

# 目次

付録	3
A.1 基本用語	3
A.1.1 開集合, 閉集合, 有界集合	3
A.1.2 関数の連続性	3
A.2 実対称行列の正定値判定	4
A.3 零空間と像空間, Farkas の補題	5
A.4 陰関数定理	7
A.5 Lipschitz 領域	9
A.6 熱伝導問題	13
A.6.1 1次元問題	13
A.6.2 $d$ 次元問題	15
A.7 線形2階偏微分方程式の分類	18
A.8 発散定理	20
A.9 不等式	21
A.10 Ascoli-Arzelà の定理	24



# 付録

## A.1 基本用語

最初に、数学で使われる基本用語の定義を示しておこう。

### A.1.1 開集合, 閉集合, 有界集合

$X$  (たとえば  $\mathbb{R}^2$ ) を  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  を距離とする距離空間 (定義 4.2.8),  $S$  をその部分集合とする. ある  $x \in X$  に対して, 半径  $\delta > 0$  の開球  $B(x, \delta) = \{y \in X \mid d(x, y) < \delta\}$  を  $\delta$  近傍という. 任意の  $x \in S$  に対して,  $\delta > 0$  を十分小さくとれば  $B(x, \delta) \subset S$  が成り立つとき,  $S$  は開集合であるという (図 A.1.1).  $X \setminus S$  が開集合のとき,  $S$  は閉集合であるという.  $S$  を含む最小の閉集合を閉包といい,  $\bar{S}$  とかく. 開集合  $S$  に対して,  $\bar{S} \setminus S$  を  $S$  の境界といい,  $\partial S$  とかく.  $x \in S$  を内点,  $x \in \partial S$  を端点という. 閉集合  $S$  に対して, 内点の集合を内部といい,  $S^\circ$  とかく. また,  $X$  の任意の点  $x$  とある  $\beta > 0$  が存在して, すべての  $y \in S$  に対して  $d(x, y) \leq \beta$  が成り立つとき,  $S$  を有界集合という.

### A.1.2 関数の連続性

距離空間上で定義された関数の連続性は次のように定義される.  $X$  と  $Y$  をそれぞれ  $d_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $d_Y : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  を距離とする距離空間として, 関数

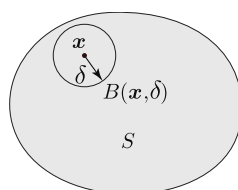


図 A.1.1: 開集合  $S$

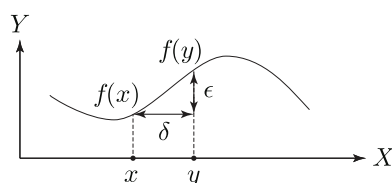


図 A.1.2: 関数の連続性

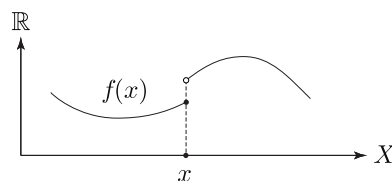


図 A.1.3: 関数の下半連続性

$f: X \rightarrow Y$  が  $\mathbf{x} \in X$  で連続であるとは、任意の  $\epsilon > 0$  に対して、ある  $\delta > 0$  が存在して、 $d_X(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta$  を満たすすべての  $\mathbf{y} \in X$  に対して

$$d_Y(f(\mathbf{y}), f(\mathbf{x})) < \epsilon$$

が成り立つことである (図 A.1.2). また、すべての  $\mathbf{x} \in X$  において連続のとき、**一様連続**という。

この定義より一様連続な関数は連続であるが、その逆は一般には成り立たない。実際、 $x \in \mathbb{R}$  に対して  $f(x) = x^2$  は連続である。しかし、 $|x| \rightarrow \infty$  のとき、勾配が急激に大きくなり、任意の  $\epsilon > 0$  に対して  $\delta \rightarrow 0$  となり、ある  $\delta > 0$  が存在しないことになる。しかし、定義域がコンパクト集合 (有界閉集合) のときには、連続な関数は一様連続かつ有界であることが知られている。

さらに、拡張実数値関数  $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  が  $\mathbf{x} \in X$  において**下半連続**であるとは、任意の  $\epsilon > 0$  に対して、ある  $\delta > 0$  が存在して、 $d_X(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta$  を満たすすべての  $\mathbf{y} \in X$  に対して

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) - \epsilon$$

が成り立つことである (図 A.1.3).

## A.2 実対称行列の正定値判定

第2章と第3章では、**正定値実対称行列**が重要な役割を演じている。ここでは、正定値の判定に使われる代表的な定理を示しておこう。固有値を用いた次の定理は

正定値の判定の基礎となる.

**定理 A.2.1 (固有値による実対称行列の正定値判定)**  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}$  を実対称行列とする.  $\mathbf{A}$  が正定値であるための必要十分条件は, すべての固有値  $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$  が正であることである.  $\square$

**証明** 必要性を示そう.  $i \in \{1, \dots, d\}$  に対して,  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$  を  $\lambda_i$  に対する固有ベクトルとする.  $\mathbf{A}$  が正定値ならば, 任意の  $i \in \{1, \dots, d\}$  に対して

$$\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i \cdot (\lambda_i \mathbf{x}_i) = \lambda_i \|\mathbf{x}_i\|^2 > 0$$

が成り立つ. これより, すべての  $i \in \{1, \dots, d\}$  に対して  $\lambda_i > 0$  を得る.

十分性を示そう.  $\mathbf{x}_i, i \in \{1, \dots, d\}$ , は互いに直交している (証明省略). 任意のベクトル  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  は独立な  $d$  個のベクトルの線形結合で与えられる. したがって,

$$\mathbf{x} = \sum_{i \in \{1, \dots, d\}} \mathbf{x}_i \xi_i$$

が成り立つ. これより, 任意の  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}\}$  に対して

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i \in \{1, \dots, d\}} \lambda_i \|\mathbf{x}_i\|^2 \xi_i^2 > 0$$

を得る.  $\square$

小行列式を用いた正定値判定として, [Sylvester の判定法](#)が知られている (たとえば, [3]).

**定理 A.2.2 (Sylvester の判定法)**  $\mathbf{A} = (A_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{d \times d}$  を実対称行列とする.  $\mathbf{A}$  が正定値であるための必要十分条件は, すべての  $i \in \{1, \dots, d\}$  に対する小行列式が

$$|\mathbf{A}_i| = \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & \cdots & A_{ii} \end{vmatrix} > 0$$

となることである.  $\square$

### A.3 零空間と像空間, Farkas の補題

第2章では, 重要な定理の証明において, 零空間と像空間の関係や Farkas の補題が使われている. ここでは, それらについてまとめておこう.

