

演習問題の解答例

第1章

1.1 f_0 の Lagrange 関数を

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) &= f_0(\mathbf{u}) + \mathcal{L}_S(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) \\ &= f_0(\mathbf{u}) - \mathbf{v}_0 \cdot (\mathbf{K}(\mathbf{a})\mathbf{u} - \mathbf{p}) \\ &= (0 \quad u_2) \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &\quad - (v_{01} \quad v_{02}) \left(\frac{e_Y}{l} \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -a_2 \\ -a_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \right)\end{aligned}$$

とおく. ただし, $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^2$ は随伴変数 (Lagrange 乗数) である. \mathbf{v}_0 の任意変動 $\hat{\mathbf{v}}_0 \in U$ に対する \mathcal{L}_0 の停留条件

$$\mathcal{L}_{0\mathbf{v}_0}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\hat{\mathbf{v}}_0] = \mathcal{L}_S(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \hat{\mathbf{v}}_0) = 0$$

は, \mathbf{u} が状態方程式を満たすときに成り立つ. \mathbf{u} の任意変動 $\hat{\mathbf{u}} \in U$ に対する \mathcal{L}_0 の停留条件

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{0\mathbf{u}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\hat{\mathbf{u}}] &= f_{0\mathbf{u}}(\mathbf{u})[\hat{\mathbf{u}}] - \mathcal{L}_{S\mathbf{u}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\hat{\mathbf{u}}] \\ &= 2(0 \quad u_2) \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{pmatrix} - \mathbf{v}_0 \cdot (\mathbf{K}(\mathbf{a})\hat{\mathbf{u}}) \\ &= -\hat{\mathbf{u}} \cdot \left(\mathbf{K}^\top(\mathbf{a})\mathbf{v}_0 - \begin{pmatrix} 0 \\ 2u_2 \end{pmatrix} \right) = 0\end{aligned}$$

は, \mathbf{v}_0 が

$$\frac{e_Y}{l} \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -a_2 \\ -a_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{01} \\ v_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2u_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

を満たすときに成り立つ. 式 (1) が f_0 に対する随伴方程式である. また, \mathbf{u} が状態方程式を満たし, \mathbf{v}_0 が式 (1) の解のとき, 式 (1.1.36) と同一の

$$\mathcal{L}_{0\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{b}] = f'_0(\mathbf{u}(\mathbf{a}))[\mathbf{b}]$$

$$\begin{aligned}
&= - \left\{ v_0 \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{a})}{\partial a_1} \mathbf{u} \quad \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{a})}{\partial a_2} \mathbf{u} \right) \right\} \mathbf{b} \\
&= l \left(-\sigma(u_1) \varepsilon(v_{01}) \quad -\sigma(u_2 - u_1) \varepsilon(v_{02} - v_{01}) \right) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{b}
\end{aligned}$$

が得られる。

1.2 $\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2} \pi(\mathbf{a}, \mathbf{u})$ を満たす \mathbf{u} は、任意の $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}, \mathbf{u})[\hat{\mathbf{u}}] = \hat{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{K}(\mathbf{a}) \mathbf{u} - \mathbf{p}) = 0$$

を満たす。すなわち、 \mathbf{u} が状態決定問題 1.1.3 の解ならば満たされる。また、

$$\pi_{\mathbf{u}\mathbf{u}}(\mathbf{a}, \mathbf{u})[\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}] = \hat{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{K}(\mathbf{a}) \hat{\mathbf{u}}) > \alpha \|\hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbb{R}^2}^2$$

を満たす $\alpha > 0$ が存在するので、状態決定問題 (問題 1.1.3) の解 \mathbf{u} は $\pi(\mathbf{a}, \mathbf{u})$ の最小点であることが確かめられる。一方、 \mathbf{a} に対する $\pi(\mathbf{a}, \mathbf{u})$ の最大点は、 $-\pi(\mathbf{a}, \mathbf{u})$ の最小点となる。 \mathbf{u} が状態決定問題の解のとき、任意の $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\begin{aligned}
-\pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \mathbf{u})[\mathbf{b}] &= -\frac{1}{2} \left\{ \mathbf{u} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{a})}{\partial a_1} \mathbf{u} \quad \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{a})}{\partial a_2} \mathbf{u} \right) \right\} \mathbf{b} \\
&= -\frac{1}{2} \frac{e_Y}{l} \begin{pmatrix} u_1 u_1 & (u_2 - u_1)(u_2 - u_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{b}
\end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、 \mathbf{g}_0 は式 (1.1.36) のベクトルを表す。

