T}}) \tag{4.1.35}$$

とおく．このとき，最適制御問題は次のように構成される．

問題 4.1.7 (非線形システムの最適制御問題) Ξ を $\boldsymbol{\xi}: (0, t_{\mathrm{T}}) \to \mathbb{R}^d$ の集合，U を $\boldsymbol{u}: (0, t_{\mathrm{T}}) \to \mathbb{R}^n$ の集合とする．f_0 を式 (4.1.34) とする．このとき，

$$\min_{(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}) \in \Xi \times U} \{ f_0(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}) \mid \text{式 (4.1.35)}, \ \text{Problem 4.1.6} \}$$

を満たす $\boldsymbol{\xi}$ を求める問題に対する KKT 条件を求めよ． □

問題 4.1.4 と同様に Lagrange 関数を定義する．このとき，この問題の随伴問題は次のようになる．

問題 4.1.8 (f_0 に対する随伴問題) 問題 4.1.6 の解 $\boldsymbol{u}$ と式 (4.1.34) の f_0 に対して，

$$\dot{\boldsymbol{z}}_0 = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial \boldsymbol{u}^{\top}} (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}) \right)^{\top} \boldsymbol{z}_0 - \frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{u}} (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}),$$

$$\boldsymbol{z}_0(t_{\mathrm{T}}) = \frac{\partial j}{\partial \boldsymbol{u}} (\boldsymbol{u}(t_{\mathrm{T}}))$$

を満たす $\boldsymbol{z}_0: (0, t_{\mathrm{T}}) \to \mathbb{R}^n$ を求めよ． □

$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{z}_0$ がそれぞれ状態決定問題 (問題 4.1.6) と随伴問題 (問題 4.1.8) の解のとき，Pontryagin の局所最小条件は，任意の $\boldsymbol{\zeta} \in \Omega$ に対して，

$$\left\{ \frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}) + \left(\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial \boldsymbol{\xi}^{\top}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}) \right)^{\top} \boldsymbol{z}_0 \right\} \cdot (\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\xi}) \geq 0 \quad \text{in} \ \ (0, t_{\mathrm{T}})$$

となる．

問題 4.1.4 や問題 4.1.7 は時間発展問題に対する関数最適化問題の解法を考えるうえで，随伴問題がどのように構成されるのかをみるのによい例題になっている．

4.2　抽象空間

4.1 節において，変分原理は時間や場所の関数を設計変数とする関数最適化問題になっていることをみてきた．4.2 節と 4.3 節では，関数最適化問題の設計変数が入る線形空間についてみていくことにしよう．4.2 節では，線形空間の定義からはじめて，今後使われる抽象空間を定義する．ここで抽象空間とは，すべての要素間で演算や近さなどを判定する規準が定義されているような集合のことを意味することにする．

本節では，線形演算が使える抽象空間として線形空間を定義する．その後，距離が使える距離空間を定義する．距離空間では，極限操作が可能なことを保証する完備性が定義される．その後，また線形空間にもどって，ノルムが定義された線形空間 (ノルム空間) や内積が使える線形空間 (内積空間) を定義していく．完備性が備わったノルム空間 (Banach 空間) と内積空間 (Hilbert 空間) は，今後重要な抽象空間となる．

4.2.1　線形空間

まず，本書でもっとも基本的な抽象空間として位置づけられる線形空間の定義を示そう．いわゆるベクトル空間は線形空間の別称である．線形空間は次のように定義される．

定義 4.2.1 (線形空間) 集合 X に属する任意の要素 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ に対して 和 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in X$ が定義され，$\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す集合 K に属する任意の要素 α と X に属する任意の要素 $\boldsymbol{x}$ に対してスカラー積 $\alpha \boldsymbol{x} \in X$ が定義されているとする．このとき，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$ および $\alpha, \beta \in K$ に対して，

(1) 和の交換則 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$,

(2) 和の結合則 $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$,

(3) $\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ を満たす零元 $\boldsymbol{e}\in X$ の存在,

(4) $(-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}$ を満たす逆元 $-\boldsymbol{x}\in X$ の存在,

(5) $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ を満たす単位元 $1\in K$ の存在,

(6) スカラー積の結合則 $\alpha\,(\beta\boldsymbol{x})=(\alpha\beta)\,\boldsymbol{x}$,

(7) スカラーの分配則 $(\alpha+\beta)\,\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$,

(8) ベクトルの分配則 $\alpha\,(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$

が成り立つならば，X を K 上の線形空間という．X の要素をベクトルあるいは点とよぶ．K の要素をスカラーとよぶ．さらに，$K=\mathbb{R}$ のとき X を実線形空間という．
□

線形空間 X の要素 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ に対して，任意の $\alpha,\beta\in K$ による $\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}$ は線形演算あるいは線形結合とよばれる．また，線形空間 X, Y の直積空間 $X\times Y$ は，任意の $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$ と $\alpha\in K$ に対して，和 $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$ とスカラー積 $\alpha\,(x_1,y_1)=(\alpha x_1,\alpha y_1)$ により，線形空間になる．

線形空間が定義されたので，さっそくその例をあげてみよう．d を自然数としたとき，$\mathbb{R}^d$ が実線形空間の定義を満たすことはすぐにわかる．このとき，零元 $\boldsymbol{e}$ は $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$ となり，$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$ の逆元はマイナス元 $-\boldsymbol{x}$ となる．

連続関数全体の集合

次に，実数を値域とする連続関数全体の集合が実線形空間になることをみてみよう．連続関数全体の集合は関数空間の一つであることから，本書の構成では 4.3 節で解説するのが適当である．しかし，線形空間のイメージをはやく具体化しておくために，あえてここで連続関数全体の集合に対する定義を示しておくことにする．

これ以降，d を自然数，k を非負の整数とする．まず，連続関数の偏微分を表す際に使われる多重指数とよばれる規約について説明しておこう．k 階偏微分可能な関数 $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ に対して，$\sum_{i\in\{1,\cdots,d\}}\beta_i\le k$ を満たす $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\cdots,\beta_d)^\top\in\{0,\cdots,k\}^d$ が与えられたとき，$\nabla^{\boldsymbol{\beta}}f$ と $|\boldsymbol{\beta}|$ をそれぞれ

$$\nabla^{\boldsymbol{\beta}}f=\frac{\partial^{\beta_1}\partial^{\beta_2}\cdots\partial^{\beta_d}f}{\partial x_1^{\beta_1}\partial x_2^{\beta_2}\cdots\partial x_d^{\beta_d}},\quad |\boldsymbol{\beta}|=\sum_{i\in\{1,\cdots,d\}}\beta_i\le k$$

のように定義する．このときの $\boldsymbol{\beta}$ は多重指数とよばれる．また，$\mathbb{R}^d$ の部分集合 $\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid f(\boldsymbol{x}) \neq 0\right\}$ の閉包は f の台とよばれ，$\operatorname{supp} f$ とかかれる．

k 階偏微分まで連続な (A.1.2 項) 実数値関数全体の集合を次のようにかく．なお，以下では，Ω を $\mathbb{R}^d$ あるいは $\mathbb{R}^d$ の連結な開部分集合とし，領域とよぶことにする (A.5 節)．領域が有界な場合にはその境界 $\partial\Omega$ は Lipschitz 境界 (A.5 節) であると仮定し，そのときの Ω を Lipschitz 領域という．また，$\bar{\Omega}\,(=\Omega \cup \partial\Omega)$ は Ω の閉包 (A.1.1 項) を表すことにする．

定義 4.2.2 (連続関数全体の集合) $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を Lipschitz 領域とする．Ω 上で定義された連続関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ の集合を次のように定義する．$k \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ に対して，

(1) f の全体集合を $C(\Omega; \mathbb{R})$ とかく．$\nabla^{\boldsymbol{\beta}} f : \Omega \to \mathbb{R}$ ($|\boldsymbol{\beta}| \leq k$) が連続な f の全体集合を $C^k(\Omega; \mathbb{R})$ とかく．さらに，定義域が $\bar{\Omega}$ のとき $C^k\left(\bar{\Omega}; \mathbb{R}\right)$ とかく．

(2) 有界な f の全体集合を $C_{\mathrm{B}}(\Omega; \mathbb{R})$ とかく．$\nabla^{\boldsymbol{\beta}} f : \Omega \to \mathbb{R}$ ($|\boldsymbol{\beta}| \leq k$) が有界な f の全体集合を $C_{\mathrm{B}}^k(\Omega; \mathbb{R})$ とかく．

(3) $\operatorname{supp} f$ が Ω 上のコンパクト集合 (命題 4.2.12 参照) であるような f の全体集合を $C_0(\Omega; \mathbb{R})$ とかく．$C^k(\Omega; \mathbb{R}) \cap C_0(\Omega; \mathbb{R})$ を $C_0^k(\Omega; \mathbb{R})$ とかく．

□

定義 4.2.2 の (1) と (2) で定義された関数の集合 $C(\Omega; \mathbb{R})$ と $C_{\mathrm{B}}(\Omega; \mathbb{R})$ の違いは有界性にある．Ω は開集合であるので，$C(\Omega; \mathbb{R})$ には境界で無限大になるような連続関数も含まれることになる．たとえば，$x \in (0, \infty]$ に対して $f(x) = 1/x$ は連続であるが，有界ではない．それに対して，$C_{\mathrm{B}}(\Omega; \mathbb{R})$ の要素には境界で無限大になるような連続関数は含まれないことになる．そこで，

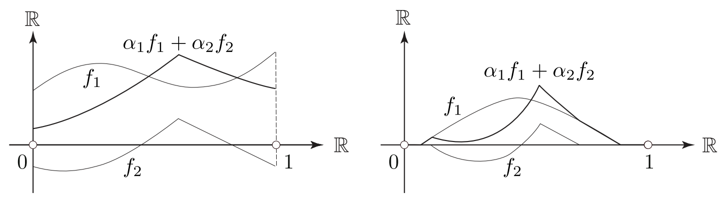
$$C_{\mathrm{B}}(\Omega; \mathbb{R}) \subset C(\Omega; \mathbb{R}) \tag{4.2.1}$$

が成り立つことになる．

また，$C\left(\bar{\Omega}; \mathbb{R}\right)$ と $C_{\mathrm{B}}(\Omega; \mathbb{R})$ の違いは定義域が閉集合 $\bar{\Omega}$ か開集合 Ω かの違いにある．定義域が有界閉集合ならば，連続関数は一様連続 (A.1.2 項) かつ有界となることが示される．一方，定義域が開集合ならば，有界であっても一様連続ではない例がみつけられる．たとえば，$x \in (0, \infty]$ に対して $f(x) = \sin(1/x)$ は連続かつ有界であるが，一様連続ではない．そこで，

$$C\left(\bar{\Omega}; \mathbb{R}\right) \subset C_{\mathrm{B}}(\Omega; \mathbb{R}) \tag{4.2.2}$$

が成り立つことになる．しかし，後に，$C\left(\bar{\Omega}; \mathbb{R}\right)$ と $C_{\mathrm{B}}(\Omega; \mathbb{R})$ のノルムは同じになるという結果が示される (命題 4.2.15)．



(a) $f_1, f_2 \in C\left((0,1);\mathbb{R}\right)$　　(b) $f_1, f_2 \in C_0\left((0,1);\mathbb{R}\right)$

図 4.5: 連続関数の線形結合

さらに，定義 4.2.2 (3) で定義された $C_0\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$ は，Ω の境界 $\partial\Omega$ ($\Omega = \mathbb{R}^d$ のときには無限遠) 近傍で $f = 0$ となるような関数の集合であることを表している．そこで，定義 4.2.2 (3) で定義された $C_0^k\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$ は，$\partial\Omega$ 近傍で $\nabla^{\boldsymbol{\beta}} f = 0$ ($|\boldsymbol{\beta}| \le k$) となるような関数の集合であることになる．この定義に基づけば，$C_0\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$ や $C_0^k\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$ に対して Ω を $\bar{\Omega}$ におきかえることは意味をなさないことに注意する必要がある．なぜならば，関数の台 (値が非ゼロの定義域の閉包) が $\bar{\Omega}$ であることは，境界近傍でゼロとなることと矛盾するからである．

定義 4.2.2 (3) で定義された $C_0^\infty\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$ は，のちに Sobolev 空間 $W^{k,p}\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$ (定義 4.3.10) に入る関数 f の微分を定義する際に，Schwartz 超関数の試験関数として使われる (定義 4.3.7)．$C^\infty\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$ も，Sobolev 空間 $W_0^{k,p}\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$ (定義 4.3.10) に入る関数 f の微分を定義するときに，試験関数として使われる (式 (4.3.10) 参照)．

連続関数全体の集合 $C^k\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$ と $C_0^k\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$ について，次のことがいえる．

命題 4.2.3 (連続関数全体の集合) $C^k\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$, $C^k\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)$, $C_{\mathrm{B}}^k\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$ および $C_0^k\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$ は，零元を $f_0 = 0$ in Ω，f の逆元を $-f$ とする実線形空間である．また，$C^k\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)$, $C_{\mathrm{B}}^k\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$ および $C_0^k\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$ は，$C^k\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$ の部分実線形空間 (部分集合でかつ実線形空間) である． □

証明　連続関数の線形結合が連続関数になることを確認すればよい．任意の $f_1, f_2 \in C^k\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$ と任意の $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ に対して，$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ は $C^k\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$ の要素に入る (図 4.2.1 (a) 参照)．したがって，$C^k\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$ は実線形空間である．$C\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)$ と $C_{\mathrm{B}}^k\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$ についても同様のことが成り立つ．さらに，任意の $f_1, f_2 \in C_0^k\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$ と任意の $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ に対して，$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ は $\partial\Omega$ の近傍で $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0$ が成り立つので，$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ は $C_0^k\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$ の要素に入る (図 4.2.1 (b) 参照)．したがって，$C_0^k\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$ は実線形空間である．さらに，$C^k\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right) \subset C^k\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$, $C_{\mathrm{B}}^k\left(\Omega;\mathbb{R}\right) \subset C^k\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$ および $C_0^k\left(\Omega;\mathbb{R}\right) \subset C^k\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$ であるので，$C^k\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)$, $C_{\mathrm{B}}^k\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$ および $C_0^k\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$ は $C^k\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$ の部分実線形空間である． □

次に，$C^k\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$ の次元について考えてみよう．次元を次のように定義する．

定義 4.2.4 (次元) n を自然数として，線形空間 X が n 個の線形独立 (1 次独立) なベクトルを含むが，$n+1$ 個のベクトルを選ぶと必ず線形従属になるとき， X の

次元を n という． □

このとき，次のことがいえる．

命題 4.2.5 (連続関数全体の集合の次元) $C^k(\Omega;\mathbb{R})$ の次元は無限次元である． □

証明　線形独立な連続関数が無限個みつけられることを示す．$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in C((0,1);\mathbb{R})$ を $f_1(x)=1$, $f_2(x)=x$, $f_3(x)=x^2$, $\ldots$, $f_n(x)=x^{n-1}$ のように選べば，これらは線形独立である．なぜならば，x^{n-1} を 1, $\cdots$, x^{n-2} の線形結合で表せないからである．n は任意に選べるので無限次元である． □

これまでみてきたように，連続関数全体の集合は無限次元 (命題 4.2.5) の実線形空間 (命題 4.2.3) であることがわかった．

4.2.2　部分線形空間

線形空間のイメージが具体化されたところで，線形空間の部分空間に関するいくつかの定義を示しておこう．まず，有限個の要素の線形結合によって構成される部分線形空間を次のように定義する．

定義 4.2.6 (線形包) m を自然数として，K ($\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$) 上の線形空間 X に対して，$V=\{x_1,\cdots,x_m\}$ を X の有限部分集合とする．このとき，

$$\operatorname{span} V = \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m \mid \alpha_1,\cdots,\alpha_m \in K\}$$

を V の線形包，あるいは V によって張られた X の部分線形空間という． □

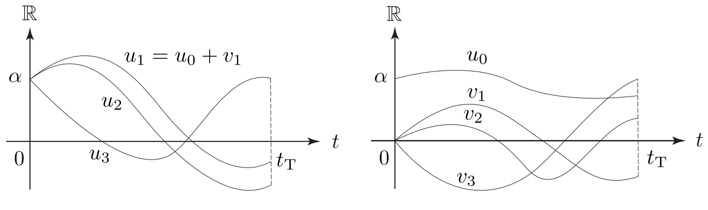
V の線形包 $\operatorname{span} V$ は，X の部分集合で V を含む最小の部分線形空間となることが示される．第 6 章で偏微分方程式の境界値問題に対する数値解法として示される Galerkin 法では，近似関数の集合は既知関数の線形包で構成される．

また，線形空間の要素とその要素を含まない部分線形空間の和で構成された集合は次のようによばれる．

定義 4.2.7 (アフィン部分空間) X を線形空間，V を X の部分線形空間とする．$\boldsymbol{x}_0 \in X \setminus V$ に対して，

$$V(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in V\}$$

とかいて，$V(\boldsymbol{x}_0)$ を V のアフィン部分空間という． □



(a) $u_1, u_2, u_3 \in U$　(b) $u_0 \in X$, $v_1, v_2, v_3 \in V$

図 4.6: $X = H^1((0, t_{\mathrm{T}}); \mathbb{R})$ のアフィン部分空間 $U = V(u_0)$

アフィン部分空間の例として，拡張 Hamilton の原理 (問題 4.1.1) における関数の集合 U があげられる．後に 4.6.1 項で示されるように，U は，図 4.2.2 (a) のような $t = 0$ において $u = \alpha$ を満たす関数 u の集合になっている (式 (4.6.3) 参照)．このとき，U は線形空間にはなっていない．なぜならば，$u_1, u_2 \in U$ に対して $u_1 + u_2$ は $t = 0$ において $2\alpha \neq \alpha$ となってしまうからである．それに対して，図 4.2.2 (b) のような $t = 0$ において $v = 0$ を満たす関数 v の集合 V (式 (4.6.4) 参照) は線形空間になっている．実際，$v_1, v_2 \in V$ に対して $v_1 + v_2$ は $t = 0$ においてゼロとなるからである．このような境界上で 0 になるような条件は，偏微分方程式の境界値問題では同次 Dirichlet 条件とよばれ，0 ではない値になるような条件は非同次 Dirichlet 条件とよばれる．そこで，後に定義される $H^1((0, t_{\mathrm{T}}); \mathbb{R})$ (定義 4.3.10 参照) を線形空間 X とおき，$t = 0$ において $u_0 = \alpha$ を満たす関数 $u_0 \in X$ (たとえば，図 4.2.2 (b) の u_0) を選んで固定すれば，U は V のアフィン部分空間 $V(u_0)$ と一致する．また，$u \in V(u_0)$ は

$$u - u_0 \in V \tag{4.2.3}$$

と同意である．本書では，線形空間を重視することから，第 5 章以降で偏微分方程式の境界値問題を定義する際には，主に，式 (4.2.3) の表現を使うことにする．

4.2.3 距離空間

次に，関数の集合において極限の操作が可能となるような性質について考えてみたい．そのために，距離と距離空間を次のように定義する．

定義 4.2.8 (距離空間) 集合 X に対して，関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$ に対して，