$m$  と  $n$  を自然数として,  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_m) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  とする. このとき,

$$\text{Ker } \mathbf{A} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\} \quad (\text{A.3.1})$$

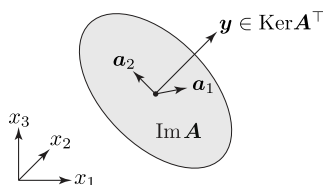


図 A.3.1: 零空間と像空間

を零空間あるいは核空間という。また,

$$\text{Im } \mathbf{A} = \{ \mathbf{A}z \in \mathbb{R}^n \mid z \in \mathbb{R}^m \} \quad (\text{A.3.2})$$

を像空間あるいは値空間という。一方,  $\mathbb{R}^n$  の部分線形空間  $V$  が与えられたとき,  $V$  に直交するすべてのベクトルからなる線形空間を  $V$  の直交補空間とよび,  $V^\perp$  とかく。このとき, 次の結果を得る。

**補題 A.3.1** (零空間と像空間の直交補空間)  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  に対して,

$$\text{Im } \mathbf{A} = (\text{Ker } \mathbf{A}^\top)^\perp, \quad (\text{Im } \mathbf{A}^\top)^\perp = \text{Ker } \mathbf{A}$$

が成り立つ。 □

**証明** 定義より,

$$\begin{aligned} \text{Ker } \mathbf{A}^\top &= \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}^\top \mathbf{y} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m} \}, \\ (\text{Ker } \mathbf{A}^\top)^\perp &= \{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{w} \cdot \mathbf{y} = 0, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A}^\top \mathbf{y} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m} \} \end{aligned}$$

とかける。ここで,  $z \in \mathbb{R}^m$  を  $\mathbf{w} \in (\text{Ker } \mathbf{A}^\top)^\perp$  に対して,  $\mathbf{w} = \mathbf{A}z$  が成り立つように選ぶとする。しかし, 任意の  $\mathbf{y} \in \text{Ker } \mathbf{A}^\top$  に対しては,

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{A}z) \cdot \mathbf{y} = z \cdot (\mathbf{A}^\top \mathbf{y}) = 0$$

が成り立つような  $z$  は任意にとれる。そこで, 式 (A.3.2) の定義により,  $\text{Im } \mathbf{A} = (\text{Ker } \mathbf{A}^\top)^\perp$  が成り立つ。  $(\text{Im } \mathbf{A}^\top)^\perp = \text{Ker } \mathbf{A}$  についても同様に示せる。 □

$n = 3$  および  $m = 2$  のとき, 零空間と像空間は図 A.3.1 のような関係になる。

次に, 等式制約を不等式制約におきかえたときの集合を考えよう。零空間に対して

$$\text{Kco } \mathbf{A} = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{A}\mathbf{y} \leq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} \}$$

を非正錐とよぶ。また, 像空間に対して

$$\text{Ico } \mathbf{A} = \{ \mathbf{A}z \in \mathbb{R}^n \mid z \geq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m} \}$$

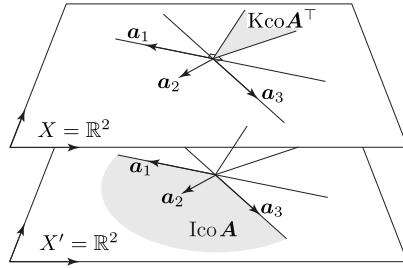


図 A.3.2: Farkas の補題 ( $A = (a_1 \ a_2 \ a_3)$  のとき)

を像錐とよぶ. さらに,  $C \subset \mathbb{R}^n$  を錐とすると,

$$C' = \{z \in \mathbb{R}^n \mid y \cdot z \leq 0 \text{ for all } y \in C\}$$

を  $C$  の双対錐という. 次の補題は Farkas の補題をかきかえたものである (たとえば, [11, 補題 2.1, p. 27]).

補題 A.3.2 (Farkas)  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  に対して,

$$\text{Ico } A = (\text{Kco } A^\top)', \quad (\text{Ico } A)' = \text{Kco } A^\top$$

が成り立つ. □

$n = 2$  および  $m = 3$  のとき, Farkas の補題が与える関係を図 A.3.2 に示す. この図において,

$$\text{Ico } A = \left\{ (a_1 \ a_2 \ a_3) z \in \mathbb{R}^2 \mid z \geq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \right\}$$

は,  $a_1, a_2, a_3$  のすべてが正の向きとなるベクトルの領域 (錐) を示している. 一方,

$$\text{Kco } A^\top = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} a_1^\top \\ a_2^\top \\ a_3^\top \end{pmatrix} y \leq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \right\}$$

は,  $a_1, a_2, a_3$  のすべてとの内積が非正となるベクトルの領域 (錐) を示している. これらは, 互いに錐と双対錐の関係になっていることがわかる.

## A.4 陰関数定理

第 2 章と第 7 章で示される Lagrange 乗数法 (随伴変数法) の証明では, 陰関数定理が重要な役割を演じている. ここでは, それらの定理についてまとめておこう.

有限次元ベクトル空間上の陰関数に対して次の結果が知られている (たとえば, [7] p. 30 1.37).

**定理 A.4.1 (有限次元ベクトル空間の陰関数定理)** 自然数  $m, n, k$  に対して,  $h : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  は,  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  の近傍  $B_{\mathbb{R}^m} \times B_{\mathbb{R}^n}$  において

$$(1) \quad h(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n},$$

$$(2) \quad h \in C^k(B_{\mathbb{R}^m} \times B_{\mathbb{R}^n}; \mathbb{R}^n),$$

$$(3) \quad \text{任意の } \mathbf{x} \in B_{\mathbb{R}^m} \text{ に対して } h(\mathbf{x}, \cdot) \in C^1(B_{\mathbb{R}^n}; \mathbb{R}^n) \text{ で, } h_{\mathbf{y}\tau}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = (\partial h_i / \partial y_j(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0))_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ は正則}$$

を満たすとする. このとき,  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  のある近傍  $U_{\mathbb{R}^m} \times U_{\mathbb{R}^n} \subset B_{\mathbb{R}^m} \times B_{\mathbb{R}^n}$  とある関数  $v \in C^k(U_{\mathbb{R}^m}; U_{\mathbb{R}^n})$  が存在して, 任意の  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U_{\mathbb{R}^m} \times U_{\mathbb{R}^n}$  に対して,  $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$  であることと

$$\mathbf{y} = v(\mathbf{x})$$

が同値となる. □

さらに, Banach 空間上の陰関数に対して次の結果が知られている (たとえば, [1] p. 115 (3.1.10)).

**定理 A.4.2 (Banach 空間の陰関数定理)**  $X, Y, Z$  を実 Banach 空間とする.  $h : X \times Y \rightarrow Z$  は,  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in X \times Y$  の近傍  $B_X \times B_Y$  において

$$(1) \quad h(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}_Z,$$

$$(2) \quad h \in C^k(B_X \times B_Y; Z),$$

$$(3) \quad \text{任意の } \mathbf{x} \in B_X \text{ に対して } h(\mathbf{x}, \cdot) \in C^1(B_Y; Z) \text{ で, } (h_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^{-1} : Z \rightarrow Y \text{ は有界線形}$$

を満たすとする. このとき,  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  のある近傍  $U_X \times U_Y \subset B_X \times B_Y$  と  $v \in C^k(U_X; U_Y)$  が存在して, 任意の  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U_X \times U_Y$  に対して,  $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$  であることと

$$\mathbf{y} = v(\mathbf{x})$$

が同値となる. □



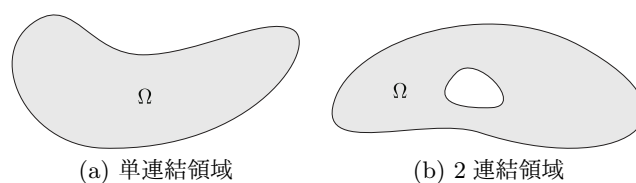


図 A.5.1: 領域

## A.5 Lipschitz 領域

第5章以降では、偏微分方程式の境界値問題が扱われている。それらの問題を定義する際に、領域の境界に対する滑らかさに関する定義が使われている。ここでは、それらをまとめて示しておこう (たとえば, [4] p. 5 Definition 1.2.1.1, [10] p. 146 定義 6.28).