1.3 \mathbf{u} は式 (1.1.20) で与えられることより

$$f_0(\mathbf{u}(\mathbf{a})) = \left(\frac{2}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right)^2$$

となる。例題 1.1.7 のように

$$\tilde{f}_0(a_1) = f_0(\mathbf{u}(a_1, 1 - a_1)) = \left(\frac{2}{a_1} + \frac{1}{1 - a_1} \right)^2$$

とおく。このとき、

$$\frac{d\tilde{f}_0}{da_1} = 2 \left(\frac{2}{a_1} + \frac{1}{1 - a_1} \right) \left\{ -\frac{2}{a_1^2} + \frac{1}{(1 - a_1)^2} \right\} = 0$$

を満たす a_1 は 2 , $2 - \sqrt{2}$ と $2 + \sqrt{2}$ である。これらに対する a_2 はそれぞれ -1 , $\sqrt{2} - 1$ と $-\sqrt{2} - 1$ である。これらのうち $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ を満たすのは $\mathbf{a} = (2 - \sqrt{2}, \sqrt{2} - 1)^\top$ のときである。また、 f_0 と f_1 の凸性により、KKT 条件を満たすこの \mathbf{a} は演習問題 1.1 の最小点である。

1.4 設計変数 \mathbf{a} の許容集合 \mathcal{D} の定義式 (1.1.16) 中の断面積 a_1 に対する側面制約が有効となる。そこで, $f_1(\mathbf{a}) \leq 0$ に加えて, 2 番目の不等式制約を

$$f_2(\mathbf{a}) = a_{01} - a_1 \leq 0$$

とおく。このとき, f_2 の断面積微分は

$$f_{2\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{g}_2 \quad (2)$$

となる。 $f_2 \leq 0$ に対する Lagrange 乗数を λ_2 とおけば, KKT 条件は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \lambda_1, \lambda_2) &= \mathbf{g}_0 + \lambda_1 \mathbf{g}_1 + \lambda_2 \mathbf{g}_2 = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, \\ \mathcal{L}_{\lambda_1}(\mathbf{a}, \lambda_1, \lambda_2) &= f_1(\mathbf{a}) = l(a_1 + a_2) - c_1 \leq 0, \\ \mathcal{L}_{\lambda_2}(\mathbf{a}, \lambda_1, \lambda_2) &= f_2(\mathbf{a}) = a_{01} - a_1 \leq 0, \\ \lambda_1 f_1(\mathbf{a}) &= 0, \\ \lambda_2 f_2(\mathbf{a}) &= 0, \\ \lambda_1 &\geq 0, \\ \lambda_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

で与えられる。最適解では $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $\lambda_1 > 0$ および $\lambda_2 > 0$ となる。そこで, 式 (3) に式 (1.1.28), 式 (1.1.17) および式 (2) の \mathbf{g}_0 , \mathbf{g}_1 および \mathbf{g}_2 を代入すれば,

$$l \begin{pmatrix} -\sigma(u_1)\varepsilon(u_1) \\ -\sigma(u_2 - u_1)\varepsilon(u_2 - u_1) \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} l \\ l \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。この λ_1 と λ_2 に対する連立 1 次方程式を解けば,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sigma(u_2 - u_1)\varepsilon(u_2 - u_1) \\ -l\sigma(u_1)\varepsilon(u_1) + l\sigma(u_2 - u_1)\varepsilon(u_2 - u_1) \end{pmatrix} \\ &= \sigma(u_2 - u_1)\varepsilon(u_2 - u_1) \begin{pmatrix} 1 \\ l \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