(1) 非負性 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$,

(2) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ と $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ は同値,

(3) 対称性 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$,

(4) 三角不等式 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \leq d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$

を満たすとき，d を X 上の距離という．また，集合 X を d を距離とする距離空間という． □

この定義からわかるように，距離空間は線形空間である必要はない．関数空間の連続性に相当するいくつかの性質は距離空間において定義されることである．そこで，それらの定義をこの距離空間の項で示しておくことにしよう．

稠密性

距離空間の部分集合に関する性質について考えてみよう．X を距離空間として，V をその部分集合，$\bar{V}$ をその閉包 (A.1.1 項) とする．このとき，$X = \bar{V}$ ならば，V は X において稠密であるという．これは，任意の $\boldsymbol{x} \in X$ の近傍には V の点が少なくとも一つ含まれることと同値である．

このことは，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ と有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ の関係を用いて次のように説明される．任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して絶対値 $|x - y|$ を距離とするとき，すべての実数 $\boldsymbol{x}$ に対して，その近傍に $\mathbb{Q}$ の要素は少なくとも一つ含まれる．そこで，$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ において稠密である．

可分性

次に，距離空間の連続性や閉包性を調べるために，無限点列がとれるという性質について考えてみよう．ただし，無限点列とは，距離空間の点を無限個並べた集合を表すものとする．X を距離空間として，X がたかだか可算個 (自然数全体の要素数と同じ程度の無限個) の点からなる稠密な部分集合をもつとき，X は可分であるという．有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は (自然数を分母と分子にもつ分数の集合であるために) 可算集合である．$\mathbb{R}$ は $\mathbb{Q}$ を含むので，$\mathbb{R}$ は可分であることになる．このような可分性は，無限点列を使って収束を議論する際の前提条件となる性質である．

完備性

距離空間における連続性の概念は完備性とよばれ，Cauchy 列を使って定義される．まず，Cauchy 列を次のように定義する．

定義 4.2.9 (Cauchy 列) 距離空間 X 上の無限点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が

$$\lim_{n,m\to\infty} d(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_m) = 0$$

を満たすとき，$\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を Cauchy 列という． □

Cauchy 列を使って完備性を次のように定義する．

定義 4.2.10 (完備) 距離空間 X のいかなる Cauchy 列も X 内の点に収束するとき，X は完備であるという． □

ここで，無限点列の無限個の意味について解説しておきたい．自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ の要素の数は無限個であるというときと，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の要素の数は無限個であるというときの意味は同じであるようには思えない．この素朴な疑問に答えたのが Cantor の対角線論法である (たとえば，[12, 3.4 節, p. 65])．無限集合の濃度 (大きさ) という概念が定義され，それにより $\mathbb{R}$ の濃度 (連続体濃度) は $\mathbb{N}$ の濃度 (可算濃度) よりも高いことが示されている．しかし，Cauchy 列の定義で使われた無限点列は可算濃度の意味の可算無限個で構成される．このことは，$\mathbb{R}$ の濃度は連続体濃度であっても，距離空間における連続性 (完備性) を調べる目的に対しては可算無限個の Cauchy 列を用意すれば十分であるという意味に解釈される．

そのことは，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の連続性を次の公理で済ますことからみてとれる．

公理 4.2.11 ($\mathbb{R}$ の完備性) 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して絶対値 $|x-y|$ を距離とするとき，$\mathbb{R}$ の Cauchy 列は必ず $\mathbb{R}$ 内の点に収束する． □

この公理において，$\mathbb{R}$ の Cauchy 列は $\mathbb{Q}$ の要素だけでもつくることができる．たとえば，$\sqrt{2}$ は $x_1 = 1$ と $x_{n+1} = 1 + 1/(x_n + 1)$ で生成される Cauchy 列の収束点であることが示される．したがって，$\mathbb{Q}$ のの収束点をすべて含むような集合を考えれば，その集合は完備になる．それを $\mathbb{R}$ とみなすことが約束されている．このことから，$\mathbb{R}$ は $\mathbb{Q}$ が完備化された集合であるということができる．

また，完備性と実数の部分集合との関係は次のようになる．開区間 $(0,1)$ は完備ではない．しかし，閉区間 $[0,1]$ は完備である．なぜならば，Cauchy 列 $\{1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \cdots\}$ は $(0,1)$ 内に収束しないが，$[0,1]$ には収束するからである．

コンパクト性

稠密性は，距離空間の部分集合の中でもその部分集合の閉包が元の距離空間になる性質を示していた．それに対して，距離空間の部分集合でその部分集合の中にとっ

た無限点列は適当な部分列をとればいつもその部分集合の中に収束する性質は，コンパクト性とよばれる．X を完備な距離空間，V をその部分集合とする．V の任意の無限点列が V の中に収束する部分無限点列を含むとき，V はコンパクトであるという．V の閉包の中に収束する部分無限点列を含むとき，V は相対コンパクトであるという．このとき，次の命題が成り立つ．

命題 4.2.12 (コンパクト集合の有界性) X を完備な距離空間，V を X の部分集合とする．V がコンパクトならば，V は有界閉集合である．□

証明　コンパクトの定義より，V は閉集合である．V の有界性を背理法で示す．V が有界でないならば，X の固定点 $\boldsymbol{x}$ に対して，$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_n) \to \infty$ となる無限点列 $\{\boldsymbol{y}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在する．$\{\boldsymbol{y}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の中から収束する部分無限点列を選びだせない．なぜならば，収束する無限点列は有界であるからである．そこで，V は有界でなければならない．□

命題 4.2.12 の逆命題「V が有界閉集合ならば，V はコンパクトである」は，X が有限次元ベクトル空間のときに成り立つが，無限次元空間の場合には成り立たない (命題 4.4.11 の上を参照)．

4.2.4　ノルム空間

完備性を距離空間でみてきたが，距離空間は線形空間である必要はなかった．ここでは，距離が定義された線形空間を定義して，完備性を備えた線形空間を定義しよう．

X を K 上の線形空間とする．関数 $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ ($\|\boldsymbol{x}\| : X \ni \boldsymbol{x} \mapsto \|\boldsymbol{x}\| \in \mathbb{R}$) が，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ と任意の $\alpha \in K$ に対して，

(1) 正値性 $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$,

(2) $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ と $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}_X$ は同値,

(3) 斉次性あるいは比例性 $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\,\|\boldsymbol{x}\|$,

(4) 三角不等式 $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$

を満たすとき，$\|\cdot\|$ を $\|\cdot\|_X$ ともかいて，X 上のノルムという．

このとき，ノルム空間は次のように定義される．

定義 4.2.13 (ノルム空間) ノルムが定義された線形空間をノルム空間という．スカラーの集合 K が $\mathbb{R}$ のとき実ノルム空間という．□

ノルム空間は，$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ を距離 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ とおくことにより，距離空間となる．したがって，Cauchy 列が定義できて，完備性が調べられる．

Banach 空間

完備なノルム空間を次のように定義する．

定義 4.2.14 (Banach 空間) 完備なノルム空間 X を Banach 空間という．スカラーの集合 K が $\mathbb{R}$ のとき実 Banach 空間という． □

具体例をあげてみよう．$\mathbb{R}$ の要素 x に対して絶対値 $|x|$ をノルムとおく．このとき，$\mathbb{R}$ は Banach 空間である．しかし，$[0,1]$ は Banach 空間ではない．なぜならば，$[0,1]$ は線形空間ではないためである．

次に，$\mathbb{R}^d$ について考えてみよう．$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_d)^\top \in \mathbb{R}^d$ に対して，

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\mathbb{R}^d} = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_d|^2}$$

は Euclid ノルムとよばれる．このノルムは $\mathbb{R}^d$ 上の内積を使って $\sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$ でノルムが定義されたときと同じ定義となる．ノルムの定義を満たすものは他にもある．$p \in [1, \infty)$ に対して

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_d|^p)^{1/p}$$

は p ノルムとよばれる．また，$p = \infty$ に対して

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, \cdots, |x_d|\}$$

は最大値ノルムあるいは Chebyshev ノルムとよばれる．これらのノルムに対して，$\mathbb{R}^d$ は Banach 空間になる．

さらに，連続関数全体の集合 (定義 4.2.2) について考えてみよう．$C^k(\Omega; \mathbb{R})$ が実線形空間になることは命題 4.2.3 で確かめられた．しかし，$C^k(\Omega; \mathbb{R})$ の要素は無限大になる可能性をもっていた．そこで，完備性を備えた線形空間を考えるときには $C^k(\Omega; \mathbb{R})$ は除外されなければならない．その点，$C^k(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$ と $C^k_{\mathrm{B}}(\Omega; \mathbb{R})$ は Banach 空間になれる可能性をもつ．ここでは，これらのノルムを定義して，それらを用いて完備性 (連続関数の Cauchy 列が連続関数に収束すること) が示されることをみてみよう．

そのために，まず，連続関数全体の集合が可分であること (連続関数の Cauchy 列がつくれること) を調べておきたい．連続関数は係数が有理数をとる多項式全体の集合を含む．この集合はたかだか可算個はある．そこで，係数が有理数をとる多項式全体の集合は，係数が実数をとる多項式全体の集合の稠密な部分集合となる．さらに，Weierstrass の近似定理より，係数が実数をとる多項式全体の集合は連続関数全体の集合の稠密な部分集合であることがいえる．そこで，連続関数全体の集合は可分であることが確かめられた．完備性は次のように確かめられる．

命題 4.2.15 (連続関数全体の集合) 定義 4.2.2 の $C^k\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)$ と $C_{\mathrm{B}}^k(\Omega;\mathbb{R})$ は

$$\|f\|_{C^k\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)}=\|f\|_{C_{\mathrm{B}}^k(\Omega;\mathbb{R})}=\max_{|\boldsymbol{\beta}|\le k}\sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\left|\nabla^{\boldsymbol{\beta}}f\left(\boldsymbol{x}\right)\right|$$

をノルムとして実 Banach 空間になる． □

証明　証明の要点は，連続関数の Cauchy 列は各点で収束するが，各点で収束した関数が一様に連続となるかという点である．

まず $k=0$ の場合を考える．$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in C\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)$ を Cauchy 列とする．任意の $\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}$ を選んで固定するとき，$n,m\to\infty$ に対して

$$|f_n(\boldsymbol{x})-f_m(\boldsymbol{x})|\le\|f_n-f_m\|_{C\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)}\to 0$$

となることから，各点 $\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}$ において $\mathbb{R}$ ノルム (絶対値) で収束する．それを $f(\boldsymbol{x})$ とかく．

次に，任意の $\epsilon>0$ に対して，$n,m>n_0$ に対して

$$\|f_n-f_m\|_{C\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)}\le\frac{\epsilon}{2}$$

が成り立つような n_0 を選ぶ．このとき，任意の $n>n_0$ に対して，

$$\begin{aligned}|f_n(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})|&\le|f_n(\boldsymbol{x})-f_m(\boldsymbol{x})|+|f_m(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})|\\&\le\|f_n-f_m\|_{C\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)}+|f_m(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})|\end{aligned}$$

となる．ここで，$|f_m(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})|\le\epsilon/2$ となるように m を大きくとれば，$|f_n(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})|\le\epsilon$ が成り立ち，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に一様収束する．連続関数が一様収束すればその極限も連続であることから $f\in C\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)$ となり，$C\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)$ は完備となる．さらに $k>0$ とする．$C^k\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)$ のノルムの定義から，$n\to\infty$ のとき，すべての $|\boldsymbol{\beta}|\le k$ に対して，一様収束の意味で $\nabla^{\boldsymbol{\beta}}f_n\to\nabla^{\boldsymbol{\beta}}f$ となることと $\|f_n-f\|_{C^k\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)}\to 0$ とは等価となる．したがって，$C^k\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)$ は完備となる．

$C_{\mathrm{B}}^k(\Omega;\mathbb{R})$ の要素は有界であるので，$\bar{\Omega}$ を Ω に変更しても同様のことがいえる． □

また，Banach 空間 X と Y の直積空間 $X\times Y$ は，$(x,y)\in X\times Y$ のノルム $\|(x,y)\|_{X\times Y}$ を $p\in[1,\infty)$ に対して $\left(\|x\|_X^p+\|y\|_Y^p\right)^{1/p}$，あるいは $\max\left\{\|x\|_X,\|y\|_Y\right\}$ とおけば $X\times Y$ は Banach 空間になる．そこで，r を自然数として，$\mathbb{R}^r$ を値域とする k 階微分可能な関数 $\boldsymbol{f}=\left(f_1,\cdots,f_r\right)^{\top}:\bar{\Omega}\to\mathbb{R}^r$ の全体集合 $C^k\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}^r\right)$ は直積空間 $\left(C^k\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)\right)^r$ となり，ノルム $\|\boldsymbol{f}\|_{C^k\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}^r\right)}$ を $\left(\sum_{i\in\{1,\dots,r\}}\|f_i\|_{C^k\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)}^p\right)^{1/p}$，あるいは $\max_{i\in\{1,\dots,r\}}\|f_i\|_{C^k\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)}$ とおけば $C^k\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}^r\right)$ は Banach 空間になる．

ここで，最適化問題における Banach 空間の必要性について確認しておこう．設計変数が定義された線形空間を Banach 空間に選べば，Banach 空間の完備性により，次のことがいえることになる．第 3 章でみてきたような反復法で試行点を次々にみつけていったときの収束点は，Banach 空間の要素として存在することが保証される．さらに，勾配法を使うためには，評価関数の微分や勾配法を一般化する必

要がある．微分を一般化した Fréchet 微分については，4.5 節で Banach 空間に対して定義される．勾配法の一般化は第 7 章のテーマである．そこでは，次に示される完備性を備えた内積空間である Hilbert 空間が必要になる．

4.2.5 内積空間

さらに，有限次元ベクトル空間における内積を抽象的な線形空間に導入しよう．内積は次のように定義される．X を K ($\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$) 上の線形空間とする．関数 $(\cdot,\cdot) : X \times X \to K$ が，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$，$\alpha \in K$ に対して，

(1) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ と $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}_X$ は同値,

(2) ベクトルにおける線形性 $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$,

(3) ベクトルにおける線形性 $(\alpha \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$,

(4) 対称性 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ あるいは共役対称性 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})^*$ ($(\cdot)^*$ は複素共役を表す),

(5) 正値性: 任意の $\boldsymbol{x} \in X \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対して $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$

が満たされるとき，$(\cdot,\cdot)$ を $(\cdot,\cdot)_X$ ともかいて，X 上の内積あるいはスカラー積という．内積空間は次のように定義される．

定義 4.2.16 (内積空間) 内積の定義された線形空間を内積空間という．スカラーの集合 K が $\mathbb{R}$ のとき実内積空間という． □

内積が定義されていれば，$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ はノルムの定義を満たす．したがって，内積空間はノルム空間にもなり，完備性が調べられる．

Hilbert 空間

完備性を備えた内積空間を次のようにいう．

定義 4.2.17 (Hilbert 空間) 内積空間がノルム

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$$

に関して完備のとき，Hilbert 空間という．スカラーの集合 K が $\mathbb{R}$ のとき，実 Hilbert 空間という． □

有限次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^d$ は d 次元の実 Hilbert 空間である．関数空間の中にも Hilbert 空間があることを 4.3 節でみていくことにする．実は，本書でもっとも重要な抽象空間は Hilbert 空間である．重要である理由の一つは，4.1 節でみてきた変分原理のほとんどが，実 Hilbert 空間の定義が満たされた関数空間上の最適化問題になっているためである．そのことを 4.6 節で確認する．また，第 7 章以降で説明される最適設計問題も，実 Hilbert 空間の定義が満たされた関数空間上で定義されることになる．さらに，第 3 章で示された勾配法を第 7 章において一般化する際にも Hilbert 空間が使われることになる．

4.3 関数空間

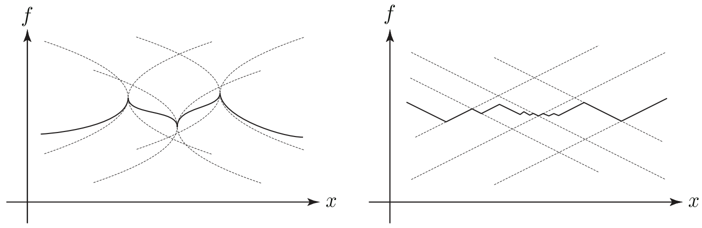
線形空間と距離空間を基本として完備性や内積を備えた抽象空間をみてきた．それに対して，連続関数全体の集合 $C^k(\Omega;\mathbb{R})$ は，Ω で定義された $\mathbb{R}$ 値をもつ連続な関数全体の集合として定義された．いってみれば具体的な関数全体の集合を表していた．このような定義域と値域が決められた条件を満たす関数全体の集合を関数空間という．ここでは，連続関数全体の集合以外の関数空間を定義する．そのうえで，それらが Banach 空間や Hilbert 空間の要件を満たすときのノルムや内積の定義をまとめておくことにしよう．

ここでは，関数の定義域を Ω とかくことにする．しかし，その定義が関数の性質に依存して変更されることを断っておきたい．関数が連続である場合には，Ω は定義 4.2.2 の前で説明された Lipschitz 領域 (A.5 節) であると仮定する．一方，積分が有界になること (可積分性) だけに注意がむけられた関数を考える場合には，Ω は $\mathbb{R}^d$ の部分集合で Lebesgue 測度がゼロとなる集合を除いた Ω 上の可測集合であるとみなす．ただし，$d=1,2,3$ に対して，$\mathbb{R}^d$ における Lebesgue 測度は長さ，面積，体積を意味することにする．そこで，Lebesgue 測度がゼロとなる集合とは，$d=1,2,3$ に対してそれぞれ点，長さ，面積をもつ集合を意味する．このような可測集合上で成り立つ式では，「ほとんど至るところで (almost everywhere)」の意味で a.e. が添えられる．

なお，本節で示される定理や命題に対する証明は本書のレベルを超えるものである．例として挙げられた文献などを参照されたい．

4.3.1 Hölder 空間

まず，連続の定義をより厳しくした $C^k(\bar{\Omega};\mathbb{R})$ の部分線形空間を定義しよう．ここで示される Lipschitz 連続は，領域の境界に対する滑らかさを定義する際に使わ