ある開集合が二つの開集合にわけることができない (一つにつながっている) 性質を **連結** とよぶ.  $d$  を自然数として,  $\mathbb{R}^d$  の連結な開部分集合  $\Omega$  を **領域** とよぶことにする. 特に, 図 A.5.1 (a) のように, 領域内に任意に選んだ閉曲線が, 領域の中の点に連続的に収縮できるとき, その領域を **単連結** であるという. そうでないとき, **多連結** という. 図 A.5.1 (b) は2連結の場合を示す.

領域の中でも, その上で境界値問題が定義されるためには, 境界は連続であるだけでは十分ではなく, 次の性質が必要となる.

**定義 A.5.1 (Lipschitz 領域)**  $\Omega$  を  $d \in \{2, 3, \dots\}$  次元の有界領域,  $\partial\Omega$  をその境界とする. ある  $\alpha = (\alpha_i)_i \in \mathbb{R}^d$  ( $\alpha > \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$ ) が存在して, すべての  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  に対して, 新しい座標系  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_d)^\top = (\mathbf{y}'^\top, y_d)^\top \in \mathbb{R}^d$  を用いて定義された  $\mathbf{x}$  の  $\alpha$  近傍

$$B(\mathbf{x}, \alpha) = \left\{ \mathbf{x} + (y_1, \dots, y_d)^\top \mid -\alpha_i < y_i < \alpha_i, i \in \{1, \dots, d\} \right\}$$

において,

$$\Omega \cap B(\mathbf{x}, \alpha) = \left\{ \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} + (\mathbf{y}'^\top, y_d)^\top \in B(\mathbf{x}, \alpha) \mid y_d < \varphi(\mathbf{y}') \right\}$$

となるような  $C^{0,1}(\mathbb{R}^{d-1}; \mathbb{R})$  (定義 4.3.1) に属する関数 (グラフ)  $\varphi$  が存在するとき,  $\partial\Omega$  を **Lipschitz 境界** という. また,  $\Omega$  を **Lipschitz 領域** という.  $\square$

Lipschitz 領域の極端な場合を図 A.5.2 に示す. この図の点  $\mathbf{x}$  のように, 境界が振動していても, グラフ  $\varphi$  の傾きがある値以下に制限されていて, かつ振幅が  $\mathbf{x}$  に近づいたときにゼロに収束するようであれば, Lipschitz 境界に入ることになる. グラフの導関数が不連続な点においては, あとで示されるような法線を定義すること

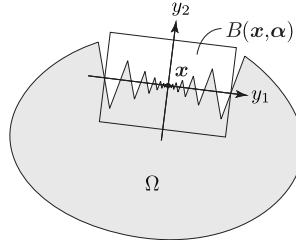
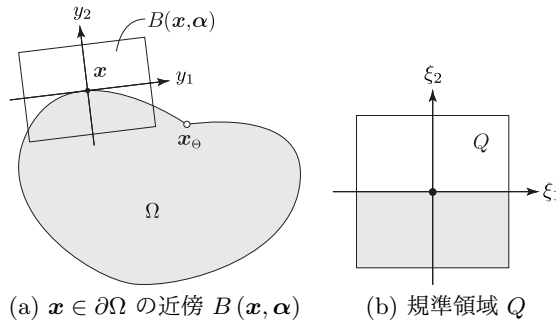


図 A.5.2: Lipschitz 領域

図 A.5.3: 区分的  $C^1$  級境界

はできないが, このような点を除いたほとんど至るところでは法線は定義されることに注意してほしい. しかし, 曲率が定義されるためには, より滑らかな境界が必要となる. 図 A.5.3 における点  $x$  の近傍  $B(x, \alpha)$  から標準領域  $Q$  への写像を使って, 次のような境界を定義する.

**定義 A.5.2 ( $C^k$  級領域)**  $\Omega$  を  $d \in \{2, 3, \dots\}$  次元の有界領域,  $\partial\Omega$  をその境界とする. すべての  $x \in \partial\Omega$  に対して, 近傍  $B(x, \alpha)$  が定義 A.5.1 のように定義され,

$$\Omega \cap B(x, \alpha) = \{x + y \in B(x, \alpha) \mid \phi_d(y) < 0\}$$

となるような関数  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_d)^\top : B(x, \alpha) \rightarrow Q = (0, 1)^d$  が存在して,  $\phi$  と逆写像  $\phi^{-1}$  が一様に全単射 (1 対 1 写像) で, かつ  $k \in \{1, 2, \dots\}$  に対して  $C^k(B(x, \alpha); \mathbb{R}^d)$  に属するとき,  $\partial\Omega$  を  $C^k$  級境界という. また,  $\Omega$  を  $C^k$  級領域という.  $\square$

定義 A.5.2 において,  $k = 0$  は除外されている. もしも定義 A.5.2 の  $\phi$  に Lipschitz 連続な関数を選んだ場合には, 図 A.5.4 のような領域も許容されてしまうことになる ([4] p. 4 1.2). そこで, このような領域が含まれないようにするために, 定義 A.5.1 では, Lipschitz 連続なグラフ  $\varphi$  の存在が仮定されたのである. また, 簡単

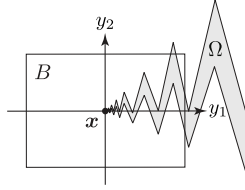
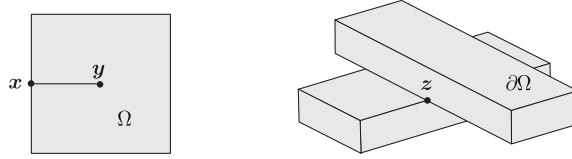


図 A.5.4: 連続な境界が定義できない場合



(a) き裂をもつ 2 次元領域 (b) 6 面体が結合された 3 次元領域

図 A.5.5: Lipschitz 境界ではない場合

な形状ではあるが図 A.5.5 の点  $x$ ,  $y$  および  $z$  の近傍は, Lipschitz 境界の定義を満たさない (たとえば, [5] p. 91 Figure 2) .

また, 境界の開部分集合  $\Gamma \subset \partial\Omega$  上のすべての  $x \in \Gamma$  に対して定義 A.5.2 の条件が成り立つとき,  $\Gamma$  を  $C^s$  級境界ということにする. また, 図 A.5.3 における  $x_\Theta$  のように, 滑らかさが切り替わる境界上の測度ゼロの集合を  $\Theta$  とかくこととする. このとき, すべての  $x \in \partial\Omega \setminus \Theta$  ( $\Theta$  を除く  $\partial\Omega$  上の点) に対して定義 A.5.2 の条件が成り立つとき,  $\partial\Omega$  を 区分的  $C^s$  級境界 という.

これらの定義と表記法を用いて,  $\partial\Omega$  上の点  $x$  において接線, 法線, 曲率を次のように定義する.