1.5 随伴変数法を用いることにする。式 (1.1.36) は

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_{0\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) [\mathbf{b}] \\ &= - \left\{ \mathbf{v}_0 \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{a})}{\partial a_1} \mathbf{u} & \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{a})}{\partial a_2} \mathbf{u} \end{pmatrix} \right\} \mathbf{b} \\ &= - \frac{e_Y}{l} \begin{pmatrix} v_{01} & v_{02} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 2a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a_2 & -2a_2 \\ -2a_2 & 2a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right) \mathbf{b} \\ &= - \frac{e_Y}{l} \begin{pmatrix} 2a_1 u_1 v_{01} & 2a_2 (u_2 - u_1) (v_{02} - v_{01}) \end{pmatrix} \mathbf{b} \end{aligned}$$

$$= \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{b}$$

となる。そこで、自己随伴関係 (式 (1.1.35)) を用いれば、

$$\mathbf{g}_0 = -\frac{e_Y}{l} \begin{pmatrix} 2a_1 u_1^2 \\ 2a_2 (u_2 - u_1)^2 \end{pmatrix}$$

となる。

Hesse 行列は次のように計算される。設計変数 (\mathbf{a}, \mathbf{u}) の任意変動 $(\mathbf{b}_1, \hat{\mathbf{u}}_1)$ と $(\mathbf{b}_2, \hat{\mathbf{u}}_2)$ に対する Lagrange 関数 \mathcal{L}_0 の 2 階微分は式 (1.1.38) となる。ここで、 \mathbf{u} と \mathbf{v}_0 を設計変数 \mathbf{a} のときの状態決定問題 (問題 1.1.3) と随伴問題 (問題 1.1.5) の解とする。さらに、 $\hat{\mathbf{u}}_1$ と $\hat{\mathbf{u}}_2$ をそれぞれ \mathbf{a} の任意変動 \mathbf{b}_1 と \mathbf{b}_2 に対して状態決定問題の解が満たされたもとでの \mathbf{u} の変動とする。すなわち、 $i \in \{1, 2\}$ に対して

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}(a) [\mathbf{b}_i] &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{a}^\top} \mathbf{b}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial a_1} & \frac{\partial u_1}{\partial a_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial a_1} & \frac{\partial u_2}{\partial a_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{i1} \\ b_{i2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2u_1/a_1 & 0 \\ -2u_1/a_1 & -2(u_2 - u_1)/a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{i1} \\ b_{i2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とおく。このとき、Lagrange 関数 \mathcal{L}_0 の 2 階微分は

$$\begin{aligned} &(\mathcal{L}_{0\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) [\mathbf{b}_1] + \mathcal{L}_{0\mathbf{u}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) [\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) [\mathbf{b}_1]])_{\mathbf{a}} [\mathbf{b}_2] \\ &+ (\mathcal{L}_{0\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) [\mathbf{b}_1] + \mathcal{L}_{0\mathbf{u}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) [\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) [\mathbf{b}_1]])_{\mathbf{u}} [\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) [\mathbf{b}_2]] \\ &= \mathcal{L}_{S\mathbf{a}\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] + 2\mathcal{L}_{S\mathbf{a}\mathbf{u}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) [\mathbf{b}_1, \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) [\mathbf{b}_2]] \\ &= \mathbf{b}_1 \cdot \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{g}_0}{\partial a_1} & \frac{\partial \mathbf{g}_0}{\partial a_2} \end{pmatrix} \mathbf{b}_2 \right) \\ &\quad - 2\mathbf{b}_1 \cdot \left(\begin{pmatrix} \mathbf{v}_0^\top \mathbf{K}_{a_1} & 0 \\ \mathbf{v}_0^\top \mathbf{K}_{a_2} & -2(u_2 - u_1)/a_2 \end{pmatrix} \mathbf{b}_2 \right) \\ &= -\frac{e_Y}{l} \mathbf{b}_1 \cdot \left(\begin{pmatrix} 2u_1 v_{01} & 0 \\ 0 & 2(u_2 - u_1)(v_{02} - v_{01}) \end{pmatrix} \mathbf{b}_2 \right) \\ &\quad - 2\mathbf{b}_1 \cdot \left(\frac{e_Y}{l} \begin{pmatrix} 2a_1 v_{01} & 0 \\ -2a_2 (v_{02} - v_{01}) & 2a_2 (v_{02} - v_{01}) \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. \times \begin{pmatrix} -2u_1/a_1 & 0 \\ -2u_1/a_1 & -2(u_2 - u_1)/a_2 \end{pmatrix} \mathbf{b}_2 \right) \\ &= -\frac{e_Y}{l} \mathbf{b}_1 \cdot \left(\begin{pmatrix} 2u_1 v_{01} & 0 \\ 0 & 2(u_2 - u_1)(v_{02} - v_{01}) \end{pmatrix} \mathbf{b}_2 \right) \\ &\quad - \frac{2e_Y}{l} \mathbf{b}_1 \cdot \left(\begin{pmatrix} -4u_1 v_{01} & 0 \\ 0 & -4(u_2 - u_1)(v_{02} - v_{01}) \end{pmatrix} \mathbf{b}_2 \right) \\ &= \frac{6e_Y}{l} \mathbf{b}_1 \cdot \left(\begin{pmatrix} u_1 v_{01} & 0 \\ 0 & (u_2 - u_1)(v_{02} - v_{01}) \end{pmatrix} \mathbf{b}_2 \right) \end{aligned}$$