(a) $\sigma = 0.5$　(b) $\sigma = 1$ (Lipschitz 連続)

図 4.7: Hölder 連続な関数

れる (A.5 節)．第 8 章と第 9 章で示される形状最適化問題では，その滑らかさが保たれるように設計変数を変動させることが話題となる．

定義 4.3.1 (Hölder 空間) Ω は $d \in \{1, 2, \cdots\}$ 次元の Lipschitz 領域とする．任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \bar{\Omega}$ に対して

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| \leq \beta \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_{\mathbb{R}^d}^{\sigma} \tag{4.3.1}$$

を満たす $\sigma \in (0, 1]$ と $\beta > 0$ が存在するとき，関数 $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ を Hölder 連続という．σ を Hölder 指数という．また，$k \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ に対して，$\nabla^{\boldsymbol{\beta}} f$ $(|\boldsymbol{\beta}| \leq k)$ が Hölder 連続な f の集合を $C^{k,\sigma}(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$ とかき，Hölder 空間という[1]．特に，$k = 0$ および $\sigma = 1$ のとき，f は Lipschitz 連続であるといい，$C^{0,1}(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$ を Lipschitz 空間という．このときの β を Lipschitz 定数という．□

図 4.3.1 は，$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が Hölder 連続の場合と Lipschitz 連続の場合の例を示す．$C^{k,\sigma}(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$ に対して次の結果が得られる (たとえば，[4, Theorem 1, p. 241])．

命題 4.3.2 (Hölder 空間) 定義 4.3.1 の $C^{k,\sigma}(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$ は，

$$\left|\nabla^{\boldsymbol{\beta}} f\right|_{C^{0,\sigma}(\bar{\Omega}; \mathbb{R})} = \sup_{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \bar{\Omega},\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}} \frac{\left|\nabla^{\boldsymbol{\beta}} f(\boldsymbol{x}) - \nabla^{\boldsymbol{\beta}} f(\boldsymbol{y})\right|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_{\mathbb{R}^d}^{\sigma}}$$

をセミノルムとして

$$\|f\|_{C^{k,\sigma}(\bar{\Omega}; \mathbb{R})} = \|f\|_{C^{k}(\bar{\Omega}; \mathbb{R})} + \max_{|\boldsymbol{\beta}| = k} \left|\nabla^{\boldsymbol{\beta}} f\right|_{C^{0,\sigma}(\bar{\Omega}; \mathbb{R})} \tag{4.3.2}$$

をノルムとして実 Banach 空間になる．ただし，$\|f\|_{C^{k}(\bar{\Omega}; \mathbb{R})}$ は命題 4.2.15 で定義されたものとする．□

[1] 文献によっては $C^{0,1}(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$ を Hölder 空間に含めない場合もある．

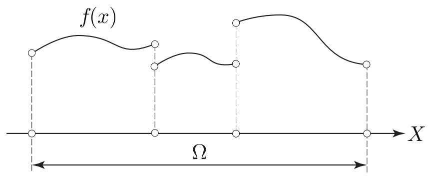


図 4.8: 可積分関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

式 (4.3.2) において，$C^{k,\sigma}\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)$ のノルムには $C^{k}\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)$ のノルムが含まれている．したがって，

$$C^{k,\sigma}\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)\subset C^{k}\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right) \tag{4.3.3}$$

が成り立つことになる．

4.3.2　Lebesgue 空間

次に，連続性をもちいずに，積分が定義される性質 (可積分性) に注意がむけられた関数全体の集合を定義しよう．図 4.3.2 のような不連続関数であってもその積分は定義される．このような可積分性は，変分原理においてエネルギーが定義されることなどに対応する．そのことは 4.6 節で確認される．

なお，この項と次項で定義される Lebesgue 空間と Sobolev 空間では，Lebesgue 測度が 0 の集合を除いて等しい関数 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ は同じ関数とみなす．このことを，$f_1(x)=f_2(x)$ for a.e. $x\in\Omega$ と表記する．詳細は Lebesgue 積分の教科書を参照されたい．

定義 4.3.3 (Lebesgue 空間) Ω は $d\in\{1,2,\cdots\}$ 次元の領域とする．$f:\Omega\to\mathbb{R}$ とする．$p\in[1,\infty)$ のとき，Lebesgue 積分 (可測集合上の積分) の意味で

$$\int_{\Omega}|f(\boldsymbol{x})|^{p}\,\mathrm{d}x<\infty \tag{4.3.4}$$

が満たされるとき，f は p 乗 Lebesgue 可積分であるという．$p=\infty$ のとき，

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\text{a.e. }\boldsymbol{x}\in\Omega}|f(\boldsymbol{x})|<\infty \tag{4.3.5}$$

が満たされるとき，f は本質的有界であるという．このような f 全体の集合を Lebesgue 空間といい，$L^{p}(\Omega;\mathbb{R})$ とかく．□

$L^{p}(\Omega;\mathbb{R})$ について次の結果が得られる．

命題 4.3.4 (Lebesgue 空間) 定義 4.3.3 の $L^p(\Omega;\mathbb{R})$ は

$$\|f\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R})} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |f(\boldsymbol{x})|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} & \text{for } p \in [1, \infty) \\ \operatorname*{ess\,sup}_{\text{a.e. } \boldsymbol{x} \in \Omega} |f(\boldsymbol{x})| & \text{for } p = \infty \end{cases}$$

をノルムとして実 Banach 空間になる． □

この命題の $L^1(\Omega;\mathbb{R})$ の完備性に対する証明では，Lebesgue の収束定理が使われる (たとえば，[9, 定理 2.5, p. 38])．また，$p \in (1,\infty)$ のときの $L^p(\Omega;\mathbb{R})$ が線形空間になることの証明には，Hölder の不等式 (定理 A.9.1) と Minkowski の不等式 (定理 A.9.2) が使われる (たとえば，[9, 定理 2.10, p. 42])．さらに，$L^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ の線形性と完備性は本質的上限 $\operatorname{ess\,sup}_{\text{a.e. } \boldsymbol{x} \in \Omega} |f(\boldsymbol{x})|$ をノルムにして示される (たとえば，[9, 定理 2.20, p. 46])．ここで，$L^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ のノルムが関数の絶対値の上限値になることは，有限次元ベクトルに対する最大値ノルムの関数への拡張と考えれば理解されよう．

さらに，$p = 2$ のとき，$L^2(\Omega;\mathbb{R})$ は 2 乗可積分な関数全体の集合を意味し，

$$(f, g)_{L^2(\Omega;\mathbb{R})} = \int_\Omega f(\boldsymbol{x})\, g(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}x \tag{4.3.6}$$

を内積として，実 Hilbert 空間になる．この関数空間は，今後の展開において重要な関数空間の一つとなる．

ここで，$L^2(\Omega;\mathbb{R})$ の中に連続関数の ($L^2(\Omega;\mathbb{R})$ ノルムでみた) Cauchy 列がとれて，それが $L^2(\Omega;\mathbb{R})$ の要素である不連続関数に収束する例をみておこう．

例題 4.3.5 (連続関数の L^2 ノルムによる Cauchy 列) $C([0,2];\mathbb{R})$ の要素

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{in } (0,1) \\ 1 - (x-1)^n & \text{in } (1,2) \end{cases}$$

で生成された関数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を考える．$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は，

$$\|f\|_{L^2((0,2);\mathbb{R})} = \left(\int_0^2 |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2}$$

をノルムとおいた Cauchy 列になっていることを示せ．また，その Cauchy 列が収束する関数を求めよ． □

解答 図 4.3.3 のような関数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対して，$m, n \to \infty$ のとき，

$$(f_m, f_n)_{L^2((0,2);\mathbb{R})} = \int_0^1 x^{m+n} \, \mathrm{d}x + \int_1^2 \{1 - (x-1)^m\}\{1 - (x-1)^n\} \, \mathrm{d}x$$

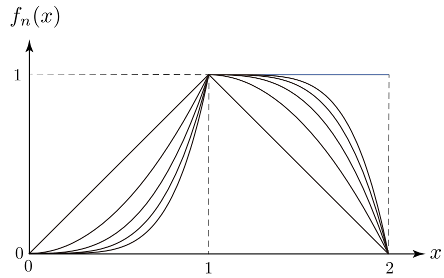


図 4.9: $[0,2]$ 上の連続関数の関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$= \frac{1}{1+m+n} + \frac{m}{1+m} - \frac{1}{1+n} - \frac{1}{1+m+n} \to 1$$

が得られるこれより，

$$\begin{aligned}&\|f_m - f_n\|^2_{L^2((0,2);\mathbb{R})}\\ &\quad = (f_m, f_m)_{L^2((0,2);\mathbb{R})} - 2\,(f_n, f_m)_{L^2((0,2);\mathbb{R})} + (f_n, f_n)_{L^2((0,2);\mathbb{R})} \to 0\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $L^2(\Omega;\mathbb{R})$ ノルムをもちいたときの Cauchy 列となっている．また，この Cauchy 列は

$$f = \begin{cases} 0 & \text{in } [0,1) \\ 1 & \text{in } [1,2] \end{cases}$$

に収束する．実際，$n\to\infty$ のとき，

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|^2_{L^2((0,1);\mathbb{R})} &= \int_0^1 x^{2n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+2n} \to 0,\\ \|f_n - f\|^2_{L^2((1,2);\mathbb{R})} &= \int_1^2 \left\{-(x-1)^n\right\}^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{1+2n} \to 0\end{aligned}$$

が成り立ち，その結果，$\|f_n - f\|_{L^2((0,2);\mathbb{R})} \to 0$ が得られるためである． □

この事実に基づけば，$C(\bar{\Omega};\mathbb{R})$ の $L^2(\Omega;\mathbb{R})$ ノルムによる Cauchy 列が収束する関数をすべて含むような完備化された集合を $L^2(\Omega;\mathbb{R})$ とおいたという解釈ができる．そのことは，$\mathbb{Q}$ の $\mathbb{R}$ ノルムによる Cauchy 列の収束点をすべて含むような集合を $\mathbb{R}$ とおいたことと同様である．さらに，$L^2(\Omega;\mathbb{R})$ は $C^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ あるいは $C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ の完備化にもなっていることが示される．それらの例は Friedrichs の軟化子を用いてつくられる．一方，これらの事実は，$C(\bar{\Omega};\mathbb{R})$ は $L^2(\Omega;\mathbb{R})$ の稠密な部分空間になることを示している．このことから，$L^2(\Omega;\mathbb{R})$ は可分である (Cauchy 列がとれる) ことがいえることになる．可分性に関しては，$p\in[1,\infty)$ に拡張できて，$L^p(\Omega;\mathbb{R})$ の可分性は $C(\bar{\Omega};\mathbb{R})$ が $L^p(\Omega;\mathbb{R})$ の稠密な部分空間になることを使って示される．

4.3.3 Sobolev 空間

次に，微分も含めた可積分関数全体の集合を定義しよう．4.1 節でみてきた変分原理では，変位を時間や場所に対して微分した関数を積分した値によってエネルギーが定義されていた．以下に登場する関数空間の中のあるものは，まさに変位に対して必要とされる性質を備えたものとなる．そのことを 4.6 節で確認する．ここでは，可積分性だけを備えた関数の微分を定義してから，本題に入ることにしよう．

Schwartz 超関数

積分可能であっても不連続な関数 (図 4.3.2 参照) の微分に対しては，Schwartz の超関数を使った定義が使われる．ここでは，その定義とそれをもちいた不連続関数の微分についてみておくことにしよう．

Schwartz 超関数の定義では有界線形汎関数が使われる．本書では，有界線形汎関数は 4.4.5 項で作用素の一つとして定義される．ここでは，ひとまず次のように定義しておこう．$f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を Lebesgue 可積分な関数として，ϕ を $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}\right)$ (定義 4.2.2) に入る任意の関数とする．このとき，

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f\phi \,\mathrm{d}x < \infty \tag{4.3.7}$$

によって定義された $\langle f, \cdot \rangle : C_0^\infty\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}\right) \to \mathbb{R}$ を f より定まる有界線形汎関数とよぶことにする．ここで使われた任意関数 $\phi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}\right)$ は，有界線形汎関数を定義するために試験的に使われた関数であることから，試験関数とよばれる．また，試験関数の関数空間は $\mathscr{D}(\Omega)$ とかかれることが一般的である．そこで以下では，$C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ を $\mathscr{D}(\Omega)$ とかくことにする．

定義 4.3.6 (Schwartz の超関数) Ω は $d \in \{1, 2, \cdots\}$ 次元の領域とする．$\mathscr{D}(\Omega)$ の関数列 $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は，Ω 上のコンパクト集合を台として，$n \to \infty$ のときすべての偏導関数がそのコンパクト集合上で 0 に一様収束するとする．このとき，$\langle f, \phi_n \rangle \to 0$ $(n \to \infty)$ となるような有界線形汎関数 $\langle f, \cdot \rangle : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ を f から定まる Schwartz の超関数といい，本書では混乱のない限り同じ記号 f をもちいることにする．Ω を定義域とする Schwartz 超関数 f の集合を $\mathscr{D}'(\Omega)$ とかく． □

定義 4.3.6 より，超関数とは，定義域から値域への写像として定義される通常の関数の意味では定義されないような関数に対して，性質のよい試験関数をもちいた積分によって定義された有界線形汎関数と同一視することによって定義しようという試みである．

このような Schwartz の超関数に対する微分は，次のように定義される．

定義 4.3.7 (Schwartz 超関数の偏導関数) $\langle f, \cdot \rangle : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ を f から定まる Schwartz の超関数とする．任意の $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ に対して

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \phi \right\rangle = -\left\langle f, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle \quad \text{for } i \in \{1, \cdots, d\}$$

が成り立つとき，$\langle \partial f/\partial x_i, \cdot \rangle$ を f から定まる Schwartz 超関数の偏導関数といい，本書では混乱のない限り同じ記号 $\partial f/\partial x_i$ をもちいることにする． □

定義 4.3.7 の $\langle \partial f/\partial x_i, \cdot \rangle$ が $\mathscr{D}'(\Omega)$ の要素になることは，定義 4.3.6 において，$\mathscr{D}(\Omega)$ の関数列 $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $\{\partial \phi_n/\partial x_i\}_{n\in\mathbb{N}}$ に変更しても，$\{\partial \phi_n/\partial x_i\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathscr{D}(\Omega)$ の関数列になることからいえる (たとえば，[1, 1.60, p. 21], [10, 命題 2.8, p. 30])．定義 4.3.7 を繰り返しもちいれば，Schwartz 超関数の意味で高階の偏導関数が定義される．$\boldsymbol{\beta}$ を多重指数として，$\nabla^{\boldsymbol{\beta}}(\,\cdot\,) = \partial^{\beta_1}\partial^{\beta_2}\cdots\partial^{\beta_d}(\,\cdot\,)/\partial x_1^{\beta_1}\partial x_2^{\beta_2}\cdots\partial x_d^{\beta_d}$ とおき，

$$\left\langle \nabla^{\boldsymbol{\beta}} f, \phi \right\rangle = (-1)^{|\boldsymbol{\beta}|}\left\langle f, \nabla^{\boldsymbol{\beta}} \phi \right\rangle$$

が成り立つとき，$\left\langle \nabla^{\boldsymbol{\beta}} f, \cdot \right\rangle$ を Schwartz 超関数の意味で $|\boldsymbol{\beta}|$ 階の偏導関数といい，本書では混乱のない限り同じ記号 $\nabla^{\boldsymbol{\beta}} f$ をもちいることにする．

ここで，具体的な例をあげておこう．任意の $\phi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}\right)$ に対して

$$\langle \delta, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \delta \phi \, \mathrm{d}x = \phi\left(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}\right) \tag{4.3.8}$$

が成り立つ $\delta : \Omega^d \to \mathbb{R}$ を Dirac のデルタ関数あるいは Dirac の超関数という．それを用いて，階段関数の微分について考えてみよう．

例題 4.3.8 (Heaviside 階段関数の導関数) Heaviside の階段関数

$$h = \begin{cases} 0 & \text{in } (-\infty, 0) \\ 1 & \text{in } (0, \infty) \end{cases}$$

の Schwartz の超関数としての導関数は，Dirac のデルタ関数となることを示せ． □

解答　Schwartz 超関数の導関数の定義より

$$\langle \nabla h, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \nabla h \phi \, \mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} h \nabla \phi \, \mathrm{d}x = -\int_{0}^{\infty} \nabla \phi \, \mathrm{d}x = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle$$

が成り立つ． □

Heaviside 階段関数の導関数が Dirac のデルタ関数になることをみた．この関係をもちいれば，不連続関数の導関数は次のようにかかれる．

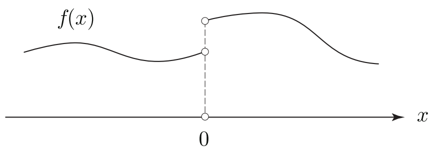


図 4.10: 不連続な関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

例題 4.3.9 (不連続関数の導関数) 図 4.3.4 のような原点で不連続な関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ の Schwartz の超関数としての導関数を示せ． □

解答 Schwartz 超関数の導関数の定義により

$$\begin{aligned}\langle \nabla f, \phi\rangle &= -\int_{-\infty}^{\infty} f \nabla \phi \,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{0} f \nabla \phi \,\mathrm{d}x - \int_{0}^{\infty} f \nabla \phi \,\mathrm{d}x \\ &= \left(f\left(0_+\right) - f\left(0_-\right)\right)\phi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} \nabla f \phi \,\mathrm{d}x \\ &= \left(f\left(0_+\right) - f\left(0_-\right)\right)\langle \delta, \phi\rangle + \int_{-\infty}^{\infty} \nabla f \phi \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

となる．ただし，$\epsilon > 0$ に対して $f\left(0_-\right) = \lim_{\epsilon\to 0} f(-\epsilon)$ および $f\left(0_+\right) = \lim_{\epsilon\to 0} f(\epsilon)$ とする． □

Sobolev 空間

可積分性を備えた関数の導関数が定義されたので，それを用いて導関数も含めた可積分関数の関数空間を定義しよう (たとえば，[6, Definition 1.3.2.1 and Definition 1.3.2.2, p. 16], [10, 定義 9.10, p. 195])．

定義 4.3.10 (Sobolev 空間) Ω は $d \in \{1,2,\cdots\}$ 次元の領域とする．$k \in \{0,1,2,\cdots\}$，$s = k+\sigma$ ($\sigma \in (0,1)$) および $p \in [1,\infty]$ に対して，次のような $f:\Omega\to\mathbb{R}$ の全体集合を Sobolev 空間という．