**定義 A.5.3 (接線)**  $\partial\Omega$  を Lipschitz 境界とする.  $x \in \partial\Omega \setminus \Theta$  に対して, 近傍  $B(x, \alpha)$  と関数  $\varphi \in C^{0,1}(\partial\Omega \cap B(x, \alpha); \mathbb{R})$  を定義 A.5.1 で定義されたものとする. このとき,  $x \in \partial\Omega \setminus \Theta$  に対して,

$$\begin{aligned} \left( \tau_1 \quad \cdots \quad \tau_{d-1} \right)^\top &= \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}(x) e_1 \quad \cdots \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_{d-1}}(x) e_{d-1} \right)^\top \\ &\in \left( L^\infty(\partial\Omega \cap B(x, \alpha); \mathbb{R}^d) \right)^{d-1} \end{aligned}$$

を 接線 という. ただし,  $e_1, \dots, e_{d-1}$  は座標系  $(y_1, \dots, y_{d-1})$  の単位ベクトルを表すものとする.  $\square$

**定義 A.5.4 (法線)**  $\partial\Omega$  を Lipschitz 境界とする.  $\tau_1, \dots, \tau_{d-1}$  を  $x \in \partial\Omega \setminus \Theta$  における接線とする (定義 A.5.3).  $x \in \partial\Omega \setminus \Theta$  において  $\tau_1, \dots, \tau_{d-1}$  と直交し,  $\Omega$

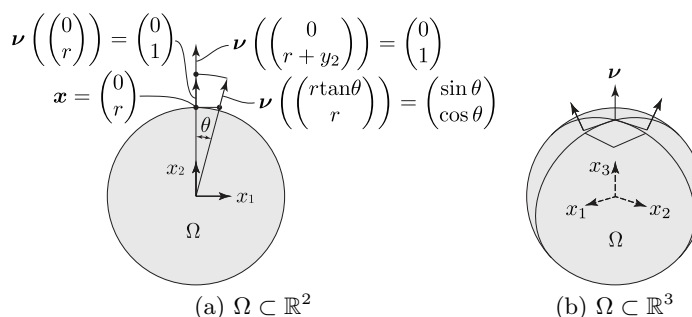


図 A.5.6: 円と球の平均曲率

の内点から境界に向う方向をもつ単位ベクトル  $\nu$  を  $\mathbf{x}$  における外向き単位法線あるいは法線という。□

**定義 A.5.5 (平均曲率)**  $\partial\Omega$  を区分的  $C^{1,1}$  級 ( $\partial\Omega \setminus \Theta$  において  $C^{1,1}$  級) 境界とする.  $\mathbf{x} \in \partial\Omega \setminus \Theta$  に対して, 定義 A.5.2 で定義された近傍  $B(\mathbf{x}, \alpha)$  と関数  $\phi \in C^{1,1}(B(\mathbf{x}, \alpha); \mathbb{R}^d)$  を用いて,  $\nu = \nabla\phi_d(\mathbf{x}) / \|\nabla\phi_d(\mathbf{x})\|_{\mathbb{R}^d}$  および  $\kappa = \nabla \cdot \nu$  とおく. このとき,  $\kappa / (d-1)$  を平均曲率という。□

$\kappa$  の定義を円と球に適用して, 曲率半径との関係についてみておこう. 図 A.5.6 (a) のような原点を中心とする半径  $r$  の円領域を考えよう. 境界上の点  $\mathbf{x} = (0, r)^\top$  における  $\kappa$  を計算してみよう. 図 A.5.6 (a) より,  $\mathbf{x}$  から  $x_1$  方向に  $dx_1 = r \tan \theta$  だけ移動した点における法線は  $(\sin \theta, \cos \theta)^\top$  となり,  $\mathbf{x}$  から  $x_2$  方向に  $dx_2 = y_2$  だけ移動した点における法線は  $(0, 1)^\top$  となる. そこで,

$$\kappa(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \nu = \frac{\partial \nu_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \nu_2}{\partial x_2} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{r \tan \theta} = \frac{1}{r}$$

を得る.  $r$  を曲率半径という. また, 図 A.5.6 (b) のような原点を中心とする半径  $r$  の球上の  $\mathbf{x} = (0, 0, r)^\top$  では

$$\kappa(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \nu = \frac{\partial \nu_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \nu_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \nu_3}{\partial x_3} = \frac{2}{r}$$

のように,  $\kappa$  は曲率半径の逆数の  $d-1 = 2$  倍となる.

なお, 曲率の定義には, 平均曲率のほかに全曲率あるいは Gauss 曲率とよばれる定義がある. 混乱をさけるために, 平均曲率と全曲率の違いをみておくことにしよう.  $d = 3$  次元空間上の滑らかな曲面は, 一般に, 図 A.5.6 (b) の球面を楕円面におきかえたような曲面となる. その楕円面上の点  $\mathbf{x}$  に対して, 法線を含むすべての平面と楕円面が交わってできる曲線の  $\mathbf{x}$  における曲率 (凹凸により正負の符号をつける) を法曲率とよぶ. 法曲率の最大値  $\kappa_1$  と最小値  $\kappa_2$  の組を主曲率という. この

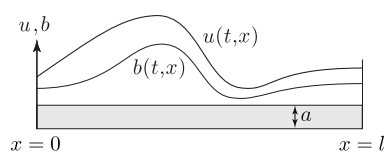


図 A.6.1: 1次元熱伝導問題

とき、平均曲率は  $(\kappa_1 + \kappa_2)/2$  で定義されるのに対して、全曲率は  $\kappa_1\kappa_2$  で定義される。

## A.6 熱伝導問題

第5章以降では、偏微分方程式の境界値問題の基本問題として Poisson 問題が使われる。Poisson 問題は静的なつり合い状態にある様々な場の現象を表す数理モデルとして用いられる。ここでは、熱伝導現象を例に挙げて、Poisson 問題がその定常的な熱のつり合い状態を表していることをみてみよう。最初に、1次元連続体の時間発展型熱伝導問題について考えてから、 $d \in \{2, 3\}$  次元連続体の時間発展型熱伝導問題に拡張していくことにする。

### A.6.1 1次元問題

図 A.6.1 のような1次元連続体を考えよう。 $(0, t_T)$  を時間の領域、 $(0, l)$  を1次元連続体の領域とする。 $a$  を断面積を表す正の実定数とする。 $b: (0, t_T) \times (0, l) \rightarrow \mathbb{R}$  を単位時間、単位体積あたりに内部で発熱する熱量、 $u: (0, t_T) \times (0, l) \rightarrow \mathbb{R}$  を温度とする。このとき、 $b$  に対して、 $u$  を求めるための熱伝導方程式が得られるまでをみてみよう。

まず、熱と温度は次のように関連付けられると仮定する。

**定義 A.6.1 (熱と温度の構成方程式)**  $u(t, x)$  を  $(t, x) \in (0, t_T) \times (0, l)$  における温度とする。熱が伝わる物体の単位体積あたりの熱量は

$$w(t, x) = c_V(x) u(t, x) \quad (\text{A.6.1})$$

で与えられる。ここで、 $c_V: (0, l) \rightarrow \mathbb{R}$  は体積熱容量を表す正值をとる関数である。

□

次に、熱の移動は、次のような Fourier の熱伝導法則に従うと仮定する (図 A.6.2)。

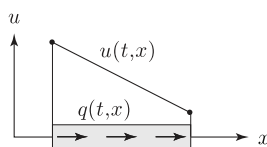


図 A.6.2: Fourier の熱伝導法則

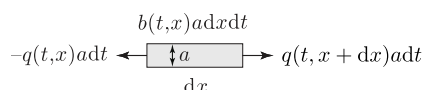


図 A.6.3: 熱量のつり合い

**定義 A.6.2 (Fourier の熱伝導法則 (1次元領域))**  $u(t, x)$  を温度とする.  $x$  における断面を単位時間, 単位面積あたりに通過する熱量 (熱流束) は

$$q(t, x) = -\lambda(x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \quad (\text{A.6.2})$$