となる。そこで、自己随伴関係 (式 (1.1.35)) を用いれば、

$$\mathbf{H}_0 = \frac{6e_Y}{l} \begin{pmatrix} u_1^2 & 0 \\ 0 & (u_2 - u_1)^2 \end{pmatrix}$$

となる。

1.6 評価関数は

$$f(\mathbf{a}) = \frac{1}{6} a_1 a_2$$

となる。そこで、

$$\mathbf{g}(\mathbf{a}) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。Hesse 行列 \mathbf{H} は正定値行列ではないことに注意されたい。

1.7 問題 1.2.1 のポテンシャルエネルギーは、式 (1.1.9) が拡張された

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{u}) &= \int_0^l \frac{1}{2} \sigma(u) \varepsilon(u) a_1 dx + \cdots + \int_{(n-1)l}^{nl} \frac{1}{2} \sigma(u) \varepsilon(u) a_n dx \\ &\quad - \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} \\ &= \frac{1}{2} \frac{e_Y}{l} a_1 u_1^2 + \cdots + \frac{1}{2} \frac{e_Y}{l} a_n (u_n - u_{n-1})^2 - p_1 u_1 - \cdots - p_n u_n \end{aligned}$$

によって与えられる。 π の停留条件は式 (1.2.1) に相当し、

$$\begin{aligned} &\frac{e_Y}{l} \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_2 & a_2 + a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} + a_n & -a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とかかれる。 $\mathbf{K}(\mathbf{a})$ はこの式における左辺の係数行列である。

1.8 $\max_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2} \pi(\mathbf{a}, \mathbf{p})$ を満たす \mathbf{p} は、任意の $\hat{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$-\pi_{\mathbf{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{p}) [\hat{\mathbf{p}}] = \hat{\mathbf{p}} \cdot (\mathbf{A}(\mathbf{a}) \mathbf{p} + \mathbf{u}) = 0$$

を満たす. そこで, \mathbf{p} が状態決定問題 (問題 1.3.1) の解ならば満たされる. また,

$$-\pi_{\mathbf{p}\mathbf{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{p}) [\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}] = \hat{\mathbf{p}} \cdot (\mathbf{A}(\mathbf{a}) \hat{\mathbf{p}}) > \alpha \|\hat{\mathbf{p}}\|_{\mathbb{R}^2}^2$$

を満たす $\alpha > 0$ が存在するので, 状態決定問題を満たす \mathbf{p} は $\pi(\mathbf{a}, \mathbf{p})$ の最大点であることが確かめられる. 一方, \mathbf{p} が状態決定問題の解のとき, 任意の $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \mathbf{p}) [\mathbf{b}] &= -\frac{1}{2} \left\{ \mathbf{p} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{a})}{\partial a_1} \mathbf{p} \quad \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{a})}{\partial a_2} \mathbf{p} \right) \right\} \mathbf{b} \\ &= -\frac{1}{(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2)^2} \begin{pmatrix} a_1 \{a_0^2 p_1 + a_2^2 (p_1 - p_2)\}^2 \\ a_2 \{a_0^2 p_2 + a_1^2 (p_2 - p_1)\}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} \frac{u_1^2}{a_1} \\ \frac{u_2^2}{a_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{b} \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, \mathbf{g}_0 は式 (1.3.19) のベクトルを表す.