(1) $|\boldsymbol{\beta}| \le k$ に対して $\nabla^{\boldsymbol{\beta}} f \in L^p(\Omega;\mathbb{R})$ が成り立つとき，$W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})$ とかく．

(2) $p \in (1,\infty)$ に対して $f \in W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})$ が成り立ち，$|\boldsymbol{\beta}| \le k$ に対して

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega} \frac{\left|\nabla^{\boldsymbol{\beta}} f(\boldsymbol{x}) - \nabla^{\boldsymbol{\beta}} f(\boldsymbol{y})\right|^p}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_{\mathbb{R}^d}^{d+\sigma p}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \infty \tag{4.3.9}$$

が成り立つとき，$W^{s,p}(\Omega;\mathbb{R})$ とかく．

(3) $W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})$ における $C_0^{\infty}(\Omega;\mathbb{R})$ (定義 4.2.2) の閉包を $W_0^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})$ とかく．

(4) $k=0$ のとき，$p \in [1,\infty)$ に対して，$W_0^{0,p}(\Omega;\mathbb{R}) = L^p(\Omega;\mathbb{R})$ とかく (たとえば，[1, 2.30 Corollary, p. 38])．

(5) $p=2$ のとき $W^{k,2}(\Omega;\mathbb{R})$ と $W_0^{k,2}(\Omega;\mathbb{R})$ をそれぞれ $H^k(\Omega;\mathbb{R})$ と $H_0^k(\Omega;\mathbb{R})$ とかく．

□

定義 4.3.10 において，$f \in W_0^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})$ に対する Schwartz の超関数の定義では，試験関数が $C^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ ($C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ でないことに注意) から選ばれる．すなわち，式 (4.3.7) の代わりに，任意の $\phi \in C^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ に対して

$$\langle f, \phi \rangle = \int_\Omega f\phi \, \mathrm{d}x \tag{4.3.10}$$

を満たす $\langle f, \cdot \rangle : C^\infty(\Omega;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ によって定義される．

$W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})$ に対して次の結果が得られる (たとえば，[1, 3.3 Theorem, p. 60])．

命題 4.3.11 (Sobolev 空間) 定義 4.3.10 の $W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})$ は

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{|\boldsymbol{\beta}| \le k} \left\| \nabla^{\boldsymbol{\beta}} f \right\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R})}^p \right)^{1/p} & \text{for } p \in [0,\infty) \\ \displaystyle\max_{|\boldsymbol{\beta}| \le k} \left\| \nabla^{\boldsymbol{\beta}} f \right\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R})} & \text{for } p = \infty \end{cases} \tag{4.3.11}$$

をノルムとして実 Banach 空間になる．□

命題 4.3.11 で使われたノルムに対して，

$$|f|_{W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{|\boldsymbol{\beta}| = k} \left\| \nabla^{\boldsymbol{\beta}} f \right\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R})}^p \right)^{1/p} & \text{for } p \in [0,\infty) \\ \displaystyle\max_{|\boldsymbol{\beta}| = k} \left\| \nabla^{\boldsymbol{\beta}} f \right\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R})} & \text{for } p = \infty \end{cases} \tag{4.3.12}$$

はセミノルムとよばれる．

本書では，$H^1(\Omega;\mathbb{R})$ がもっとも重要な関数空間である．なぜならば，次のように内積が使える Hilbert 空間になるためである (たとえば，[9, 定理 6.28, p. 134])．

命題 4.3.12 (Sobolev 空間 $H^k(\Omega;\mathbb{R})$) $W^{k,2}(\Omega;\mathbb{R}) = H^k(\Omega;\mathbb{R})$ は

$$(f,g)_{H^k(\Omega;\mathbb{R})} = \sum_{|\boldsymbol{\beta}| \le k} \int_\Omega \nabla^{\boldsymbol{\beta}} f \cdot \nabla^{\boldsymbol{\beta}} g \, \mathrm{d}x \tag{4.3.13}$$

を内積とする実 Hilbert 空間になる．□

$H^k(\Omega;\mathbb{R})$ の中でも，$H^1(\Omega;\mathbb{R})$ と $H^1\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)$ は，偏微分方程式の境界値問題や形状や位相の最適化問題の関数が入る関数空間として使われる重要な関数空間である．そこで，確認のために内積の定義を示しておこう．$f,g \in H^1(\Omega;\mathbb{R})$ の内積は

$$(f,g)_{H^1(\Omega;\mathbb{R})} = \int_\Omega (fg + \boldsymbol{\nabla} f \cdot \boldsymbol{\nabla} g)\,\mathrm{d}x \tag{4.3.14}$$

で定義される．また，$\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in H^1\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)$ の内積は

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})_{H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)} &= \int_\Omega \left\{\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g} + \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{f}^\top\right)\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{g}^\top\right)\right\}\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \left\{\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g} + \sum_{(i,j)\in\{0,\cdots,d\}^2} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{ij}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)_{ij}\right\}\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{4.3.15}$$

で定義される．

$H^1((0,1);\mathbb{R})$ に含まれる関数と含まれない関数の区別をべき関数を使って調べてみよう．

例題 4.3.13 ($H^1((0,1);\mathbb{R})$ に入るべき関数) $x \in (0,1)$ に対して，関数

$$f = x^\alpha$$

が $H^1((0,1);\mathbb{R})$ の要素に入るような $\alpha \in \mathbb{R}$ の条件を示せ． □

解答 f の x に対する微分を f' とかく．このとき，

$$\begin{aligned}\|f\|_{H^1((0,1);\mathbb{R})} &= \left\{\int_0^1 \left(f^2 + f'^2\right)\mathrm{d}x\right\}^{1/2} = \left\{\int_0^1 \left(x^{2\alpha} + \alpha^2 x^{2(\alpha-1)}\right)\mathrm{d}x\right\}^{1/2} \\ &= \left(\left[\frac{x^{2\alpha+1}}{2\alpha+1} + \frac{\alpha^2 x^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\right]_0^1\right)^{1/2} < \infty\end{aligned}$$

となるためには，$2\alpha - 1 > 0$，すなわち $\alpha > 1/2$ であればよい． □

例題 4.3.13 より，$f = \sqrt{x}$ の $x = 0$ における特異性 (5.3 節) は，$H^1((0,1);\mathbb{R})$ では許容されないことがわかる．

4.3.4 Sobolev の埋蔵定理

Sobolev 空間 $W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})$ の定義 (定義 4.3.10) によれば，$d \in \{1,2,\cdots\}$，$k \in \{0,1,2,\cdots\}$ および $p \in [1,\infty]$ のとりかたによりたくさんの関数空間がつくりだされる．さらに，Hölder 空間 $C^{k,\sigma}(\Omega;\mathbb{R})$ も含めたさまざまな関数空間の埋蔵関係は，下で示される Sobolev の埋蔵定理によってまとめられている．

その埋蔵関係を概観するところからはじめよう．$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を共通として，k が同じならば $q < p$ のときに $W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R}) \subset W^{k,q}(\Omega;\mathbb{R})$ が成り立つ．また，p が同じならば $W^{k+1,p}(\Omega;\mathbb{R}) \subset W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})$ が成り立つ．これらの関係はノルムの定義から明らかである．Sobolev の埋蔵定理は，p と k が異なった Sobolev 空間どうしの埋蔵関係を示している．その概要は，$k - d/p$ を微分の階数とみなしたときに，

$$k + 1 - \frac{d}{p} \geq k - \frac{d}{q}$$

ならば

$$W^{k+1,p}(\Omega;\mathbb{R}) \subset W^{k,q}(\Omega;\mathbb{R})$$

となることを示している．さらに，$0 < \sigma = k - d/p < 1$ ならば，

$$W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R}) \subset C^{0,\sigma}(\Omega;\mathbb{R})$$

となることを示している．この場合には，Ω が Lipschitz 領域である必要がある．

これらの関係を念頭において，Sobolev の埋蔵定理の詳細な記述をみてみよう (たとえば，[1, 4.12 Theorem, p. 85])．

定理 4.3.14 (Sobolev の埋蔵定理) Ω は $d \in \{1, 2, \cdots\}$ 次元の領域とする．$k \in \{1, 2, \cdots\}$, $j \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ および $p \in [1, \infty)$ に対して，

(1) $k - d/p < 0$ のとき，$p^* = d/\{(d/p) - k\}$ を用いて，

$$W^{k+j,p}(\Omega;\mathbb{R}) \subset W^{j,q}(\Omega;\mathbb{R}) \quad \text{for } q \in [p, p^*], \tag{4.3.16}$$

(2) $k - d/p = 0$ のとき，

$$W^{k+j,p}(\Omega;\mathbb{R}) \subset W^{j,q}(\Omega;\mathbb{R}) \quad \text{for } q \in [p, \infty), \tag{4.3.17}$$

(3) $k - d/p = j + \sigma > 0$ $(\sigma \in (0,1))$ のとき，あるいは $k = d$ かつ $p = 1$ のとき，

$$W^{k+j,p}(\Omega;\mathbb{R}) \subset W^{j,q}(\Omega;\mathbb{R}) \quad \text{for } q \in [p, \infty] \tag{4.3.18}$$

が成り立つ．さらに，Ω が Lipschitz 領域ならば，

(4) $k - d/p = j + \sigma > 0$ $(\sigma \in (0,1))$ のとき，あるいは $k = d$ かつ $p = 1$ のとき，

$$W^{k+j,p}(\Omega;\mathbb{R}) \subset C^{j,\lambda}\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right) \quad \text{for } \lambda \in (0, \sigma], \tag{4.3.19}$$

(5) $k-1=d$ かつ $p=1$ のとき，

$$W^{k+j,p}(\Omega;\mathbb{R}) \subset C^{j,1}\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right) \tag{4.3.20}$$

が成り立つ． □

定理 4.3.14 の (1) が成り立つ背景を，Sobolev の不等式を用いて確認してみよう．Sobolev の不等式は，定理 4.3.14 の (1) の仮定のもとで，任意の $f \in C_0^{\infty}(\Omega;\mathbb{R})$ に対して，

$$\|f\|_{L^q(\Omega;\mathbb{R})} \leq c\,|f|_{W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})} \tag{4.3.21}$$

によって与えられる．ただし，c は f に依存しない正の定数である．ここでは，$k=1$ のときに式 (4.3.21) が成り立つことに注目する (たとえば，[1, 4.31 Theorem, p. 102], [3, Théoréme IX.9, p. 162], [2, Théoréme IX.9, p. 223])．

$a>0$ を用いて，$\boldsymbol{x} \in \Omega$ に対して $\boldsymbol{y} = a\boldsymbol{x} \in \hat{\Omega}$ とおき，$f(\boldsymbol{x}) = \hat{f}(\boldsymbol{y})$ とおく．このとき，式 (4.3.21) の左辺に対して

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^q(\Omega;\mathbb{R})} &= \left(\int_{\Omega} |f|^q \,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_d\right)^{1/q} = a^{-d/q}\left(\int_{\hat{\Omega}} \left|\hat{f}\right|^q \,\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_d\right)^{1/q} \\ &= a^{-d/q}\left\|\hat{f}\right\|_{L^q\left(\hat{\Omega};\mathbb{R}\right)}\end{aligned} \tag{4.3.22}$$

が成り立つ．一方，式 (4.3.21) 右辺の $|f|_{W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})}$ に対して

$$\begin{aligned}|f|_{W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R})} &= \left(\int_{\Omega}\sum_{|\boldsymbol{\beta}|=1}\left|\frac{\partial^{|\boldsymbol{\beta}|} f}{\partial x_1^{\beta_1}\cdots\partial x_d^{\beta_d}}\right|^p \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_d\right)^{1/p} \\ &= a^{(p-d)/p}\left(\int_{\hat{\Omega}}\sum_{|\boldsymbol{\beta}|=1}\left|\frac{\partial^{|\boldsymbol{\beta}|} \hat{f}}{\partial y_1^{\beta_1}\cdots\partial y_d^{\beta_d}}\right|^p \mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_d\right)^{1/p} \\ &= a^{1-d/p}\left|\hat{f}\right|_{W^{1,p}\left(\hat{\Omega};\mathbb{R}\right)}\end{aligned} \tag{4.3.23}$$

が成り立つ．ここで，定理 4.3.14 (1) の仮定 $q \leq p^* = d/\left\{(d/p)-1\right\}$ は

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d} \leq \frac{1}{q}$$

ともかかれ，さらに，$1-d/p+d/q \geq 0$ ともかかれることに注意する．そこで，式 (4.3.21) が成り立つならば，任意の $a>0$ に対して

$$\left\|\hat{f}\right\|_{L^q\left(\hat{\Omega};\mathbb{R}\right)} \leq a^{1-d/p+d/q} c \left|\hat{f}\right|_{W^{1,p}\left(\hat{\Omega};\mathbb{R}\right)} \tag{4.3.24}$$

が成り立つことになる．このとき，$1-d/p+d/q<0$ ならば，$a\to\infty$ のとき $a^{1-d/p+d/q}\to 0$ となってしまうことから，$\hat{f}$ に対する 式 (4.3.21) が成り立つためには，定理 4.3.14 (1) の仮定が必要となる．

また，定理 4.3.14 の (4) と (5) では，Sobolev 空間 $W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})$ と Hölder 空間 $C^{0,\sigma}\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)$ の埋蔵関係が与えられている．両者の関係については説明を要する．$C^{0,\sigma}\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)$ に含まれる関数は $\bar{\Omega}$ 上のすべての点で値をもつ関数であるのに対して，$W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})$ に含まれる関数は Ω 上の可測集合上 (ほとんど至るところ) で定義された関数であるからである．これらの定義のもとで両者を比較する場合には，$f\in W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})$ と可測集合上で $f=f^*$ が成り立つ等価な関数 $f^*\in C^{0,\sigma}\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)$ が選ぶことができて，ある $c>0$ に対して

$$\|f^*\|_{C^{0,\sigma}\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)}\leq c\,\|f\|_{W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})} \tag{4.3.25}$$

が成り立つことを意味するものとみなす (たとえば，[1, 4.2, p. 79])．

Hölder 空間の中でも Lipschitz 空間 $C^{0,1}\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)$ と Sobolev 空間 $W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R})$ との埋蔵関係については，Ω が凸で，f が $\mathbb{R}$ 値の関数 ($\mathbb{R}^n$ ではない) のときには，$f\in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R})$ と等価な関数 $f^*\in C^{0,1}\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)$ に対して両者のノルムが一致することから，$W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R})=C^{0,1}\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right)$ が成り立つことになる ([8, 定理 1.39, p. 23])．

さらに，定理 4.3.14 においては，k と j は整数であると仮定された．これらが実数 s と t に拡張された場合の埋蔵関係については，次の関係が成り立つことが知られている (たとえば，[6, Eqs. (1.4.4.5) and (1.4.4.6), p. 27])．s と $t\leq s$ を非負の実数として，p と $q\geq p$ を定理 4.3.14 において k を s におきかえたときの関係に従って定義されるとする．このとき，

$$s-\frac{d}{p}\geq t-\frac{d}{q} \tag{4.3.26}$$

が満たされるならば，

$$W^{s,p}(\Omega;\mathbb{R})\subset W^{t,q}(\Omega;\mathbb{R}) \tag{4.3.27}$$

となる．さらに，Ω が Lipschitz 領域のとき，$k<k+\sigma=s-d/p<k+1$ (k は非負の整数) ならば，

$$W^{s,p}(\Omega;\mathbb{R})\subset C^{k,\sigma}(\Omega;\mathbb{R}) \tag{4.3.28}$$

となる．

4.4　作用素

4.3 節では，いろいろな関数空間を定義して，それらが Banach 空間や Hilbert 空間になることをみてきた．関数最適化問題においては，設計変数が入る線形空間を

みてきたことになる．関数を設計変数においた最適設計問題では，状態決定問題の解である状態変数が入る線形空間にもなる．次に考えたいことは，評価関数が設計変数や状態変数で構成された積分 (汎関数) によって与えられたときに，その評価関数の微分がどのように定義されるかということである．ここでは，そのための準備として，Banach 空間から Banach 空間への写像を作用素とよんで定義する．また，その中で値域が実数になる作用素を汎関数とよんで定義する．さらに，関数空間を定義域とする汎関数の集合は Banach 空間となり，その汎関数の集合は定義域の関数空間に対する双対空間として定義されることを示す．この双対空間は，4.5 節で汎関数の微分を定義するときに勾配が入る関数空間となる重要な関数空間である．本節では，双対空間以外の作用素に関連する重要な定理 (トレース定理と Riesz の表現定理) についても記載しておくことにしよう．

4.4.1 有界線形作用素

関数に演算を施すことは，関数空間から関数空間への写像を定義することになる．このときの写像を特に作用素という．作用素の中でも線形性を備えているものは線形作用素とよばれ，次のように定義される．X と Y を K 上の Banach 空間とする．任意の $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X$ および $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ に対して，写像 $f : X \to Y$ が

$$f\left(\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2\right) = \alpha_1 f\left(\boldsymbol{x}_1\right) + \alpha_2 f\left(\boldsymbol{x}_2\right) \tag{4.4.1}$$

を満たすとき，f を線形写像あるいは線形作用素という．また，f は線形形式，あるいは 1 次形式ともよばれる．さらに，写像 $f : X \to Y$ が全単射 (1 対 1 写像) のとき，f は同型写像であるという．

たとえば，関数 $u \in C^1\left(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}\right)$ の微分作用素 $\mathcal{D} = \left(\partial / \partial x_i\right)_{i \in \{1, \cdots, d\}} : C^1\left(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}\right) \to C\left(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d\right)$ は，

$$\mathcal{D}\left(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2\right) = \alpha_1 \mathcal{D}\left(u_1\right) + \alpha_2 \mathcal{D}\left(u_2\right)$$

を満たすことから線形作用素である．

さらに，線形作用素 f が

$$\sup_{\boldsymbol{x} \in X \setminus \{\boldsymbol{0}_X\}} \frac{\left\|f\left(\boldsymbol{x}\right)\right\|_Y}{\left\|\boldsymbol{x}\right\|_X} < \infty \tag{4.4.2}$$

を満たすとき，f を有界線形作用素という．本書では，X から Y への有界線形作用素の全体集合を $\mathcal{L}\left(X; Y\right)$ とかく．また，f が式 (4.4.2) を満たすならば，$f : X \to Y$ は連続となる．なぜならば，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ に対して，

$$\left\|f\left(\boldsymbol{x}\right) - f\left(\boldsymbol{y}\right)\right\|_Y \le \beta \left\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\right\|_X$$