で与えられる. ここで,  $\lambda: (0, l) \rightarrow \mathbb{R}$  は熱伝導率を表す正值をとる関数である.  $\square$

このとき, 任意の  $(t, x) \in (0, t_{\top}) \times (0, l)$  に対して, 微小な  $adxdt$  における熱量の変化は,

$$(w(t+dt, x) - w(t, x)) adx = (b(t, x) dx - q(t, x+dx) + q(t, x)) adt$$

となる (図 A.6.3). ここで,  $dx \rightarrow 0, dt \rightarrow 0$  の極限をとれば,

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t, x) = b(t, x) - \frac{\partial q}{\partial x}(t, x)$$

が成り立つ. さらに, 式 (A.6.1) と式 (A.6.2) を用いれば,

$$c_V \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right) = b$$

を得る. この方程式は**熱伝導方程式**とよばれる.

熱伝導方程式は空間に関して2階, 時間に関して1階の微分方程式である.  $u$  を一意に決定するためには, 二つの**境界条件**と一つの**初期条件**が必要となる. たとえば, 次のような条件が考えられる.

- (1)  $u_D: (0, t_{\top}) \rightarrow \mathbb{R}$  を既知の温度として,  $x=0$  において

$$u(t, 0) = u_D(t)$$

が満たされているとする. このような  $u$  を指定する条件は**基本境界条件**あるいは**第1種境界条件**, **Dirichlet 条件**とよばれる.

(2)  $p_N : (0, t_T) \rightarrow \mathbb{R}$  を既知の熱流束 (定義 A.6.2) として,  $x = l$  において

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial x}(t, l) = p_N(t)$$

が満たされているとする. このような  $u$  の導関数を指定する条件は自然境界条件あるいは第 2 種境界条件, Neumann 条件とよばれる.

(3)  $u_0 : (0, l) \rightarrow \mathbb{R}$  を既知の温度として,  $t = 0$  において

$$u(0, x) = u_0(x)$$

が満たされているとする. このようなある時刻における  $u$  を指定する条件は初期条件とよばれる.

初期条件は時間領域の境界条件とみなすことができる. そこで, 初期条件も含めた境界条件と偏微分方程式が満たされるような  $u$  を求める問題は, 偏微分方程式の境界値問題とよばれる. 熱伝導方程式は線形 2 階偏微分方程式に分類される. その中でも, 熱伝導方程式は放物型偏微分方程式に分類される (A.7 節). 定常状態のときは,  $b(t, x) = b(x)$  および  $u(t, x) = u(x)$  となり,

$$-\frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{du}{dx} \right) = b \quad (\text{A.6.3})$$

となる. 式 (A.6.3) は定常熱伝導方程式とよばれる. この定常熱伝導方程式を  $d$  次元領域に拡張したときは, 後で示される式 (A.6.5) のような偏微分方程式となる. これは楕円型偏微分方程式に分類されることになる (A.7 節).

### A.6.2 $d$ 次元問題

次に,  $d \in \{2, 3\}$  次元物体における熱伝導現象を考えよう. 図 A.6.4 に 2 次元も場合を示す.  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^d$  上の Lipschitz 領域として,  $\Gamma_D$  を  $\Omega$  の境界  $\partial\Omega$  の部分集合とする.  $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_D$  とおく.  $b : (0, t_T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  を単位時間, 単位体積あたりに内部で発熱する熱量,  $u : (0, t_T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  を温度とする. このとき, Fourier の熱伝導法則は次のようになる.

**定義 A.6.3 (Fourier の熱伝導法則 ( $d$  次元領域))**  $u : (0, t_T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  を温度とする. 単位時間, 単位面積あたりに物体を伝わる熱量 (熱流束)  $\mathbf{q} : (0, t_T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  は

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_d \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{d1} & \cdots & \lambda_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_d} \end{pmatrix} u = -\mathbf{\Lambda} \nabla u$$

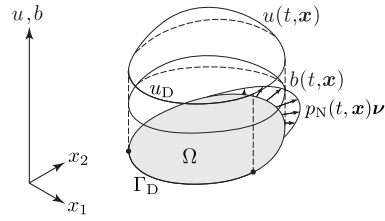


図 A.6.4: 2次元熱伝導問題

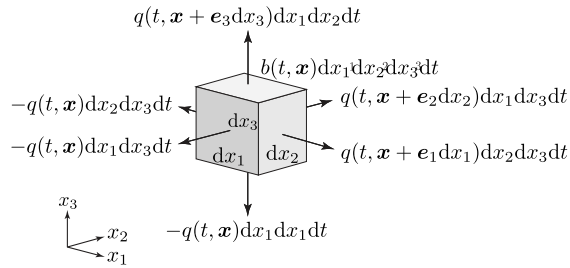


図 A.6.5: 3次元の熱量のつり合い

を満たす. ここで,  $\mathbf{\Lambda} = (\lambda_{ij})_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  は熱伝導率を表す正定値実対称行列 (定義 2.4.5) 値をとる関数である. 熱伝導率が等方的であれば, 正の実数値をとる関数  $\lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  を用いて,  $\mathbf{\Lambda} = \lambda \mathbf{I}$  ( $\mathbf{I}$  は単位行列) とかくことができる. このとき,

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla u \quad (\text{A.6.4})$$

となる. □

任意の  $(t, \mathbf{x}) \in (0, t_T) \times \Omega$  に対して, 微小な  $dx_1 \cdots dx_d dt$  における熱量の変化を考えれば,  $\mathbf{e}_i$  を  $x_i$  軸方向の単位ベクトルとして,

$$\begin{aligned} & (w(t + dt, \mathbf{x}) - w(t, \mathbf{x})) dx_1 dx_2 \cdots dx_d \\ &= \left\{ b(t, \mathbf{x}) - \sum_{i \in \{1, \dots, d\}} (q_i(t, \mathbf{x} + \mathbf{e}_i dx_i) - q_i(t, \mathbf{x})) \right\} dt \end{aligned}$$

となる (図 A.6.5). ここで,  $dx_1, \dots, dx_d \rightarrow 0, dt \rightarrow 0$  の極限をとれば,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = b - \sum_{i \in \{1, \dots, d\}} \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$$

が成り立つ.



さらに, 式 (A.6.1), 式 (A.6.4) を用いれば,

$$\begin{aligned} c_V \frac{\partial u}{\partial t} - \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial}{\partial x_d} \right) \left( \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{d1} & \cdots & \lambda_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_d} \end{pmatrix} \right) u \\ = c_V \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\Lambda \nabla u) = b \end{aligned}$$

を得る. この方程式は  $d$  次元の熱伝導方程式とよばれる. 熱伝導率が等方的であれば,

$$c_V \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda \nabla u) = b$$

となる. さらに,  $\lambda$  が実定数であれば,

$$c_V \frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \Delta u = b$$

となる. ただし,  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$  は Laplace 作用素, 調和作用素あるいは発散作用素とよばれる.  $\Delta$  は  $\nabla^2$  とかけられることもあるが, 本書では  $\Delta$  を用いることにする.