1.9 図 1.5.2 のように, $\mathbf{l} = (l_0, l_1, l_2)^\top \in \mathbb{R}^3$ を三つの円管の長さとする. このとき, 3つの円管の体積の和を円周率で割った値は

$$f(l_0, l_1, l_2) = r_0^2 l_0 + r_1^2 l_1 + r_2^2 l_2$$

で与えられる. 一方, 幾何学的関係から

$$h_1 = l_1 \sin \theta_1 - \alpha_2 = 0$$

$$h_2 = l_0 - \alpha_1 + l_1 \cos \theta_1 = 0$$

$$h_3 = l_2 \sin \theta_2 - \beta_2 = 0$$

$$h_4 = l_0 - \beta_1 + l_2 \cos \theta_2 = 0$$

が成り立つ. これらの関係を用いれば,

$$f(l_0) = r_0^2 l_0 + r_1^2 \sqrt{\alpha_2^2 + (\alpha_1 - l_0)^2} + r_2^2 \sqrt{\beta_2^2 + (\beta_1 - l_0)^2}$$

とかける. ここで,

$$\begin{aligned} \frac{df}{dl_0} &= r_0^2 - \frac{r_1^2 (\alpha_1 - l_0)}{\sqrt{\alpha_2^2 + (\alpha_1 - l_0)^2}} - \frac{r_2^2 (\alpha_2 - l_0)}{\sqrt{\beta_2^2 + (\beta_1 - l_0)^2}} \\ &= r_0^2 - \frac{r_1^2 (\alpha_1 - l_0)}{l_1} - \frac{r_2^2 (\alpha_2 - l_0)}{l_2} \\ &= r_0^2 - r_1^2 \cos \theta_1 - r_2^2 \cos \theta_2 = 0 \end{aligned}$$

が得られる.

第2章

2.1 A の固有値と固有ベクトルをそれぞれ $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_d \in \mathbb{R}$ と $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d \in \mathbb{R}^d$ とかく. ここで, 固有ベクトルは互いに直交しているので, 任意のベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ は, 任意の $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_d)^\top \in \mathbb{R}^d$ を用いて

$$\mathbf{x} = \sum_{i \in \{1, \dots, d\}} \mathbf{x}_i \xi_i$$

とかくことができる. ただし, $\|\mathbf{x}_1\|_{\mathbb{R}^d} = \dots = \|\mathbf{x}_d\|_{\mathbb{R}^d} = 1$ とおく. このようにおいても, 任意の $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$ に対して任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ が得られる. ここで, A が正定値ならば, 定理 A.2.1 より, $\lambda_d \geq \dots \geq \lambda_1 > 0$ である. そこで, 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}\}$ に対して

$$\mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} = \sum_{i \in \{1, \dots, d\}} \lambda_i \xi_i^2 \geq \lambda_1 \|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbb{R}^d}^2 = \lambda_1 \|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^d}^2 > 0$$

を得る. また, A が負定値ならば, $\lambda_d \leq \dots \leq \lambda_1 < 0$ である. そこで, 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}\}$ に対して

$$\mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} = \sum_{i \in \{1, \dots, d\}} \lambda_i \xi_i^2 \leq \lambda_1 \|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbb{R}^d}^2 = \lambda_1 \|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^d}^2 < 0$$

を得る.

2.2 f が最小値をとるための必要条件は, 定理 2.5.2 より,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= ax_1 + bx_2 + d = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= bx_1 + cx_2 + e = 0 \end{aligned}$$

となる. これらの式は

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x_1 \\ \partial f / \partial x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とかける. 十分条件は, 定理 2.5.6 より f が凸関数であることを示せばよい. そのためには, 定理 2.4.6 より Hesse 行列が半正定値であることを示せばよい. Hesse 行列は

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} = a, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = b, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} = c$$

となるので,

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

となる. この行列の正定値性を Sylvester の判定法 (定理 A.2.2) で与えれば,

$$a > 0, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2 > 0$$

となる. この関係は $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ によらずに成り立つ. なお, この問題の $f(x_1, x_2)$ は, $\mathbf{b} = (d, c)^\top$ とかけば,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (d \ c) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{x} \cdot (\mathbf{H}\mathbf{x}) + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x} \end{aligned}$$

とかける関数であったことがわかる.