を満たす正定数 β が存在するためである．また，$f : X \to Y$ が連続ならば f は有界となる (たとえば，[11, 定理 4.8, p. 108])．そこで，有界線形作用素は連続線形作用素ともよばれる．さらに，有界線形作用素の全体集合 $\mathcal{L}(X;Y)$ について次の結果が得られる (たとえば，[9, 定理 7.6, p. 150])．

命題 4.4.1 (有界線形作用素) X と Y が Banach 空間のとき，$\mathcal{L}(X;Y)$ は

$$\|f\|_{\mathcal{L}(X;Y)} = \sup_{\boldsymbol{x}\in X\setminus\{\boldsymbol{0}_X\}} \frac{\|f(\boldsymbol{x})\|_Y}{\|\boldsymbol{x}\|_X}$$

をノルム $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X;Y)}$ とする Banach 空間になる． □

有界線形作用素の例をあげてみよう．n と m を自然数として n 行 m 列の行列 $\mathbb{R}^{n\times m}$ は有界線形作用素であり，$\mathbb{R}^{n\times m}$ 全体の集合は $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ とかける．そこで，行列 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times m}$ のノルムは，$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m$ に対して $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ とおくとき，

$$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathbb{R}^{n\times m}} = \|\boldsymbol{y}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)} = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m\setminus\{\boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^m}\}} \frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_{\mathbb{R}^n}}{\|\boldsymbol{x}\|_{\mathbb{R}^m}} \tag{4.4.3}$$

によって定義される．この定義から，$\boldsymbol{A}$ が正定値実対称行列 $(n=m)$ で Euclid ノルム $\|\boldsymbol{x}\|_{\mathbb{R}^n}$ をもちいたときの $\|\boldsymbol{A}\|_{\mathbb{R}^{n\times n}}$ は，最大固有値で与えられることになる．

4.4.2　トレース定理

第 5 章以降で詳しくみていくことになる偏微分方程式の境界値問題では，領域上で定義された関数から境界上の値を抽出する操作が必要となる．その操作はトレース作用素によって行われる．この作用素は有界線形作用素になる．$\boldsymbol{\nu}$ を境界で定義された外向き単位法線 (定義 A.5.4) として，$\partial_\nu = \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nabla}$ とかくことにしよう．このとき，次のようなトレース定理が得られる (たとえば，[6, Theorem 1.5.1.2, p. 37, and Theorem 1.5.1.3, p. 38])．

定理 4.4.2 (トレース定理) $k,l\in\{0,1,2,\cdots\}$, $\sigma\in(0,1)$, $p\in(1,\infty)$, $s-1/p=l+\sigma$ および $s\le k+1$ とする．$\Omega\subset\mathbb{R}^d$ の境界 $\partial\Omega$ は $k\ge1$ のとき $C^{k,1}$ 級境界で，$k=0$ のとき Lipschitz 境界とする．このとき，有界線形作用素 $\gamma : W^{s,p}(\Omega;\mathbb{R}) \to \prod_{i\in\{0,1,\cdots,l\}} W^{s-i-1/p,p}(\partial\Omega;\mathbb{R})$ で，$f\in C^{k,1}(\Omega;\mathbb{R})$ に対して

$$\gamma f = \left\{ f|_{\partial\Omega}, \partial_\nu f|_{\partial\Omega}, \cdots, \partial_\nu^l f|_{\partial\Omega} \right\}$$

を満たすものが一意に存在する．その作用素は，p に依存しない連続な右逆作用素 ($\gamma^{-1}g=f$ ならば，$\gamma f=g$ が満たされる) をもつ． □

定理 4.4.2 における写像 γ はトレース作用素とよばれる．本書では，もっぱら $s=1$ $(l=0)$ が仮定されることがほとんどであることから，$\gamma f = f|_{\partial\Omega}$ の意味でもちいられる．

トレース作用素により，関数の定義域が d 次元から $d-1$ 次元に変化したときに，微分の階数は s から $t=s-1/p$ に変化した．そのように変化した理由は，微分の階数は

$$s-\frac{d}{p}=\left(s-\frac{1}{p}\right)-\frac{d-1}{p}=t-\frac{d-1}{p}$$

のように不変となるように変化したためであるとみなすことができる．

また，$W_0^{s,p}(\Omega;\mathbb{R})$ (定義 4.3.10) に入る関数に対しては次の結果が得られる (たとえば，[6, Theorem 1.5.1.5, p. 38, and Corollary 1.5.1.6, p. 39])．

定理 4.4.3 ($W_0^{s,p}(\partial\Omega;\mathbb{R})$ に対するトレース定理) $k,l\in\{0,1,2,\cdots\}$，$\sigma\in(0,1)$，$p\in(1,\infty)$，$s-1/p=l+\sigma$ および $s\le k+1$ とする．$\Omega\subset\mathbb{R}^d$ の境界 $\partial\Omega$ は $k\ge 1$ のとき $C^{k,1}$ 級境界で，$k=0$ のとき Lipschitz 領域とする．このとき，$f\in W_0^{s,p}(\Omega;\mathbb{R})$ であることは，$f\in W^{s,p}(\Omega;\mathbb{R})$ でかつ

$$\gamma f=\gamma\partial_\nu f=\cdots=\gamma\partial_\nu^l f=0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

を満たすことと同値である． □

定理 4.4.3 より，$H_0^1(\Omega;\mathbb{R})=W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R})$ は，

$$H_0^1(\Omega;\mathbb{R})=\left\{u\in H^1(\Omega;\mathbb{R}) \mid u=0 \text{ on } \partial\Omega\right\}$$

のように定義される．この関数空間は，第 5 章以降で，境界上でゼロとなる条件 (同次 Dirichlet 条件) が課された偏微分方程式の境界値問題の解を考えるときに使われる．$H_0^1(\Omega;\mathbb{R})$ は $H^1(\Omega;\mathbb{R})$ の部分線形空間で，実 Hilbert 空間となる．このとき，内積とノルムは $H^1(\Omega;\mathbb{R})$ と同じものが使われる．

4.4.3 Calderón の拡張定理

さらに，第 9 章でとりあげられる領域変動型の形状最適化問題では，偏微分方程式の境界値問題が定義された領域そのものが変動することが仮定される．そのために，境界値問題を定義する際に使用される既知関数や解関数は，変動したあとの領域でも定義されるような関数空間の要素である必要がある．そこで，関数の定義域を有界領域 Ω から $\mathbb{R}^d$ に拡張する際に，次の Calderón の拡張定理が使われる．そこで存在が保証される有界線形作用素は拡張作用素とよばれる (たとえば，[1, 定理 5.28, p. 156])．

定理 4.4.4 (Calderón の拡張定理) $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を Lipschitz 領域とする．このとき，任意の $k \in \{1, 2, \cdots\}$ と $p \in (1, \infty)$ に対して有界線形作用素

$$e_\Omega : W^{k,p}(\Omega; \mathbb{R}) \to W^{k,p}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$$

が存在し，任意の $u \in W^{k,p}(\Omega; \mathbb{R})$ に対して

$$e_\Omega(u) = u \quad \text{in } \Omega,$$
$$\|e_\Omega(u)\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})} \leq c \|u\|_{W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})}$$

が成り立つ．ただし，c は k と p に依存した定数である． □

定理 4.4.4 の $W^{k,p}(\Omega; \mathbb{R})$ において $k \geq 1$ であることに注意されたい．

4.4.4　有界双線形作用素

さらに，双線形性を備えた作用素も定義される．X, Y, Z を K 上の Banach 空間とする．任意の $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X$, $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in Y$, $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ に対して，写像 $f : X \times Y \to Z$ が

$$f(\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_1) = \alpha_1 f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1) + \alpha_2 f(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_1),$$
$$f(\boldsymbol{x}_1, \alpha_1 \boldsymbol{y}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{y}_2) = \alpha_1 f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1) + \alpha_2 f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_2)$$

を満たすとき，f は双線形作用素あるいは双 1 次形式とよばれる．

さらに，任意の $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in X \times Y$ に対して，

$$\sup_{\boldsymbol{x} \in X \setminus \{\boldsymbol{0}_X\},\ \boldsymbol{y} \in Y \setminus \{\boldsymbol{0}_Y\}} \frac{\|f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\|_Z}{\|\boldsymbol{x}\|_X \|\boldsymbol{y}\|_Y} < \infty$$

が満たされるとき，f は有界双線形作用素とよばれる．本書では，$X \times Y$ から Z への有界線形作用素の全体集合を $\mathcal{L}(X, Y; Z)$ とかくことにする．

有界双線形作用素の例として，式 (4.1.1) で使われた運動エネルギー $\kappa(u, \dot{u})$ や式 (4.1.8) で使われた弾性ポテンシャルエネルギー $\pi_{\mathrm{I}}(u)$ などが挙げられる．$\kappa(u, \dot{u})$ は，後に u に対する双線形に注目して，式 (4.6.10) で定義される $b(u, v)$ を使って $b(\dot{u}, \dot{u})$ とかかれる．$\pi_{\mathrm{I}}(u)$ は，後に u に対する双線形に注目して，式 (4.6.17) で定義される $a(u, v)$ を使って $a(u, u)$ とかかれる．これらは有界双線形作用素であるが，値域が $\mathbb{R}$ となる作用素である．このような作用素は，次項で定義される汎関数となる．そこで，$b(\cdot, \cdot)$ や $a(\cdot, \cdot)$ は有界双線形汎関数の例になっている．

4.4.5 有界線形汎関数

作用素の中でも値域が $\mathbb{R}$ (あるいは $\mathbb{C}$) のものを汎関数という．関数最適化問題では，評価関数は関数空間から実数への写像として与えられることになる．そこで，汎関数の性質を知っておくことは評価関数の性質を知ることになる．

汎関数の線形性と有界性は式 (4.4.1) と式 (4.4.2) において $Y=\mathbb{R}$ とおいた関係によって定義される．しかし，ここでは $f(\cdot)=\langle \boldsymbol{\phi}, \cdot \rangle : X \to \mathbb{R}$ とかくことにして，有界線形汎関数を次のように定義する．X を K 上の Banach 空間とする．任意の $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X$, $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ に対して，汎関数 $\langle \boldsymbol{\phi}, \cdot \rangle : X \to \mathbb{R}$ が

$$\langle \boldsymbol{\phi}, \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 \rangle = \alpha_1 \langle \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{x}_1 \rangle + \alpha_2 \langle \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{x}_2 \rangle$$

を満たすとき，$\langle \boldsymbol{\phi}, \cdot \rangle$ を X 上の線形汎関数という．さらに，

$$\sup_{\boldsymbol{x} \in X \setminus \{\boldsymbol{0}_X\}} \frac{|\langle \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{x} \rangle|}{\|\boldsymbol{x}\|_X} < \infty$$

が満たされるとき，$\langle \boldsymbol{\phi}, \cdot \rangle$ を X 上の有界線形汎関数という．

X が有限次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^d$ ならば，$\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^d$ を選んで固定し，それによって構成された内積を表す汎関数 $(\boldsymbol{\phi}, \cdot)_{\mathbb{R}^d} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を考えれば，それは $X=\mathbb{R}^d$ 上の有界線形汎関数となる．

4.4.6 双対空間

X が有限次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^d$ ならば，$X=\mathbb{R}^d$ 上の有界線形汎関数 $(\boldsymbol{\phi}, \cdot)_{\mathbb{R}^d}$ を選ぶことは $\mathbb{R}^d$ 上の要素 $\boldsymbol{\phi}$ を選ぶことと同値であった．ここで，有界線形汎関数と同一視したときの $\boldsymbol{\phi}$ 全体の集合 $\mathbb{R}^d$ を，X とは区別して，X の双対空間とよぶことにして，$X'=\mathbb{R}^d$ とかくことにする．このことを一般化して，双対空間なるものが次のように定義される．

定義 4.4.5 (双対空間) X を Banach 空間とするとき，X 上の有界線形汎関数全体の集合 $\mathcal{L}(X;\mathbb{R})$ を X' とかいて，X の双対空間という．また，$\langle \cdot, \cdot \rangle : X' \times X \to \mathbb{R}$ を $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X' \times X}$ ともかいて，双対積という． □

定義 4.4.5 の双対空間は共役空間あるいは随伴空間などともよばれることがある．

この定義に基づけば，Banach 空間の双対空間は有界線形作用素の全体集合 $\mathcal{L}(X;\mathbb{R})$ であることから，命題 4.4.1 より，

$$\|\boldsymbol{\phi}\|_{X'} = \sup_{\boldsymbol{x} \in X \setminus \{\boldsymbol{0}_X\}} \frac{|\langle \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{x} \rangle|}{\|\boldsymbol{x}\|_X} \tag{4.4.4}$$

をノルムとする Banach 空間になる．

弱完備と汎弱完備

ここまでの議論で，Banach 空間のみならず，その双対空間も式 (4.4.4) のようなノルムに対して Banach 空間 (完備なノルム空間) になることがわかった．すなわち，それぞれのノルムで測った Cauchy 列は必ず収束することを意味する．有限次元ベクトル空間の場合は，その双対空間も同じ有限次元ベクトル空間であったので，収束を同じノルムで測ればよかった．しかし，Banach 空間とその双対空間では一般にノルムの定義が異なる．そのために，ノルムを使った収束の他に別の収束も定義することが可能になる．ここでは，双対積を使った収束を定義しよう．

定義 4.4.6 (弱収束) X を Banach 空間，X' をその双対空間とする．任意の $\boldsymbol{\phi} \in X'$ に対して，無限点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X$ が

$$\lim_{n,m\to\infty} \langle \boldsymbol{\phi}, x_n - x_m \rangle = 0$$

を満たすとき，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を弱 Cauchy 列という．弱 Cauchy 列の収束を弱収束といい，$x_n \to x$ weakly in X とかく．X のいかなる弱 Cauchy 列も X 内の点に収束するとき，X は弱完備であるという．さらに，弱完備な X の部分集合 V の任意の無限点列が V の中に弱収束する部分無限点列を含むとき，V は弱コンパクトであるという． □

なお，ノルムに関する収束を強収束といい，$x_n \to x$ strongly in X とかく．また，Banach 空間とその双対空間の役割を逆にすれば，もう一つの収束の定義が可能である．

定義 4.4.7 (汎弱収束) X を Banach 空間，X' をその双対空間とする．任意の $\boldsymbol{x} \in X$ に対して，無限点列 $\{\boldsymbol{\phi}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X'$ が

$$\lim_{n,m\to\infty} \langle \boldsymbol{\phi}_n - \boldsymbol{\phi}_m, \boldsymbol{x} \rangle = 0$$

を満たすとき，$\{\boldsymbol{\phi}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X'$ を汎弱 Cauchy 列という．汎弱 Cauchy 列の収束を汎弱収束といい，$\boldsymbol{\phi}_n \to \boldsymbol{\phi}$ $*$-weakly in X' とかく．X' のいかなる汎弱 Cauchy 列も X' 内の点に収束するとき，X' は汎弱完備であるという．さらに，汎弱完備な X' の部分集合 V' の任意の無限点列が V' の中に汎弱収束する部分無限点列を含むとき，V' は汎弱コンパクトであるという． □

あとで示されるように，関数最適化問題における評価関数の Fréchet 微分は双対積を用いて定義される．弱完備性と汎弱完備性は，評価関数の Fréchet 微分を用いて最小点をみつける際に必要となる性質である．

Banach 空間が弱完備性をもつことが保証される条件について考えてみよう．そのために，反射的 Banach 空間を次のように定義する．

定義 4.4.8 (反射的 Banach 空間) X を Banach 空間とする．X' と $X'' = (X')'$ を X の双対空間と第 2 双対空間とする．すべての $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}) \in X \times X'$ に対して

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x}) \rangle_{X' \times X''} = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{x} \rangle_{X' \times X}$$

が成り立つような自然な埋め込み $\boldsymbol{\tau} : X \to X''$ ($\boldsymbol{x} \in X$ は $\boldsymbol{f} \in X'$ に対してスカラーを定める) が全単射のとき，X を反射的 Banach 空間あるいは回帰的 Banach 空間という．□

反射的 Banach 空間に対して次の結果が得られる (たとえば，[9, 定理 8.33, p. 193])．

命題 4.4.9 (弱完備) 反射的 Banach 空間は弱完備である．□

命題 4.4.9 により，反射的 Banach 空間上であれば，弱 Cauchy 列あるいは汎弱 Cauchy 列は必ずその空間の要素に収束することが保証される．Sobolev 空間は Banach 空間である (命題 4.3.11) が，Sobolev 空間の反射性について次の結果が得られる (たとえば，[10, 定理 2.25, p. 41])．

命題 4.4.10 (Sobolev 空間の可分性と反射性) Ω は $d \in \{1, 2, \cdots\}$ 次元の領域とする．$p \in (1, \infty)$ ($[1, \infty]$ ではないことに注意) および $k \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ のとき，$W^{k,p}(\Omega; \mathbb{R})$ および $W_0^{k,p}(\Omega; \mathbb{R})$ は反射的となる．□

$H^k(\Omega; \mathbb{R})$ は，$p = 2$ のときの Sobolev 空間なので，反射的 Banach 空間の一つである．したがって，命題 4.4.10 により，$H^k(\Omega; \mathbb{R})$ は弱完備であることになる．一方，$L^1(\Omega; \mathbb{R})$ や $L^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ は反射的ではないことから，弱完備ではないことになる．

また，Banach 空間のコンパクト性に関しては，次のことが知られている．無限次元空間の単位球はコンパクトではない．なぜならば，基底ベクトルが $(1, 0, 0, \ldots)$, $(0, 1, 0, \ldots)$, $\ldots$ のように無限個とれて，Cauchy 列を含まない無限点列がつくれるからである (たとえば，[13, 1.2.1 項, p. 15])．しかし，次の結果が知られている (たとえば，[9, 定理 8.36, p. 194])．

命題 4.4.11 (弱コンパクト) 反射的 Banach 空間の閉単位球は弱コンパクトである．□

Sobolev 空間の双対空間

また，Sobolev 空間の双対空間に関しては，次に示されるような明快な結果が得られる．まず，$L^p(\Omega;\mathbb{R})$ の指数 p に対して，双対指数 q を次のように定義する．

定義 4.4.12 (双対指数) $p \in [1,\infty)$ に対して，

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$$

を満たす $q \in [1,\infty]$ を双対指数という．また，$L^p(\Omega;\mathbb{R})$ に対して，$L^q(\Omega;\mathbb{R})$ を $L^p(\Omega;\mathbb{R})$ の双対空間といい，$(L^p(\Omega;\mathbb{R}))'$ とかく． □