$d$  次元の熱伝導方程式を満たす  $u$  を一意に決定するためには, 次のような境界条件が必要となる.

(1)  $u_D : (0, t_T) \times \Gamma_D \rightarrow \mathbb{R}$  を既知の温度として,

$$u = u_D \quad \text{on } (0, t_T) \times \Gamma_D$$

が満たされているとする (基本境界条件).

(2)  $p_N : (0, t_T) \times \Gamma_N \rightarrow \mathbb{R}$  を既知の熱流束として,

$$\boldsymbol{\nu} \cdot (\Lambda \nabla u) = p_N \quad \text{on } (0, t_T) \times \Gamma_N$$

が満たされているとする (自然境界条件). 熱伝導率が等方的であれば,

$$\lambda \partial_\nu u = p_N \quad \text{on } (0, t_T) \times \Gamma_N$$

となる. ただし,  $\partial_\nu(\cdot)$  は  $(\partial(\cdot)/\partial \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}$  を表すものとする.

(3)  $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  を既知の温度として, ある  $t_0 \in (0, t_T)$  に対して

$$u(t_0, \boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}) \quad \text{in } \boldsymbol{x} \in \Omega$$

が満たされているとする (初期条件).

定常状態のときは,  $b(t, \boldsymbol{x}) = b(\boldsymbol{x})$  および  $u(t, \boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x})$  となり, 熱伝導方程式は

$$-\nabla \cdot (\boldsymbol{\Lambda} \nabla u) = b \quad (\text{A.6.5})$$

となる. また,  $\partial\Omega$  全体で自然境界条件の場合は, 定数分の不定性が残る.  $u$  を一意に決定するためには,  $|\Gamma_D| > 0$  が必要である (例題 5.2.6).

以上をまとめると, 熱伝導問題は次のように定義される.  $\Omega$  を  $d \in \{2, 3\}$  次元 Lipschitz 領域とする. また,  $\Gamma_D \subset \partial\Omega$  および  $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus \bar{\Gamma}_D$  とする.  $c_V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  は正值をとる関数とする.  $\boldsymbol{\Lambda} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  は正定値実対称行列値をとる関数とする.

**問題 A.6.4 (熱伝導問題)**  $b : (0, t_T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p_N : (0, t_T) \times \Gamma_N \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u_D : (0, t_T) \times \Gamma_D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  が与えられたとき,

$$\begin{aligned} c_V \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\boldsymbol{\Lambda} \nabla u) &= b \quad \text{in } (0, t_T) \times \Omega, \\ \boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{\Lambda} \nabla u) &= p_N \quad \text{on } (0, t_T) \times \Gamma_N, \\ u &= u_D \quad \text{on } (0, t_T) \times \Gamma_D, \\ u &= u_0 \quad \text{in } \Omega \text{ at } t = 0 \end{aligned}$$

を満たす  $u : (0, t_T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  を求めよ. □

定常状態のとき, 熱伝導問題は次のようになる.

**問題 A.6.5 (定常熱伝導問題)**  $b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p_N : \Gamma_N \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u_D : \Gamma_D \rightarrow \mathbb{R}$  が与えられたとき,

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\boldsymbol{\Lambda} \nabla u) &= b \quad \text{in } \Omega, \\ \boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{\Lambda} \nabla u) &= p_N \quad \text{on } \Gamma_N, \\ u &= u_D \quad \text{on } \Gamma_D \end{aligned}$$

を満たす  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  を求めよ. □

問題 A.6.5 において,  $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{I}$  とおけば, Poisson 問題となる.

## A.7 線形 2 階偏微分方程式の分類

A.6 節でみたように, 熱伝導問題は時間発展問題としてみたときに放物型に分類され, 定常問題としてみたときに楕円型に分類された. ここでは, 定数係数の 2 階偏微分方程式 (線形 2 階偏微分方程式) の標準形に基づく分類法についてまとめておこう.

**定義 A.7.1 (線形 2 階偏微分方程式の分類)** 偏微分作用素  $\partial/\partial x_i$  ( $i \in \{1, \dots, d\}$ ) を  $\xi_i$  と表して, 階数の和が最大の項 (主要項) の特性方程式が  $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d) = 0$  であるとする. このとき, 次のようにいう.

- (1) 特性方程式が  $(\xi_1, \dots, \xi_d) = (0, \dots, 0)$  以外の実数解をもたないとき, **楕円型偏微分方程式**という.
- (2) 特性方程式が  $(\xi_1, \dots, \xi_d) \neq (0, \dots, 0)$  に対して, 常に二つの異なる実数解をもつとき, **双曲型偏微分方程式**という.
- (3) 特性方程式  $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d) = 0$  が  $\xi_1 - f_1(\xi_2, \dots, \xi_d) = 0$  とかくことができ,  $f_1(\xi_2, \dots, \xi_d) = 0$  が  $(\xi_2, \dots, \xi_d) = (0, \dots, 0)$  以外の実数解をもたないとき, **放物型偏微分方程式**という.

□

楕円型偏微分方程式の典型は Laplace 方程式

$$\Delta u = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2} \right) u = 0$$

である. 実際,

$$f(\xi_1, \dots, \xi_d) = \xi_1^2 + \dots + \xi_d^2 = 0$$

となり,  $(x_1, \dots, x_d) = (0, \dots, 0)$  以外の実数解をもたない. Laplace 方程式の他に Poisson 方程式  $\Delta u = b$  や Helmholtz 方程式  $\Delta u + \omega^2 u = 0$  など楕円型に分類される. ただし,  $b$  と  $\omega$  は実数とする. これらの特徴は

- つり合い型であること
- 閉じた境界条件が必要であること

である. ただし, 閉じた境界条件とは, 偏微分方程式が定義された領域の境界上のすべての点において第 1 種境界条件 (Dirichlet 条件), 第 2 種境界条件 (Neumann 条件) あるいは第 3 種境界条件 (Robin 条件) が与えられていることを示す. 例として, 定常熱伝導 (温度), 静電場 (電位), 静的線形弾性体 (変位), 理想流体の流れ場 (ポテンシャル), Stokes 流れ場 (流速と圧力) などが挙げられる.