2.3 問題を

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \{ f_0(\mathbf{x}) = -x_1x_2 \mid f_1(\mathbf{x}) = 2(x_1 + x_2) - c_1 \leq 0 \}$$

とかくことができる. $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ を周の長さ制限に対する Lagrange 乗数とおいて, この問題の Lagrange 関数を

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda_1) = f_0(\mathbf{x}) + \lambda_1 f_1(\mathbf{x}) = -x_1x_2 + \lambda_1 \{2(x_1 + x_2) - c_1\}$$

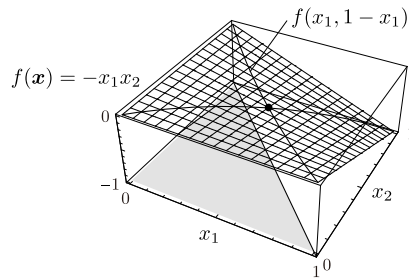
とおく. KKT 条件は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{x_1} &= -x_2 + 2\lambda_1 = 0, \\ \mathcal{L}_{x_2} &= -x_1 + 2\lambda_1 = 0, \\ \mathcal{L}_\lambda &= f_1(\mathbf{x}) = 2(x_1 + x_2) - c_1 \leq 0, \\ \lambda_1 f_1(\mathbf{x}) &= \lambda_1 \{2(x_1 + x_2) - c_1\} = 0, \\ \lambda_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

となる. これより,

$$\lambda_1 = \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{2} = \frac{c_1}{8}$$

のとき KKT 条件は満たされる. この結果は正方形を意味する. KKT 条件を満たす解が最小点であることは次のようにして示される. f_0 は凸関数ではない (例題 2.4.9). しかし, $\tilde{f}_0(x_1) = f_0(x_1, -x_1 + c_1/2)$ は凸関数となる. そこで, 制約なしの $\tilde{f}_0(x_1)$ の最小化問題とみなせば, KKT 条件を満たす (x_1, x_2) が最小点となることが示される. 図 P.2.1 に $c_1 = 2$ のときの様子を示す.

図 P.2.1: 関数 $f_0(\mathbf{x}) = -x_1x_2$

第3章

3.1 Newton-Raphson 法を示す式 (3.5.7) を f のためにかきかえれば,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{g(x_k)}$$

となる。また, $g(x_k)$ を差分におきかえれば,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k)$$

が得られる。

3.2 $f(\mathbf{x}_k + \bar{\epsilon}_g \bar{\mathbf{y}}_g)$ を $\bar{f}(\bar{\epsilon}_g)$ とかき, さらに,

$$\frac{d\bar{f}}{d\bar{\epsilon}_g}(\bar{\epsilon}_g) = \bar{g}(\bar{\epsilon}_g) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k + \bar{\epsilon}_g \bar{\mathbf{y}}_g) \cdot \bar{\mathbf{y}}_g$$

とかくことにする。厳密直線探索法 (問題 3.4.1) では

$$\bar{g}(\bar{\epsilon}_g) = 0$$

を満たすように $\bar{\epsilon}_g$ を決定する。この非線形方程式の解を Newton-Raphson 法で求める場合には,

$$\bar{g}(\bar{\epsilon}_{gl+1}) = \bar{g}(\bar{\epsilon}_{gl}) + h(\bar{\epsilon}_{gl})(\bar{\epsilon}_{gl+1} - \bar{\epsilon}_{gl}) = 0$$

を満たすように $\bar{\epsilon}_{gl+1} = \bar{\epsilon}_{gl} - \bar{g}(\bar{\epsilon}_{gl})/h(\bar{\epsilon}_{gl})$ を求めることになる。ただし, $h(\bar{\epsilon}_{gl})$ は \bar{f} の 2 階導関数である。セカント法を用いる場合には,

$$h(\bar{\epsilon}_{gl}) = \frac{\bar{g}(\bar{\epsilon}_{gl}) - \bar{g}(\bar{\epsilon}_{gl-1})}{\bar{\epsilon}_{gl} - \bar{\epsilon}_{gl-1}}$$

とにおいて,

$$\bar{\epsilon}_{gl+1} = \bar{\epsilon}_{gl} - \frac{\bar{\epsilon}_{gl} - \bar{\epsilon}_{gl-1}}{\bar{g}(\bar{\epsilon}_{gl}) - \bar{g}(\bar{\epsilon}_{gl-1})} \bar{g}(\bar{\epsilon}_{gl})$$