双対指数を用いて，$k \geq 1$ のときの Sobolev 空間 $W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})$ の双対空間がどのように定義されるのかをみておこう．まず，$\Omega=(0,1)$ として，$H^1((0,1);\mathbb{R})$ の双対空間 $\left(H^1((0,1);\mathbb{R})\right)'$ について考えてみよう．任意の $f \in \left(H^1((0,1);\mathbb{R})\right)'$ を選んだとき，f は任意の $v \in H^1((0,1);\mathbb{R})$ に対する有界線形汎関数となる．後で示される Riesz の表現定理 (定理 4.4.17) によれば，任意の $v \in H^1((0,1);\mathbb{R})$ に対して

$$\langle f,v\rangle=(u,v)_{H^1((0,1);\mathbb{R})}=\int_0^1 (uv+u'v')\,\mathrm{d}x \tag{4.4.5}$$

を満たす $u \in H^1((0,1);\mathbb{R})$ が一意に存在する．そこで，

$$\langle f,v\rangle=f(v)=\int_0^1 (f_0 v+f_1 v')\,\mathrm{d}x \tag{4.4.6}$$

を満たす $f_0, f_1 \in L^2((0,1);\mathbb{R})$ が存在することになる．f のノルムは

$$\|f\|_{(H^1((0,1);\mathbb{R}))'}=\sup_{v\in H^1((0,1);\mathbb{R})}\frac{|\langle f,v\rangle|}{\|v\|_{H^1((0,1);\mathbb{R})}}$$

によって定義される．ここで，Schwarz の不等式 (定理 A.9.1 参照) より

$$\begin{aligned}|\langle f,v\rangle|&=\left|\int_0^1 (f_0 v+f_1 v')\,\mathrm{d}x\right|\\&\leq\left(\|f_0\|_{L^2((0,1);\mathbb{R})}+\|f_1\|_{L^2((0,1);\mathbb{R})}\right)\|v\|_{H^1((0,1);\mathbb{R})}\end{aligned}$$

が成り立つことを考えれば，

$$\begin{aligned}&\|f\|_{(H^1((0,1);\mathbb{R}))'}\\&\quad=\inf_{f_0,f_1\in L^2((0,1);\mathbb{R})}\left\{\|f_0\|_{L^2((0,1);\mathbb{R})}+\|f_1\|_{L^2((0,1);\mathbb{R})}\;\middle|\;\text{式 (4.4.6)}\right\}\end{aligned}$$

が成り立つことが予想される．

これを一般化すれば，次のようになる (たとえば，[1, 3.8 Theorem and 3.9 Theorem, p. 62], [10, 定理 2.20 および 定理 2.21, p. 38])．

命題 4.4.13 ($W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})$ の双対空間) Ω は $d \in \{1, 2, \cdots\}$ 次元の領域とする．$k \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ および $p \in [1, \infty)$ とする．q を p に対する双対指数とする．$W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})$ の双対空間を $\left(W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})\right)'$ とする．任意の $f \in \left(W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})\right)'$ を選んだとき，任意の $v \in W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})$ に対して，

$$f(v) = \sum_{|\boldsymbol{\beta}| \leq k} \int_\Omega \nabla^{\boldsymbol{\beta}} v f_{\boldsymbol{\beta}} \, \mathrm{d}x \tag{4.4.7}$$

を満たす $f_{\boldsymbol{\beta}} \in L^q(\Omega;\mathbb{R})$ が存在する．さらに，

$$\|f\|_{(W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R}))'} = \inf_{f_{\boldsymbol{\beta}} \in L^q(\Omega;\mathbb{R}),\ |\boldsymbol{\beta}| \leq k} \left\{ \sum_{|\boldsymbol{\beta}| \leq k} \|f_{\boldsymbol{\beta}}\|_{L^q(\Omega;\mathbb{R})} \;\middle|\; \text{式 (4.4.7)} \right\}$$

が成り立つ． □

命題 4.4.13 では，$p = \infty$ を除いている．$L^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ の双対空間については，文献 [14, Example 5, p. 118] に説明がある．

また，Sobolev 空間 $W_0^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})$ の双対空間に関しては次の結果が得られるここで，$f_{\boldsymbol{\beta}}$ を命題 4.4.13 によって存在がいえた $L^q(\Omega;\mathbb{R})$ の要素とする．関数 g と $g_{\boldsymbol{\beta}}$ は任意の $\phi \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ に対して，

$$g(\phi) = \sum_{|\boldsymbol{\beta}| \leq k} (-1)^{|\boldsymbol{\beta}|} \nabla^{\boldsymbol{\beta}} g_{\boldsymbol{\beta}}(\phi), \quad g_{\boldsymbol{\beta}}(\phi) = \int_\Omega \phi f_{\boldsymbol{\beta}} \, \mathrm{d}x \quad \text{for } |\boldsymbol{\beta}| \leq k \tag{4.4.8}$$

を満たす $(C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}))'$ の要素とする．このとき，任意の $\phi \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ に対して，

$$\nabla^{\boldsymbol{\beta}} g_{\boldsymbol{\beta}}(\phi) = (-1)^{|\boldsymbol{\beta}|} \int_\Omega \nabla^{\boldsymbol{\beta}} \phi f_{\boldsymbol{\beta}} \, \mathrm{d}x$$

となることから，

$$g(\phi) = \sum_{|\boldsymbol{\beta}| \leq k} g_{\boldsymbol{\beta}}\left(\nabla^{\boldsymbol{\beta}} \phi\right) = f(\phi)$$

が得られることになる．ここで，式 (4.4.7) が使われた．この結果は，$f \in \left(W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})\right)'$ が Schwartz の超関数 $g \in (C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}))'$ における $C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ を $W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})$ に拡張した関数になっていることを示している．その結果，$C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}) \subset W_0^{k,p}(\Omega;\mathbb{R}) \subset W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})$ の埋蔵関係に対して，それらの双対空間の埋蔵関係は $\left(W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})\right)' \subset \left(W_0^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})\right)' \subset (C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}))'$ となることに注意されたい (演習問題 **4.4**)．

これらの関係から，次の結果が得られる (たとえば，[1, 3.12 Theorem, p. 64], [10, 定理 2.3, p. 40]，$\left(H_0^1(\Omega;\mathbb{R})\right)'$ に対して [4, Theorem 1, p. 283], [13, 例 3.4, p. 80])．

命題 4.4.14 ($W_0^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})$ の双対空間) Ω は $d \in \{1, 2, \cdots\}$ 次元の領域とする．$k \in \{1, 2, \cdots\}$ および $p \in [0, \infty)$ とする．$v_{\boldsymbol{\beta}} \in L^q(\Omega;\mathbb{R})$ を命題 4.4.13 によって存在がいえた $L^q(\Omega;\mathbb{R})$ の要素とする．$W_0^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})$ の双対空間を $\left(W_0^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})\right)'$ とする．このとき，$g \in \left(W_0^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})\right)'$ は Schwartz の超関数 $g \in (C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}))'$ の意味で，式 (4.4.8) によって一意に与えられる．さらに，

$$\|g\|_{\left(W_0^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})\right)'} = \inf_{g_{\boldsymbol{\beta}} \in L^q(\Omega;\mathbb{R}), |\boldsymbol{\beta}| \le k} \left\{ \sum_{|\boldsymbol{\beta}| \le k} \|g_{\boldsymbol{\beta}}\|_{L^q(\Omega;\mathbb{R})} \;\middle|\; \text{式 (4.4.8)} \right\}$$

が成り立つ． □

命題 4.4.14 から，$\left(W_0^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})\right)'$ の要素は，Schwartz の超関数の意味で定義され，k 階積分 (微分でないことに注意) の q 乗可積分性をもつ関数となる．このことから，$\left(W_0^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})\right)'$ は $W^{-k,q}(\Omega;\mathbb{R})$ ともかかれる．また，命題 4.4.14 では $k = 0$ の場合を除いているが，定義 4.3.10 において $W_0^{0,p}(\Omega;\mathbb{R}) = L^p(\Omega;\mathbb{R})$ と定義されていたためである．

4.4.7 Rellich-Kondrachov のコンパクト埋蔵定理

Sobolev の埋蔵定理 (定理 4.3.14) で与えられた Sobolev 空間の埋蔵関係をコンパクト性を備えた埋蔵関係にかきかえた結果は，Rellich-Kondrachov のコンパクト埋蔵定理とよばれる．ここで，Banach 空間 X が Banach 空間 Y にコンパクトに埋蔵されるとは，

(1) 任意の $\phi \in Y$ に対して，$\|\phi\|_Y \le c \|\phi\|_X$ が成り立つような $c > 0$ が存在すること，

(2) X の任意の有界な無限点列が，Y のノルムで Y に収束する部分列を含むこと (X は相対コンパクト)

によって定義される．このとき，$X \Subset Y$ のようにかかれる．したがって，X が弱完備ならば，X は Y のノルム $\|\cdot\|_Y$ で完備になる．

このとき，次の結果が得られている (たとえば，[1, 6.3 Theorem, p. 168], [10, 第 7 章, p. 153])．

定理 4.4.15 (Rellich-Kondrachov のコンパクト埋蔵定理) Ω は $d \in \{1, 2, \cdots\}$ 次元の領域とする．$k \in \{1, 2, \cdots\}$, $j \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ および $p \in [1, \infty)$ に対して，

(1) $k-d/p<0$ のとき，$p^*=d/\{(d/p)-k\}$ を用いて，

$$W^{k+j,p}(\Omega;\mathbb{R}) \Subset W^{j,q}(\Omega;\mathbb{R}) \quad \text{for } q\in[1,p^*), \tag{4.4.9}$$

(2) $k-d/p=0$ のとき，

$$W^{k+j,p}(\Omega;\mathbb{R}) \Subset W^{j,q}(\Omega;\mathbb{R}) \quad \text{for } q\in[1,\infty), \tag{4.4.10}$$

(3) $k-d/p=j+\sigma>0$ $(\sigma\in(0,1))$ のとき，あるいは $k=d$ かつ $p=1$ のとき，

$$W^{k+j,p}(\Omega;\mathbb{R}) \Subset W^{j,q}(\Omega;\mathbb{R}) \quad \text{for } q\in[p,\infty), \tag{4.4.11}$$

が成り立つ．さらに，Ω が Lipschitz 領域ならば，

(4) $k-d/p=j+\sigma>0$ $(\sigma\in(0,1))$ のとき，あるいは $k=d$ かつ $p=1$ のとき，

$$W^{k+j,p}(\Omega;\mathbb{R}) \Subset C^{j,\lambda}\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}\right) \quad \text{for } \lambda\in(0,\sigma], \tag{4.4.12}$$

が成り立つ． □

Sobolev の埋蔵定理 (定理 4.3.14) と Rellich-Kondrachov のコンパクト埋蔵定理 (定理 4.4.15) を比較すれば，式 (4.3.16) において $q\in[p,p^*]$ であった条件が式 (4.4.9) では $q\in[1,p^*)$ となっている点が異なっている．

定理 4.4.15 に基づけば，$H^k(\Omega;\mathbb{R})$ の完備性について次の結果が得られる

命題 4.4.16 ($H^k(\Omega;\mathbb{R})$ の $H^{k-1}(\Omega;\mathbb{R})$ における完備性) $H^k(\Omega;\mathbb{R})$ $(k\in\{1,2,\dots\})$ における任意の無限点列は，$H^{k-1}(\Omega;\mathbb{R})$ の中に $\|\cdot\|_{H^{k-1}(\Omega;\mathbb{R})}$ を用いて強収束する部分無限点列を含む． □

命題 4.4.16 の結果は，第 7 章以降で示される関数空間上で定義された最適設計問題と次のように関連する．第 8 章と第 9 章で示される形状最適化問題では，設計変数が入る線形空間 X を $H^1(\Omega;\mathbb{R})$ や $H^1\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)$ と仮定して，許容集合 $\mathcal{D}$ を $H^2(\Omega;\mathbb{R})$ や $H^2\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)$ と仮定する．このとき，勾配法や Newton 法によって $\mathcal{D}$ に入るような試行点を更新していけば，その点列は $\mathcal{D}$ 上の無限点列になる．その収束性について考えたとき，命題 4.4.16 は，X のノルムで測れば，強収束する部分無限点列の存在が保証されることを表している．

4.4.8　Riesz の表現定理

4.4 節の最後に，楕円型偏微分方程式の境界値問題 (定義 A.7.1) に対する解の一意存在を示す際に使われる Riesz の表現定理を示しておくことにしよう (たとえば，[1, 1.12 Theorem, p. 6], [13, 定理 3.6, p. 79])．

定理 4.4.17 (Riesz の表現定理) X を Hilbert 空間，X' を X の双対空間，$(\cdot, \cdot)_X$ を X 上の内積，$\langle \cdot, \cdot \rangle_{X' \times X}$ を双対積とする．$\boldsymbol{\phi} \in X'$ に対して，ある $\boldsymbol{x} \in X$ が一意に存在して，任意の $\boldsymbol{y} \in X$ に対して

$$\langle \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{y} \rangle_{X' \times X} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_X, \quad \|\boldsymbol{\phi}\|_{X'} = \|\boldsymbol{x}\|_X$$

が成り立つ．また，

$$\langle \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{y} \rangle_{X' \times X} = (\boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{y})_X, \quad \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathcal{L}(X'; X)} = 1$$

を満たす同型写像 $\boldsymbol{\tau} : X' \to X$ が存在する． □

X が有限次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^d$ のときには，双対積は内積と一致し，$X' = X$ となり，$\boldsymbol{\tau}$ は恒等写像となる．

定理 4.4.17 で存在することがいえた同型写像 $\boldsymbol{\tau}$ をもちいれば，Hilbert 空間 X の双対空間 X' における内積を $(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\varphi})_{X'} = (\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\varphi})_X$ のように定義することができる．この内積をもちいれば，X' も Hilbert 空間となる．

Riesz の表現定理は，第 5 章において Lax-Milgram の定理 (定理 5.2.4) にかきかえられ，第 5 章や第 7 章以降において使われる．

4.5　一般化微分

4.4 節では，Banach 空間上の有界線形作用素と有界線形汎関数を定義して，有界線形汎関数全体の集合が双対空間になることをみてきた．この節では，その関係を用いて，作用素や汎関数に対する微分の定義を示しておきたい．ここでは，方向微分ともよばれる Gâteaux 微分の定義を示してから，勾配が定義されるような Fréchet 微分の定義を示すことにする．特に，汎関数に対する Fréchet 微分では，勾配が変動ベクトルの Banach 空間に対する双対空間の要素として定義される．この関係は，第 2 章でみてきたような評価関数の微分をもちいた最適化理論や第 3 章でみてきたような勾配法を関数最適化問題に対して適用する際に不可欠な関係となる．

4.5.1 Gâteaux 微分

まず，緩やかな条件のもとで定義される Gâteaux 微分からみていくことにしよう．この節では，X と Y を Banach 空間と仮定して，関数 (作用素) は X から Y への写像として与えられているものとみなす．

定義 4.5.1 (k 階の Gâteaux 微分) X と Y を $\mathbb{R}$ 上の Banach 空間とする．$\boldsymbol{x} \in X$ の近傍 (開集合) $B \subset X$ 上で，$f : B \to Y$ が定義されているとする．$\boldsymbol{y} \in X$ を変動ベクトルに選び固定する．$k \in \mathbb{N}$ とする．任意の $\epsilon \in \mathbb{R}$ に対して，写像 $\epsilon \mapsto f(\boldsymbol{x} + \epsilon \boldsymbol{y})$ が $C^k(\mathbb{R}; Y)$ の要素であるとき，

$$f^{(k)}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{y}] = \left. \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\epsilon^k} f(\boldsymbol{x} + \epsilon \boldsymbol{y}) \right|_{\epsilon = 0}$$

を f の $\boldsymbol{x}$ における $\boldsymbol{y}$ 方向に対する k 階の Gâteaux 微分という． □

Gâteaux 微分の定義に関しては，定義 4.5.1 とは異なった定義が使われることがある．それらの定義から有益な結果が導き出される場合にはそれらを使うことに意味がある．しかし，本書では Gâteaux 微分を使った本格的な議論をしないことから，これ以上踏み込まないことにする．

変分問題 4.1.1 の f に対して Gâteaux 微分の定義を適用してみよう．

例題 4.5.2 (拡張作用積分の Gâteaux 微分) 問題 4.1.1 で定義された拡張作用積分

$$f(u) = \int_0^{t_{\mathrm{T}}} l(u)\, \mathrm{d}t - m\beta u(t_{\mathrm{T}})$$

の Gâteaux 微分と 2 階の Gâteaux 微分を示せ． □

解答 問題 4.1.1 では $u(0) = \alpha$ を満たす関数 u の集合を U とかき，$v(0) = 0$ を満たす関数 v の集合を V とかいた．U は線形空間ではなく，V は線形空間になる．そこで，定義 4.5.1 の Banach 空間 X には V を選ぶことにして $X = \left\{ v \in H^1((0, t_{\mathrm{T}}); \mathbb{R}) \;\middle|\; v(0) = 0 \right\}$ とおく (4.6.1 項で解説される)．このとき，$u \in U$ を求める問題は，$u_0 \in U$ を一つ選んで固定して，$u - u_0 \in V$ を求める問題とみなすことにする．また，値域の Banach 空間 Y には $\mathbb{R}$ がおかれる．

これらの仮定のもとで，固定された変動ベクトルを $v \in X$ として，この方向の Gâteaux 微分を求めてみる．定義 4.5.1 より，任意の $\epsilon \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} f(u + \epsilon v) = &\int_0^t \left\{ \frac{1}{2} m (\dot{u} + \epsilon \dot{v})^2 - \frac{1}{2} k (u + \epsilon v)^2 + p(u + \epsilon v) \right\} \mathrm{d}t \\ &- m\beta (u(t) + \epsilon v(t)) \end{aligned}$$

とおく．このとき，Gâteaux 微分は

$$f^{(1)}(u)[v] = f'(u)[v] = \left. \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\epsilon} \right|_{\epsilon = 0}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\int_0^t \left\{ m \left(\dot{u} + \epsilon \dot{v} \right) \dot{v} - k \left(u + \epsilon v \right) v + p v \right\} \mathrm{d}t - m\beta v \left(t \right) \right] \Bigg|_{\epsilon=0} \\
&= \int_0^t \left(m \dot{u} \dot{v} - k u v + p v \right) \mathrm{d}t - m\beta v \left(t \right)
\end{aligned}
$$