一方, 双曲型偏微分方程式の典型は波動方程式

$$\ddot{u} - c^2 \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u = 0$$

である。ただし、 $c$  は正の実数で波の速度とよばれる。実際、

$$f(\xi_1, \dots, \xi_d) = \xi_1^2 - c^2(\xi_2^2 + \dots + \xi_d^2) = 0$$

となり、 $(x_1, \dots, x_d) \neq (0, \dots, 0)$  に対して、常に二つの異なる実数解をもつ。双曲型偏微分方程式の特徴は

- 時間発展型であること
- 閉じた境界条件と二つの初期条件が必要であること

である。

さらに、放物型偏微分方程式の典型は拡散方程式

$$\dot{u} - a\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t} - a\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)u = 0$$

である。ただし、 $a$  は正の実数で拡散係数とよばれる。実際、

$$f(\xi_1, \dots, \xi_d) = \xi_1 - a(\xi_2^2 + \dots + \xi_d^2) = 0$$

となる。放物型偏微分方程式の特徴は

- 時間発展型であること
- 閉じた境界条件と一つの初期条件が必要であること

である。

## A.8 発散定理

第5章以降においては、[発散定理](#)に基づく積分公式が頻繁に使われる。ここでは、[Gauss の発散定理](#)と [Gauss-Green の定理](#)についてまとめておくことにしよう。

**定理 A.8.1 (Gauss の発散定理)**  $\Omega$  を  $d \in \{2, 3, \dots\}$  次元 Lipschitz 領域とする。 $\nu$  を境界  $\partial\Omega$  上の外向き単位法線 (定義 [A.5.4](#)) とする。このとき、 $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$  に対して

$$\int_{\Omega} \nabla f \, dx = \int_{\partial\Omega} f \nu \, d\gamma$$

が成り立つ。

□

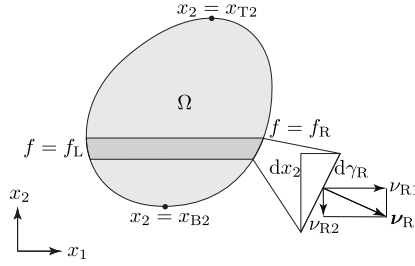


図 A.8.1: Gauss の発散定理

**証明** 詳細については、たとえば [5] p.97 Theorem 3.34) を参照されたい。概要は以下のようである。  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  は凸であるとする。  $\partial f / \partial x_1$  の  $\Omega$  上の積分は、図 A.8.1 のような高さ  $dx_2$  の帯状の微小領域で積分した結果を  $x_2$  区間で積分したものに変換することができる。このとき、

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_1} dx = \int_{x_{B2}}^{x_{T2}} (f_R - f_L) dx_2 = \int_{\partial\Omega} f \nu_1 d\gamma.$$

が成り立つ。  $\partial f / \partial x_2$  についても同様の結果を得る。また、  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  が凸でないとき、凸な部分領域に分割して、分割されたそれぞれの領域で同様の結果を得る。  $\Omega$  を  $d \in \{3, 4, \dots\}$  次元に拡張しても同様の結果が得られる。  $\square$

**定理 A.8.2 (Gauss-Green の定理)**  $\Omega$  を  $d \in \{2, 3, \dots\}$  次元 Lipschitz 領域とする。  $\nu$  を境界  $\partial\Omega$  上の外向き単位法線とする。  $1/p + 1/q = 1$  を満たす  $p, q \in (1, \infty)$  に対して  $f \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R})$  および  $g \in W^{1,q}(\Omega; \mathbb{R})$  とする。このとき、

$$\int_{\Omega} \nabla f g dx = \int_{\partial\Omega} f g \nu d\gamma - \int_{\Omega} f \nabla g dx$$

が成り立つ。  $\square$

**証明** 詳細については、たとえば [4] p. 52 Theorem 1.5.3.1 を参照されたい。概要は以下のようなものである。 Leibnitz 則と Gauss の発散定理より

$$\int_{\Omega} \nabla f g dx = \int_{\Omega} \nabla (fg) dx - \int_{\Omega} f \nabla g dx = \int_{\partial\Omega} fg \nu d\gamma - \int_{\Omega} f \nabla g dx$$

が成り立つ。  $\square$

## A.9 不等式

第4章以降の定理や命題の証明において、いくつかの不等式に対する定理が使われる。ここでは、それらをまとめておきたい。

第4章の Lebesgue 空間  $L^p(\Omega; \mathbb{R})$  (定義 4.3.3) が Banach 空間であることの証明や, 第8章と第9章において主問題の解の正則性を調べる際に, 次に示す **Hölder の不等式**が使われる (たとえば, [9] p. 40 定理 2.8).

**定理 A.9.1 (Hölder の不等式)**  $d \in \mathbb{N}$  に対して,  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^d$  上の可測集合とし,  $p, q \in (1, \infty)$  は

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

を満たすとする. このとき,  $f \in L^p(\Omega; \mathbb{R})$  と  $g \in L^q(\Omega; \mathbb{R})$  に対して

$$\|fg\|_{L^1(\Omega; \mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p(\Omega; \mathbb{R})} \|g\|_{L^q(\Omega; \mathbb{R})}$$

が成り立つ. □

定理 A.9.1 において,  $p = q = 2$  のとき, **Schwarz の不等式**とよばれる.

さらに, 第4章の Lebesgue 空間  $L^p(\Omega; \mathbb{R})$  が線形空間であることを示す際に, 次に示す **Minkowski の不等式**も使われる (たとえば, [9] p. 41 定理 2.9).

**定理 A.9.2 (Minkowski の不等式)**  $d \in \mathbb{N}$  に対して,  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^d$  上の可測集合とする.  $p \in [1, \infty)$  とする. このとき,  $f, g \in L^p(\Omega; \mathbb{R})$  に対して

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega; \mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p(\Omega; \mathbb{R})} + \|g\|_{L^p(\Omega; \mathbb{R})}$$

が成り立つ. □

定理 A.9.2 は,  $L^p(\Omega; \mathbb{R})$  における **三角不等式**に相当する.

次に示す **Poincaré の不等式** (たとえば, [4] p.26 Theorem 1.4.3.4, [2] p. 276 Theorem 6.1-2 (b)) は第5章において Poisson 問題の解の一意存在を示す際に使われる (例題 5.2.5). さらに, 第8章と第9章の誤差解析においても使われる.

**定理 A.9.3 (Poincaré の不等式)**  $d \in \mathbb{N}$  に対して,  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^d$  上の可測集合とする.  $p \in [1, \infty)$  とする. このとき,  $f \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R})$  に対して,  $\Omega$  と  $p$  だけに依存する正定数  $c$  が存在して,

$$\|f - f_0\|_{L^p(\Omega; \mathbb{R})} \leq c \|\nabla f\|_{L^p(\Omega; \mathbb{R}^d)}, \quad f_0 = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f dx$$

が成り立つ. ただし,  $|\Omega| = \int_{\Omega} dx$  とする. また,  $|\Gamma_D| > 0$  なる  $\Gamma_D \subset \partial\Omega$  において  $f = 0$  のとき,

$$\|f\|_{L^p(\Omega; \mathbb{R})} \leq c \|\nabla f\|_{L^p(\Omega; \mathbb{R}^d)}$$

が成り立つ. □

系 **A.9.4 (Poincaré の不等式)**  $d \in \mathbb{N}$  に対して,  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^d$  上の可測集合とする.  $k \in \mathbb{N}$  および  $p \in [1, \infty)$  とする.  $|\Gamma_D| > 0$  なる  $\Gamma_D \subset \partial\Omega$  において  $f = 0$  のとき,  $\Omega$  と  $p$  だけに依存する正定数  $c$  が存在して,

$$|f|_{W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})} \leq \|f\|_{W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})} \leq c |f|_{W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})}$$

が成り立つ. ただし,  $|\cdot|_{W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)}$  は

$$|f|_{W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R})} = \begin{cases} \left( \sum_{|\beta|=k} \|\nabla^\beta f\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R})}^p \right)^{1/p} & \text{for } p \in [0, \infty) \\ \max_{|\beta|=k} \|\nabla^\beta f\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R})} & \text{for } p = \infty \end{cases}$$

を表す. □

さらに, 線形弾性問題のような  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  型の関数に対しては, 次に示す **Korn の不等式** (たとえば, [6] p. 312 Lemma 5.4.21) と **Korn の第 2 不等式** が使われる (たとえば, [6] p. 312 Lemma 5.4.18. ただし,  $\Gamma_D = \partial\Omega$  が仮定され,  $c = 2$  が得られている).