となる．この式は式 (4.1.4) の $f'(u)[v]$ と一致する．しかし，式 (4.1.4) の $f'(u)[v]$ は任意の $v \in X$ に対して示されていた．また，2 階の Gâteaux 微分は

$$
f^{(2)}(u)[v] = f''(u)[v] = \left. \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\epsilon^2} \right|_{\epsilon=0} = \int_0^t \left(m \dot{v}^2 - k v^2 \right) \mathrm{d}t
$$

となる．この式は式 (4.1.4) の $f''(u)[v]$ と一致する．ここでも式 (4.1.4) の $f''(u)[v]$ とは $v \in X$ が固定されている点で異なっている． □

次に，Gâteaux 微分は可能であるが，次項に示される Fréchet 微分は可能ではない例をみておこう．

例題 4.5.3 (Gâteaux 微分のみ可能な例) 2 次元空間上の関数

$$
f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \dfrac{x_1^3}{x_1^2 + x_2^2} & \text{for } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^2} \\ 0 \quad \text{for } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^2} \end{cases}
$$

の $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^2}$ における Gâteaux 微分を示せ． □

解答　$f(\boldsymbol{x})$ の $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^2}$ における Gâteaux 微分は

$$
f'(\boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^2})[\boldsymbol{y}] = \begin{cases} \dfrac{y_1^3}{y_1^2 + y_2^2} & \text{for } \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^2} \\ 0 \quad \text{for } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^2} \end{cases}
$$

となる．$f'(\boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^2})[\boldsymbol{y}]$ は $\boldsymbol{y}$ に対して連続であるが，非線形である． □

4.5.2　Fréchet 微分

Gâteaux 微分は変動ベクトルの方向が指定された下で，その大きさに対する導関数として定義された．しかし，本書で必要とされる微分は勾配が定義されるような微分である．すなわち，汎関数の微分が任意の変動ベクトルと勾配の双対積で与えられるような微分である．次に示される Fréchet 微分は，汎関数に限定されずに，Banach 空間から Banach 空間への作用素の微分として一般化された微分の定義である．

定義 4.5.4 (k 階の Fréchet 微分) X と Y を $\mathbb{R}$ 上の Banach 空間とする．$\boldsymbol{x} \in X$ の近傍 $B \subset X$ 上で $f : B \to Y$ が定義されているとする．任意の変動ベクトル $\boldsymbol{y}_1 \in X$ に対して，

$$\lim_{\|\boldsymbol{y}_1\|_X \to 0} \frac{\|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}_1) - f(\boldsymbol{x}) - f'(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{y}_1]\|_Y}{\|\boldsymbol{y}_1\|_X} = 0 \tag{4.5.1}$$

を満たす有界線形作用素 $f'(\boldsymbol{x})[\,\cdot\,] \in \mathcal{L}(X;Y)$ が存在するとき，$f'(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{y}_1]$ を f の $\boldsymbol{x}$ における Fréchet 微分という．すべての $\boldsymbol{x} \in B$ に対して $f'(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{y}_1]$ が存在して $C(B;\mathcal{L}(X;Y))$ に属するとき，$f \in C^1(B;Y)$ とかく．

さらに，任意の $\boldsymbol{y}_2 \in X$ に対して，

$$\lim_{\|\boldsymbol{y}_2\|_X \to \boldsymbol{0}_X} \frac{\|f'(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}_2)[\boldsymbol{y}_1] - f'(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{y}_1] - f''(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2]\|_Y}{\|\boldsymbol{y}_2\|_X} = 0$$

を満たす $f''(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{y}_1,\,\cdot\,] \in \mathcal{L}(X;\mathcal{L}(X;Y))$ が存在するとき，$f''(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2]$ を f の $\boldsymbol{x}$ における 2 階の Fréchet 微分という．$\mathcal{L}(X;\mathcal{L}(X;Y))$ を $\mathcal{L}^2(X \times X;Y)$ とかく．また，すべての $\boldsymbol{x} \in B$ に対して，2 階の Fréchet 微分が存在して，$f''(\boldsymbol{x})[\,\cdot\,,\,\cdot\,] \in C(B;\mathcal{L}(X;\mathcal{L}(X;Y)))$ のとき，$f \in C^2(B;Y)$ とかく．同様に，$k \in \{3,4,\cdots\}$ 階の Fréchet 微分 $f^{(k)}$ も定義され，$f \in C^k(B;Y)$ とかく． □

定義 4.5.4 で使われた式 (4.5.1) は，

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}_1) = f(\boldsymbol{x}) + f'(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{y}_1] + o(\|\boldsymbol{y}_1\|_X)$$

のような Taylor 展開による表示が可能になる．ここで，$o(\|\boldsymbol{y}_1\|_X)$ は Bachmann-Landau の small-o 記号とよばれ，

$$\lim_{\|\boldsymbol{y}_1\|_X \to 0} \frac{o(\|\boldsymbol{y}_1\|_X)}{\|\boldsymbol{y}_1\|_X} = \boldsymbol{0}_Y$$

が成り立つと仮定される．

また，定義 4.5.4 において，$Y = \mathbb{R}$ ならば，$f : B \to \mathbb{R}$ は汎関数になる．このとき，f の Fréchet 微分は

$$f'(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{y}] = \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{y} \rangle_{X' \times X} \tag{4.5.2}$$

のようにかくことができる．このとき，$\boldsymbol{g} \in X'$ は勾配とよばれる．さらに，

$$f''(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2] = h(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2] \tag{4.5.3}$$

のようにかいて，$h(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{L}^2(X \times X;\mathbb{R})$ を $\boldsymbol{x}$ における f の Hesse 形式とよぶことにする．

ここでも，変分問題 4.1.1 における f の第 1 変分と第 2 変分を Fréchet 微分の定義に従ってみなおしてみよう．

例題 4.5.5 (拡張作用積分の Fréchet 微分) 問題 4.1.1 で定義された拡張作用積分

$$f\left(u\right)=\int_{0}^{t_{\mathrm{T}}}l\left(u\right)\,\mathrm{d}t-m\beta u\left(t_{\mathrm{T}}\right)$$

の Fréchet 微分と 2 階の Fréchet 微分を求めよ．ただし，$u\left(0\right)=\alpha$ とする． □

解答 $X=\left\{v\in H^{1}\left(\left(0,t_{\mathrm{T}}\right);\mathbb{R}\right)\,\middle|\,v\left(0\right)=0\right\}$, $Y=\mathbb{R}$ とおく．式 (4.1.5) の $f'\left(u\right)\left[v\right]$ は $\mathcal{L}\left(X;Y\right)$ に入る (4.6.1 項で解説される)．したがって，任意の $v_1\in X$ に対する $f'\left(u\right)\left[v_1\right]$ を Fréchet 微分とみなすことができて，$f'\left(u\right)\left[v_1\right]=\left\langle g,v_1\right\rangle_{X'\times X}$ のようにかくことができる．このとき，$g\in X'$ が勾配となる．

次に，$f'\left(u\right)\left[v_1\right]$ において v_1 を固定して，u に任意の変動 $v_2\in X$ が加わったとき，

$$\begin{aligned}
f'\left(u+v_2\right)\left[v_1\right]&=\int_{0}^{t_{\mathrm{T}}}\left\{m\left(\dot{u}+\dot{v}_2\right)\dot{v}_1-k\left(u+v_2\right)v_1+pv_1\right\}\mathrm{d}t-m\beta v_1\left(t_{\mathrm{T}}\right)\\
&=f'\left(u\right)\left[v_1\right]+\int_{0}^{t_{\mathrm{T}}}\left(m\dot{v}_1\dot{v}_2-kv_1v_2\right)\mathrm{d}t\\
&=f'\left(u\right)\left[v_1\right]+f''\left(u\right)\left[v_1,v_2\right]
\end{aligned}$$

が得られる．これより，$f''\left(u\right)\left[v_1,v_2\right]$ は式 (4.1.4) の $f''\left(u\right)\left[v,v\right]$ と一致する． □

式 (4.5.2) で定義された勾配 $\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}\right)$ は双対空間 X' の要素となる．したがって，そのノルムは，有界線形汎関数におけるノルムの定義に従い，

$$\begin{aligned}
\left\|\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}\right)\right\|_{X'}&=\sup_{\boldsymbol{y}\in X\setminus\left\{\boldsymbol{0}_X\right\}}\frac{\left|\left\langle\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}\right),\boldsymbol{y}\right\rangle_{X'\times X}\right|}{\left\|\boldsymbol{y}\right\|_X}\\
&=\sup_{\boldsymbol{y}\in X,\ \left\|\boldsymbol{y}\right\|_X=1}\left|\left\langle\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}\right),\boldsymbol{y}\right\rangle_{X'\times X}\right|
\end{aligned}\tag{4.5.4}$$

によって与えられることになる (図 3.3.1 参照)．

4.6　変分原理における関数空間

4.3 節ではさまざまな関数空間が定義されて，それらが Banach 空間や Hilbert 空間の要件を満たすことが示された．4.4 節では Banach 空間から Banach 空間への写像として作用素が定義され，4.5 節では作用素の微分が定義された．その中で，汎関数の Fréchet 微分は汎関数の変数が入る関数空間と勾配が入る双対空間の双対積によって定義されることをみてきた．本節では，4.2 節から 4.5 節までで示された内容を使って，4.1 節で示された変分原理や最適制御問題をみなおしてみたい．

4.6.1　Hamilton の原理

拡張 Hamilton の原理 (問題 4.1.1) で使われた定義をまとめると次のようになる．$u(0)=\alpha$ を満たす関数 $u:(0,t_{\mathrm{T}})\to\mathbb{R}$ の集合を U とかいた．また，$v(0)=0$ を満たす関数 $v:(0,t_{\mathrm{T}})\to\mathbb{R}$ の集合を V とかいた．$u\in U$ に対して，拡張作用積分を表す汎関数を

$$f(u)=\int_0^{t_{\mathrm{T}}}\left(\frac{1}{2}m\dot{u}^2-\frac{1}{2}ku^2+pu\right)\mathrm{d}t-m\beta u(t_{\mathrm{T}}) \tag{4.6.1}$$

とおいた．また，$v(0)=0$ を満たす任意の $v\in V$ に対して，$f(u+v)$ が停留する条件として，式 (4.1.3) の計算の途中で

$$f'(u)[v]=\int_0^{t_{\mathrm{T}}}(m\dot{u}\dot{v}-kuv+pv)\,\mathrm{d}t-m\beta v(t_{\mathrm{T}})=0 \tag{4.6.2}$$

を得た．

式 (4.6.1) と式 (4.6.2) の積分が意味をもつためには，u, v および p に対する関数空間を明確にする必要がある．以下でそのことを明らかにしていこう．

まず，U と V が何であったのかを考えてみよう．$u\in U$ は $u(0)=\alpha$ を満たさなければならなかった．そこで，

$$U=\left\{u\in H^1((0,t_{\mathrm{T}});\mathbb{R})\mid u(0)=\alpha\right\} \tag{4.6.3}$$

とおいてみよう．一方，$v\in V$ は，同次形の境界条件 $v(0)=0$ を満たす必要があったので，

$$V=\left\{v\in H^1((0,t_{\mathrm{T}});\mathbb{R})\mid v(0)=0\right\} \tag{4.6.4}$$

とおいてみよう．このとき，U は非同次形の境界条件 $u(0)\neq 0$ により線形空間ではない．一方，V は線形空間になる．また，U は V に対するアフィン部分空間 (定義 4.2.7) になっている．実際，$u(0)=\alpha$ を満たす $H^1((0,t_{\mathrm{T}});\mathbb{R})$ の要素 u_0 を選んで固定すれば，U は $V(u_0)$ と同値となる．ここでは，$\tilde{u}=u-u_0$ とおいて，$\tilde{u}\in V$ とかくことにしよう．

V と $\tilde{u}$ をこのようにおいたとき，式 (4.6.2) の右辺にある $\dot{u}\dot{v}$ の積分に対して，Minkowski の不等式 (定理 A.9.2) と Hölder の不等式 (定理 A.9.1) をもちいれば，

$$\begin{aligned}\int_0^{t_{\mathrm{T}}}\dot{u}\dot{v}\,\mathrm{d}t&\leq\left\|\dot{\tilde{u}}\dot{v}\right\|_{L^1((0,t_{\mathrm{T}});\mathbb{R})}+\|\dot{u}_0\dot{v}\|_{L^1((0,t_{\mathrm{T}});\mathbb{R})}\\&\leq\left\|\dot{\tilde{u}}\right\|_{L^2((0,t_{\mathrm{T}});\mathbb{R})}\|\dot{v}\|_{L^2((0,t_{\mathrm{T}});\mathbb{R})}+\|\dot{u}_0\|_{L^2((0,t_{\mathrm{T}});\mathbb{R})}\|\dot{v}\|_{L^2((0,t_{\mathrm{T}});\mathbb{R})}\end{aligned} \tag{4.6.5}$$

が成り立つ．さらに，式 (4.6.5) の右辺に Poincaré の不等式の系 (系 A.9.4) をもちいれば，

$$\int_0^{t_{\mathrm{T}}} \dot{u}\dot{v}\,\mathrm{d}t \leq \|\tilde{u}\|_V \|v\|_V + \|u_0\|_{H^1((0,t_{\mathrm{T}});\mathbb{R})} \|v\|_V \tag{4.6.6}$$

が成り立つ．そこで，u_0 が $H^1\left((0,t_{\mathrm{T}});\mathbb{R}\right)$ の要素で，$\tilde{u}$ と v が V の要素ならば，式 (4.6.6) の右辺は有界となることが確認される．式 (4.6.1) 右辺の $\dot{u}^2$ と u^2 の積分および式 (4.6.2) 右辺の uv の積分も同様に有界となる．

また，式 (4.6.1) と式 (4.6.2) の中に現れる u と v の境界値 $u(t_{\mathrm{T}})$ と $v(t_{\mathrm{T}})$ が定義されることは次のようにして確認される．Sobolev の埋蔵定理 (定理 4.3.14) より $H^1\left((0,t_{\mathrm{T}});\mathbb{R}\right) \subset C^{0,1/2}\left([0,t_{\mathrm{T}}];\mathbb{R}\right)$ が成り立つ．そこで，u と v は連続関数となり，境界値は定まる (トレースがとれる) ことになる．

さらに，式 (4.6.1) と式 (4.6.2) 右辺のそれぞれ pu と pv の積分が有界になるためには，p は $L^2\left((0,t_{\mathrm{T}});\mathbb{R}\right)$ の要素であれば十分である．実際，

$$\int_0^{t_{\mathrm{T}}} pv\,\mathrm{d}t \leq \|p\|_{L^2((0,t_{\mathrm{T}});\mathbb{R})} \|v\|_V \tag{4.6.7}$$

が成り立つためである．

そこで，$u-u_0 \in V$, $v \in V$ および $p \in L^2\left((0,t_{\mathrm{T}});\mathbb{R}\right)$ のもとで，式 (4.6.2) の積分 $f'(u)[v]$ は意味をもち，$f'(u)[v]$ は $v \in V$ に対する有界線形汎関数となる．このとき，

$$f'(u)[v] = \langle g, v\rangle_{V'\times V} \tag{4.6.8}$$

とかくことができて，g は V の双対空間 V' の要素で f の勾配とよばれるものになる．任意の $v \in V$ に対して式 (4.6.8) が 0 になることは，運動方程式 (式 (4.1.6)) と速度の終端条件 (式 (4.1.7)) が成り立つことと同値となる．

さらに，第 5 章以降で使うために，式 (4.6.1) と式 (4.6.2) を汎関数の双線形性や線形性に着目してかきかえておこう．弾性ポテンシャルエネルギー，運動エネルギーおよび外力仕事に対して

$$a(u,v) = \int_0^{t_{\mathrm{T}}} kuv\,\mathrm{d}t, \tag{4.6.9}$$

$$b(u,v) = \int_0^{t_{\mathrm{T}}} muv\,\mathrm{d}t, \tag{4.6.10}$$

$$l(v) = \int_0^{t_{\mathrm{T}}} pv\,\mathrm{d}x - m\beta v(t_{\mathrm{T}}) \tag{4.6.11}$$

と定義する．このとき，式 (4.6.1) は

$$f(u) = \frac{1}{2}b(\dot{u},\dot{u}) - \frac{1}{2}a(u,u) + l(u) \tag{4.6.12}$$

とかける．そこで，これらの定義をもちいれば，拡張 Hamilton の原理に基づいてばね質点系の変位を求める問題は，次のようにかきかえられる．

問題 4.6.1 (拡張作用積分停留問題) $V = \left\{ v \in H^1((0, t_{\mathrm{T}}); \mathbb{R}) \mid v(0) = 0 \right\}$ とおく．a，b および l を式 (4.6.9)，式 (4.6.10) および式 (4.6.11) とする．$u_0 \in H^1((0, t_{\mathrm{T}}); \mathbb{R})$ は $u_0(0) = \alpha$ を満たすとする．このとき，式 (4.6.12) の $f(u)$ が停留する $u - u_0 \in V$ を求めよ． □

なお，時間 t_{T} を固有振動の半周期 $\pi/\sqrt{k/m}$ 以下で十分小さくとったときに，停留を最小に変えることができて，最小点の一意存在がいえる (たとえば，[5, 32.2 節, p. 168])．

さらに，任意の $v \in V$ に対して $f'(u)[v] = 0$ が成り立つことは，任意の $v \in V$ に対して

$$a(u, v) - b(\dot{u}, \dot{v}) = l(v) \tag{4.6.13}$$

が成り立つことと同値となる．そこで，問題 4.6.1 は次のようにもかきかえられる．

問題 4.6.2 (拡張作用積分変分問題) $V = \left\{ v \in H^1((0, t_{\mathrm{T}}); \mathbb{R}) \mid v(0) = 0 \right\}$ とおく．a，b および l を式 (4.6.9)，式 (4.6.10) および式 (4.6.11) とする．$u_0 \in H^1((0, t_{\mathrm{T}}); \mathbb{R})$ は $u_0(0) = \alpha$ を満たすとする．このとき，任意の $v \in V$ に対して式 (4.6.13) を満たす $u - u_0 \in V$ を求めよ． □

4.6.2 ポテンシャルエネルギー最小原理

次に，ポテンシャルエネルギー最小原理 (問題 4.1.2) で使われた関数に対する関数空間について考えてみよう．ポテンシャルエネルギーは，式 (4.1.8) で定義された．これを再記すれば，$u \in U$ に対して

$$\pi(u) = \int_0^l \frac{1}{2} e_{\mathrm{Y}} \nabla u \nabla u \, a_{\mathrm{S}} \, \mathrm{d}x - \int_0^l b u \, a_{\mathrm{S}} \, \mathrm{d}x - p_{\mathrm{N}} u(l) \, a_{\mathrm{S}}(l) \tag{4.6.14}$$