定理 **A.9.5 (Korn の不等式)**  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  を Lipschitz 領域とする. このとき,  $\mathbf{f} = (f_i)_i \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$  に対して

$$\mathbf{E}(\mathbf{f}) = (e_{ij}(\mathbf{f}))_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)_{ij},$$

$$\|\mathbf{E}(\mathbf{f})\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{d \times d})}^2 = \int_{\Omega} \sum_{(i,j) \in \{1,\dots,d\}^2} e_{ij}(\mathbf{f}) e_{ij}(\mathbf{f}) \, dx.$$

とする. このとき,  $\Omega$  だけに依存する正定数  $c_1$  と  $c_2$  が存在して,

$$\|\mathbf{E}(\mathbf{f})\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{d \times d})}^2 \geq c_1 \|\mathbf{f}\|_{H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)}^2 - c_2 \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}^2$$

が成り立つ. □

定理 **A.9.6 (Korn の第 2 不等式)** 定理 **A.9.5** において,  $|\Gamma_D| > 0$  なる  $\Gamma_D \subset \partial\Omega$  において  $\mathbf{f} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$  のとき,  $\Omega$  だけに依存する正定数  $c$  が存在して,

$$\|\mathbf{f}\|_{H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)}^2 \leq c \|\mathbf{E}(\mathbf{f})\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{d \times d})}^2$$

が成り立つ. □

## A.10 Ascoli-Arzelà の定理

本書では、第8章と第9章において連続関数を設計変数においた最適化問題を扱う。その際、設計変数の許容集合が設計変数が入る線形空間上でコンパクトであることが必要となる。連続関数の集合のコンパクト性に関して、次のような [Ascoli-Arzelà の定理](#)が知られている (たとえば, [8, Section III.3, p.85]).

**定理 A.10.1 (Ascoli-Arzelà の定理)**  $X$  を完備な距離空間,  $V$  をコンパクトな  $X$  の部分集合とする.  $V$  上の連続関数の列  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が  $V$  上で一様に有界かつ同程度連続ならば,  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は一様に収束する部分列を含む.  $\square$

この定理は, 有界な領域  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  で定義された連続関数全体の集合  $C^k(\Omega; \mathbb{R})$  の有界な部分集合は,  $\|\cdot\|_{C^k(\Omega; \mathbb{R})}$  を用いて収束する部分無限点列を含むこと (コンパクト) になる. このことは, 連続関数を設計変数においた最適化問題を考えるとき, 最適化アルゴリズムを使って  $C^k(\Omega; \mathbb{R})$  の有界な部分集合の関数列がみつき, 収束したならば, 収束点はその有界な部分集合に含まれることが保証されることを表している.



## 参考文献

- [1] M. S. Berger. *Nonlinearity and Functional Analysis: Lectures on Nonlinear Problems in Mathematical Analysis*. Academic Press, New York, 1977.
- [2] P. G. Ciarlet. *Three-Dimensional Elasticity*. North-Holland, Amsterdam; Tokyo, 1988.
- [3] G. T. Gilbert. Positive definite matrices and Sylvester's criterion. *The American Mathematical Monthly*, 98(1):44–46, 1991.
- [4] P. Grisvard. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Pitman Advanced Pub. Program, Boston, 1985.
- [5] W. McLean. *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [6] J. A. Trangenstein. *Numerical Solution of Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
- [7] F. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer, New York, 1983.
- [8] Kosaku Yosida. *Functional Analysis, 6th Ed.* Springer, Berlin; New York, 1980.
- [9] 黒田 成俊. 関数解析. 共立出版, 東京, 1980.
- [10] 宮島 静雄. ソボレフ空間の基礎と応用. 共立出版, 東京, 2006.
- [11] 田村 明久 and 村松 正和. 最適化法. 共立出版, 東京, 2002.

# 索引

- Dirichlet 条件 (Dirichlet condition), 14
- Farkas の補題 (Farkas's lemma), 7
- Fourier の熱伝導法則 (Fourier's law of heat conduction), 13
- Gauss の発散定理 (Gauss's divergence theorem), 20
- Gauss-Green の定理 (Gauss-Green theorem), 20
- Hölder の不等式 (Hölder's inequality), 22
- Korn の第 2 不等式 (Korn's second inequality), 23
- Korn の不等式 (Korn's inequality), 23
- Laplace 作用素 (Laplacian operator), 17
- Lipschitz 境界 (Lipschitz boundary), 9
- Lipschitz 領域 (Lipschitz domain), 9
- Minkowski の不等式 (Minkowski's inequality), 22
- Neumann 条件 (Neumann condition), 15
- Poincaré の不等式 (Poincaré's inequality), 22
- Schwarz の不等式 (Schwarz's inequality), 22
- Sylvester の判定法 (Sylvester's criterion), 5
- 値空間 (range space), 6
- 一様連続 (uniformly continuous), 4
- 陰関数定理 (implicit function theorem), 7
- 開集合 (open set), 3
- 核空間 (kernel space), 6
- 基本境界条件 (fundamental boundary condition), 14, 17
- 境界 (boundary), 3
- 境界条件 (boundary condition), 14
- 距離空間 (metric space), 3
- 近傍 (neighbourhood), 3
- 区分的  $C^s$  級境界 (piecewise  $C^s$  class boundary), 11
- 三角不等式 (triangle inequality), 22
- 自然境界条件 (natural boundary condition), 15, 17
- 下半連続 (lower semicontinuous), 4
- 主曲率 (principal curvature), 12
- 初期条件 (initial condition), 14, 15, 17
- 正定値実対称行列 (Positive definite real symmetric matrix), 4
- 接線 (tangent), 11

- 零空間 (null space), 6
- 全単射 (bijection), 10
- 双曲型偏微分方程式 (hyperbolic partial differential equation), 19
- 像空間 (image space), 6
- 像錐 (image cone), 7
- 双対錐 (dual cone), 7
- 外向き単位法線 (outer unit normal), 12
- 第 1 種境界条件 (first-type boundary condition), 14
- 第 2 種境界条件 (second-type boundary condition), 15
- 楕円型偏微分方程式 (elliptic partial differential equation), 15, 19
- 多連結 (multiply connected), 9
- 端点 (boundary point), 3
- 単連結 (simply connected), 9
- 調和作用素 (harmonic operator), 17
- 直交補空間 (orthogonal complement space), 6
- 内点 (inner point), 3
- 熱伝導方程式 (equation of heat conduction), 13, 14
- 発散作用素 (divergence operator), 17
- 発散定理 (divergence theorem), 20
- 非正錐 (non-positive cone), 6
- 平均曲率 (mean curvature), 12
- 閉集合 (closed set), 3
- 閉包 (closure), 3
- 法線 (normal), 12
- 放物型偏微分方程式 (parabolic partial differential equation), 15, 19
- 有界集合 (bounded set), 3
- 領域 (domain), 9
- 連結 (connected), 9
- 連続 (continuous), 4