となる．また，任意の $v \in U$ に対して $\pi(u + v)$ が停留する条件として，式 (4.1.9) の計算の途中で

$$\pi'(u)[v] = \int_0^l (e_{\mathrm{Y}} \nabla u \nabla v - b v) \, a_{\mathrm{S}} \, \mathrm{d}x - p_{\mathrm{N}} v(l) \, a_{\mathrm{S}}(l) = 0 \tag{4.6.15}$$

を得た．これらの積分が意味をもつためには，式 (4.6.5), 式 (4.6.6) および式 (4.6.7) でみてきたような関係を用いて，

$$u, v \in U = \left\{ u \in H^1((0, l); \mathbb{R}) \mid u(0) = 0 \right\}, \quad e_{\mathrm{Y}} \in L^\infty((0, l); \mathbb{R}),$$

$$b \in L^2 ((0,l);\mathbb{R}), \quad a_{\mathrm{S}} \in W^{1,\infty}((0,l);\mathbb{R})$$

が仮定されればよいことになる．ここで，a_{S} は，$x=l$ においてその境界値を使うために，すくなくとも $x=l$ の近傍では $W^{1,\infty}$ 級である必要がある．

これらの仮定のもとで，式 (4.6.14) と式 (4.6.15) の積分は意味をもつ．このとき，$\pi'(u)[v]$ は $v \in U$ に対する有界線形汎関数となり，

$$\pi'(u)[v] = \langle g, v \rangle_{U' \times U} \tag{4.6.16}$$

とかけることになる．ここで，g は U' の要素で π の勾配とよばれるものになる．

さらに，ここでも弾性ポテンシャルエネルギーと外力仕事の u と v に対する双線形性や線形性に着目して，

$$a(u,v) = \int_0^l e_{\mathrm{Y}} \nabla u \cdot \nabla v a_{\mathrm{S}} \, \mathrm{d}x, \tag{4.6.17}$$

$$l(v) = \int_0^l b v a_{\mathrm{S}} \, \mathrm{d}x + a_{\mathrm{S}}(l) p_{\mathrm{N}} v(l) \tag{4.6.18}$$

とおくことにする．このとき，式 (4.6.14) は

$$\pi(u) = \frac{1}{2} a(u,u) - l(u) \tag{4.6.19}$$

とかける．そこで，これらの定義をもちいれば，1 次元線形弾性体の変位を求める問題は次のようにかきかえられる．

問題 4.6.3 (ポテンシャルエネルギー最小問題) $U = \left\{ v \in H^1((0,l);\mathbb{R}) \mid v(0) = 0 \right\}$ とおく．π を式 (4.6.19) とする．このとき，

$$\min_{u \in U} \pi(u)$$

を満たす u を求めよ． □

さらに，任意の $v \in U$ に対して $\pi'(u)[v] = 0$ が成り立つことは，任意の $v \in U$ に対して

$$a(u,v) = l(v) \tag{4.6.20}$$

が成り立つことと同値となる．そこで，問題 4.6.3 は次のようにもかきかえられる．

問題 4.6.4 (ポテンシャルエネルギー変分問題) $U = \left\{ v \in H^1((0,l);\mathbb{R}) \mid v(0) = 0 \right\}$ とおく．a と l をそれぞれ式 (4.6.17) と式 (4.6.18) とする．このとき，任意の $v \in U$ に対して，式 (4.6.20) を満たす $u \in U$ を求めよ．
□

問題 4.6.3 と問題 4.6.4 に対する解の一意存在は 5.2 節で示される．

4.6.3　Pontryagin の最小原理

線形システムの最適制御問題 (問題 4.1.4) に対しては，Lagrange 関数が式 (4.1.21) のように定義された．それを再記すれば，$(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}_0, p) \in \Xi \times U \times Z \times P$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}_0, p) \\
&\quad = \mathscr{L}_0(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}_0) + \mathscr{L}_1(\boldsymbol{\xi}, p) \\
&\quad = f_0(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}) - \int_0^{t_{\mathrm{T}}} (\dot{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{z} \,\mathrm{d}t + \int_0^{t_{\mathrm{T}}} \left(\frac{\|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbb{R}^d}^2}{2} - 1 \right) p \,\mathrm{d}t \\
&\quad = \int_0^{t_{\mathrm{T}}} \left\{ \frac{\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{R}^n}^2}{2} + \frac{\|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbb{R}^d}^2}{2} - (\dot{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{z} + \left(\frac{\|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbb{R}^d}^2}{2} - 1 \right) p \right\} \mathrm{d}t \\
&\qquad + \frac{1}{2} \|\boldsymbol{u}(t_{\mathrm{T}})\|_{\mathbb{R}^n}^2
\end{aligned} \tag{4.6.21}$$

になる．また，$\mathscr{L}$ の第 1 変分は $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}_0, p) \in \Xi \times U \times Z \times P$ の任意変動 $(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{z}}_0, \hat{p}) \in \Xi \times V \times W \times P$ に対して

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}'(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}_0, p)[\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{z}}_0, \hat{p}] \\
&\quad = \mathscr{L}_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}_0, p)[\boldsymbol{\eta}] + \mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}_0, p)[\hat{\boldsymbol{u}}] + \mathscr{L}_{\boldsymbol{z}_0}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}_0, p)[\hat{\boldsymbol{z}}_0] \\
&\qquad + \mathscr{L}_p(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}_0, p)[\hat{p}]
\end{aligned} \tag{4.6.22}$$

のようにまとめられる．ただし，

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}_0, p)[\boldsymbol{\eta}] = \int_0^{t_{\mathrm{T}}} \left\{ (1+p)\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{z}_0 \right\} \cdot \boldsymbol{\eta} \,\mathrm{d}t = \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{\eta} \rangle, \tag{4.6.23}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}_0, p)[\hat{\boldsymbol{u}}] &= \int_0^{t_{\mathrm{T}}} \left(\boldsymbol{u} + \dot{\boldsymbol{z}}_0 + \boldsymbol{A}^{\top}\boldsymbol{z}_0 \right) \cdot \hat{\boldsymbol{u}} \,\mathrm{d}t \\
&\quad + (\boldsymbol{u}(t_{\mathrm{T}}) - \boldsymbol{z}_0(t_{\mathrm{T}})) \cdot \hat{\boldsymbol{u}}(t_{\mathrm{T}}),
\end{aligned} \tag{4.6.24}$$

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{z}_0}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}_0, p)[\hat{\boldsymbol{z}}_0] = -\int_0^{t_{\mathrm{T}}} (\dot{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi}) \cdot \hat{\boldsymbol{z}}_0 \,\mathrm{d}t, \tag{4.6.25}$$

$$\mathscr{L}_p(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}_0, p)[q] = \int_0^{t_{\mathrm{T}}} \left(\frac{\|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbb{R}^d}^2}{2} - 1 \right) q \,\mathrm{d}t \tag{4.6.26}$$

のようになる．

式 (4.6.21) と式 (4.6.22) の積分が意味をもつためには，4.6.1 節でみてきたような関係により，

$$\begin{aligned}
&\Xi = L^2\left((0, t_{\mathrm{T}}); \mathbb{R}^d\right), \\
&U = \left\{ \boldsymbol{u} \in H^1\left((0, t_{\mathrm{T}}); \mathbb{R}^n\right) \;\middle|\; \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{\alpha} \right\},
\end{aligned}$$

$$V = \left\{ \boldsymbol{v} \in H^1\left((0, t_{\mathrm{T}}); \mathbb{R}^n\right) \mid \boldsymbol{v}(0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} \right\},$$
$$Z = \left\{ \boldsymbol{z} \in H^1\left((0, t_{\mathrm{T}}); \mathbb{R}^n\right) \mid \boldsymbol{z}(t_{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{u}(t_{\mathrm{T}}) \right\},$$
$$W = \left\{ \boldsymbol{w} \in H^1\left((0, t_{\mathrm{T}}); \mathbb{R}^n\right) \mid \boldsymbol{w}(t_{\mathrm{T}}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} \right\}$$

が仮定されればよいことになる．ここで，U と Z はそれぞれ V と W に対するアフィン部分空間になっている．$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{z}(t_{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{u}(t_{\mathrm{T}})$ を満たす $H^1((0, t_{\mathrm{T}}); \mathbb{R})$ の要素 $\boldsymbol{u}_0$ と $\boldsymbol{z}_{\mathrm{T}}$ をそれぞれ選んで固定すれば，U と Z はそれぞれ $V(\boldsymbol{u}_0)$ と $W(\boldsymbol{z}_{\mathrm{T}})$ と同値となる．

以上のような定義をもちいれば，問題 4.1.3 を次のようにかくことができる．

問題 4.6.5 (線形制御システム) $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times d}$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ および制御力 $\boldsymbol{\xi} \in \Xi$ が与えられたとき，任意の $\hat{\boldsymbol{z}}_0 \in W$ に対して，式 (4.6.25) がゼロとなるような $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0 \in V$ を求めよ． □

$\boldsymbol{z}_0$ を決定する随伴問題 (問題 4.1.5) は次のようにかける．

問題 4.6.6 (f_0 に対する随伴問題) $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ を問題 4.6.5 のとおりとする．このとき，任意の $\hat{\boldsymbol{u}} \in V$ に対して，式 (4.6.24) がゼロとなるような $\boldsymbol{z}_0 - \boldsymbol{z}_{\mathrm{T}} \in W$ を求めよ． □

非線形システムの最適制御問題 (問題 4.1.7) に対しても同様の表現が可能であるが，ここでは省略する．

4.7　第 4 章のまとめ

第 4 章では，設計変数が時間や場所を表す領域上で定義された関数になった場合の最適化問題 (関数最適化問題) とはどういうものかを関数解析学の基礎と関連づけてみてきた．要点は以下のようである．

(1) 1 自由度ばね質点系の運動方程式は，作用積分の停留条件 (Hamilton の原理) として得られる (4.1.1 項)．また，1 次元線形弾性体の弾性方程式は，ポテンシャルエネルギーの最小条件 (ポテンシャルエネルギー最小原理) として得られる (4.1.2 項)．さらに，最適制御問題の最適解は，Hamilton 関数の最小条件 (Pontryagin の最小原理) として得られる (4.1.3 項)．

(2) 線形空間 (ベクトル空間) とは，すべての要素どうしの線形結合がその要素に含まれるような集合のことである．連続関数全体の集合は線形空間になる (4.2.1 項)．

(3) ノルムが定義された線形空間をノルム空間という．さらに，ノルムについて完備な (いかなる Cauchy 列も収束する) 線形空間を Banach 空間という．連続関数全体の集合は最大値をノルムとして Banach 空間になる (4.2.4 項).

(4) 内積が定義された線形空間を内積空間という．さらに，内積を用いて定義されたノルムについて完備な線形空間を Hilbert 空間という．有限次元ベクトル空間は Hilbert 空間である (4.2.5 項).

(5) 関数空間として定義された Hölder 空間 $C^{k,\sigma}(\Omega;\mathbb{R})$, Lebesgue 空間 $L^p(\Omega;\mathbb{R})$ および Sobolev 空間 $W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})$ はそれぞれに対するノルムを用いて Banach 空間になる．また，$L^2(\Omega;\mathbb{R})$ と $H^k(\Omega;\mathbb{R}) = W^{k,2}(\Omega;\mathbb{R})$ は Hilbert 空間になる (4.3 節)．これらの関数空間の埋蔵関係は Sobolev の埋蔵定理 (定理 4.3.14) によって与えられる．

(6) Banach 空間上の有界線形汎関数全体の集合を双対空間という．汎関数の Fréchet 微分は変動ベクトルと勾配の双対積によって定義される (4.4.6 項).

(7) Hamilton の原理，ポテンシャルエネルギー最小原理および最適制御問題は，それぞれ $H^1((0,t_{\mathrm{T}});\mathbb{R})$, $H^1((0,l);\mathbb{R})$ および $L^2\left((0,t_{\mathrm{T}});\mathbb{R}^d\right)$ 上の関数最適化問題として定義される (4.6 節).

4.8　第 4 章の演習問題

4.1 ポテンシャルエネルギー最小原理を表す問題 4.1.2 に時間 $t \in (0,t_{\mathrm{T}})$ を導入して，1 次元弾性体に対する拡張 Hamilton の原理によって得られる運動方程式と速度の終端条件を，次の順に示せ．その際，密度を $\rho : (0,l) \to \mathbb{R}$ $(\rho > 0)$, $t = 0$ のときの変位を $\alpha : (0,l) \to \mathbb{R}$, $t = t_{\mathrm{T}}$ のときの速度を $\beta : (0,l) \to \mathbb{R}$, 体積力を $b : (0,l) \times (0,t_{\mathrm{T}}) \to \mathbb{R}$ および境界力を $p_{\mathrm{N}} : (0,t_{\mathrm{T}}) \to \mathbb{R}$ とする．

- U を

$$u(0,t) = 0 \quad t \in (0,t_{\mathrm{T}}), \quad u(x,0) = \alpha(x) \quad x \in (0,l)$$

を満たす変位 $u : (0,l) \times (0,t_{\mathrm{T}}) \to \mathbb{R}$ の集合として定義せよ．V を $u \in U$ の任意変動を表す変分変位 v の集合として定義せよ．

- 拡張作用積分を

$$f(u)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{t_{\mathrm{T}}} \left\{ \int_0^l \left(\frac{1}{2} \rho \dot{u}^2 - \frac{1}{2} e_{\mathrm{Y}} (\nabla u)^2 + bu \right) a_{\mathrm{S}} \, \mathrm{d}x \right. \\
&\quad \left. + p_{\mathrm{N}} u(l, t) \, a_{\mathrm{S}}(l) \right\} \mathrm{d}t - \int_0^l \rho \beta u(x, t_{\mathrm{T}}) \, a_{\mathrm{S}} \, \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

とおき，任意の $v \in V$ に対して f が停留する条件を求めよ．

- ρ, α, β, b および p_{N} に適した関数空間を示せ．

4.2 $n \in \mathbb{N}$ 自由度系の一般化変位 $\boldsymbol{u}$ とその変動 $\boldsymbol{v}$ に関する関数空間を

$$
\begin{aligned}
U &= \left\{ \boldsymbol{u} \in H^1 \left((0, t_{\mathrm{T}}) ; \mathbb{R}^n \right) \mid \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{\alpha}, \ \boldsymbol{u}(t_{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{\beta} \right\}, \\
V &= \left\{ \boldsymbol{v} \in H^1 \left((0, t_{\mathrm{T}}) ; \mathbb{R}^n \right) \mid \boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^n}, \ \boldsymbol{v}(t_{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^n} \right\}
\end{aligned}
$$

とおく．ただし，$\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\beta}$ は $\mathbb{R}^n$ の要素とする．$\boldsymbol{u} \in U$ に対して，運動エネルギー $\kappa(\boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}})$ とポテンシャルエネルギー $\pi(\boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}})$ が与えられているとする．また，力学における Lagrange 関数が $l(\boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}) = \kappa(\boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}) - \pi(\boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}})$ によって定義されているとする．さらに，作用積分が

$$
f(\boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}) = \int_0^{t_{\mathrm{T}}} l(\boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}) \, \mathrm{d}t
$$

によって定義されているとする．このとき，任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{v}})$ が停留する条件 (Hamilton の原理) から Lagrange の運動方程式

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial l}{\partial \dot{\boldsymbol{u}}} - \frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^n}
$$

が得られることを示せ．

4.3 演習問題 **4.2** に一般化運動量 $\boldsymbol{q} \in Q = H^1((0, t_{\mathrm{T}}); \mathbb{R}^n)$ を導入して，$\mathscr{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q}) = -l(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q}) + \boldsymbol{q} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}$ を Hamilton 関数とよび，作用積分を

$$
f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q}) = \int_0^{t_{\mathrm{T}}} \left(-\dot{\boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{u} - \mathscr{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q}) \right) \mathrm{d}t
$$

とおく．このとき，$f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q})$ の停留条件が，Hamilton の運動方程式

$$
\dot{\boldsymbol{q}} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \boldsymbol{u}}, \quad \dot{\boldsymbol{u}} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \boldsymbol{q}}
$$

になることを示せ．また，Hamilton の運動方程式が成り立つとき，$\dot{\mathscr{H}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q}) = 0$ となる (Hamilton 関数が保存される) ことを示せ．さらに，図 4.1.1 のばね質点系に対して外力 $p = 0$ のときの $\mathscr{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q})$ を求めよ．

4.4 Y と Z を Banach 空間として，Y は Z の中にコンパクトに埋蔵する ($Y \Subset Z$) (定理 4.4.15) とき，Y と Z の双対空間 Y' と Z' に対して $Z' \Subset Y'$ が成り立つことを示せ.

参考文献

[1] Adams, R. A. and Fournier, J. J. F. *Sobolev Spaces, 2nd Ed.* Academic Press, Amsterdam; Tokyo, 2003.

[2] ハイム・ブレジス, 小西芳雄訳, 藤田宏監訳. 関数解析: その理論と応用に向けて. 産業図書, 東京, 1988.

[3] Brezis, H. *Analyse Fonctionnelle: Théorie et Applications.* Masson, Paris, 1983.

[4] Evans, L. C. *Partial Differential Equations. 4th Ed.* American Mathematical Society, Providence, R.I., 2002.

[5] Gelfand, I. M., Fomin, S. V., 関根智明訳. 変分法. 総合図書, 東京, 1970.

[6] Grisvard, P. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains.* Pitman Advanced Pub. Program, Boston, 1985.

[7] Jahn, J. *Introduction to the Theory of Nonlinear Optimization. 2nd Rev. Ed.* Springer, Berlin; New York, 1996.

[8] Kimura, M. Shape derivative of minimum potential energy: abstract theory and applications. *Jindřich Nečas Center for Mathematical Modeling Lecture notes Volume IV, Topics in Mathematical Modeling*, pp. 1–38, 2008.

[9] 黒田成俊. 関数解析. 共立出版, 東京, 1980.

[10] 宮島静雄. ソボレフ空間の基礎と応用. 共立出版, 東京, 2006.

[11] 小川英光. 工学系の関数解析. 森北出版, 東京, 2010.

[12] 志賀浩二. 無限への飛翔: 集合論の誕生. 紀伊國屋書店, 東京, 2008.

[13] 吉田善章. 新版・応用のための関数解析 −その考え方と技法. サイエンス社, 東京, 2006.

[14] Yosida, K. *Functional Analysis, 6th Ed.* Springer, Berlin; New York, 1980.