によって $\bar{\epsilon}_{gl+1}$ を求めることになる。

3.3 共役勾配法では, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}_X$ および $\bar{\mathbf{y}}_{g_0} = -\mathbf{g}_0 = -\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = -\mathbf{b}$ とおき, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して, 式 (3.4.8) により $\bar{\epsilon}_{g_k}$ が計算され, $k \in \mathbb{N}$ に対して, 式 (3.4.9) から式 (3.4.12) より $\mathbf{x}_k, \mathbf{g}_k, \beta_k$ および $\bar{\mathbf{y}}_{g_k}$ が計算される. したがって,

$$\begin{aligned}
& \bar{\mathbf{y}}_{k+1} \cdot (\mathbf{B}\bar{\mathbf{y}}_{gk}) \\
&= (-\mathbf{g}_{k+1} + \beta_{k+1}\bar{\mathbf{y}}_{gk}) \cdot (\mathbf{B}\bar{\mathbf{y}}_{gk}) \\
&= \left(-\mathbf{g}_{k+1} + \frac{\mathbf{g}_{k+1} \cdot \mathbf{g}_{k+1}}{\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_k} \bar{\mathbf{y}}_{gk} \right) \cdot (\mathbf{B}\bar{\mathbf{y}}_{gk}) \\
&= \left\{ -\mathbf{g}_k - \bar{\epsilon}_{gk} \mathbf{B}\bar{\mathbf{y}}_{gk} + \frac{(\mathbf{g}_k + \bar{\epsilon}_{gk} \mathbf{B}\bar{\mathbf{y}}_{gk}) \cdot (\mathbf{g}_k + \bar{\epsilon}_{gk} \mathbf{B}\bar{\mathbf{y}}_{gk})}{\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_k} \bar{\mathbf{y}}_{gk} \right\} \\
&\quad \cdot (\mathbf{B}\bar{\mathbf{y}}_{gk}) \\
&= \left\{ -\mathbf{g}_k - \bar{\epsilon}_{gk} \mathbf{B}\bar{\mathbf{y}}_{gk} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_k + 2\bar{\epsilon}_{gk} \mathbf{g}_k \cdot (\mathbf{B}\bar{\mathbf{y}}_{gk}) + \bar{\epsilon}_{gk}^2 (\mathbf{B}\bar{\mathbf{y}}_{gk}) \cdot (\mathbf{B}\bar{\mathbf{y}}_{gk})}{\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_k} \bar{\mathbf{y}}_{gk} \right\} \\
&\quad \cdot (\mathbf{B}\bar{\mathbf{y}}_{gk}) \\
&= \left\{ -\mathbf{g}_k - \frac{\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_k}{\bar{\mathbf{y}}_{gk} \cdot (\mathbf{B}\bar{\mathbf{y}}_{gk})} (\mathbf{B}\bar{\mathbf{y}}_{gk}) \right\} \cdot (\mathbf{B}\bar{\mathbf{y}}_{gk}) + \bar{\mathbf{y}}_{gk} \cdot (\mathbf{B}\bar{\mathbf{y}}_{gk}) \\
&\quad + 2\mathbf{g}_k \cdot (\mathbf{B}\bar{\mathbf{y}}_{gk}) + \frac{(\mathbf{B}\bar{\mathbf{y}}_{gk}) \cdot (\mathbf{B}\bar{\mathbf{y}}_{gk})}{\bar{\mathbf{y}}_{gk} \cdot (\mathbf{B}\bar{\mathbf{y}}_{gk})} \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_k \\
&= (\mathbf{g}_k + \bar{\mathbf{y}}_{gk}) \cdot (\mathbf{B}\bar{\mathbf{y}}_{gk}) = \beta_k \bar{\mathbf{y}}_{g_{k-1}} \cdot (\mathbf{B}\bar{\mathbf{y}}_{gk})
\end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, 厳密直線探索より $\bar{\mathbf{y}}_{g_{k-1}} \cdot \mathbf{g}_k = 0$ を用いた. $k=0$ のとき, $\bar{\mathbf{y}}_{g_0} = -\mathbf{g}_0$ より $(\mathbf{g}_0 + \bar{\mathbf{y}}_{g_0}) \cdot (\mathbf{B}\bar{\mathbf{y}}_{g_0}) = 0$ が成り立つ. したがって, $k \in \mathbb{N}$ に対して $\bar{\mathbf{y}}_{g_{k+1}} \cdot (\mathbf{B}\bar{\mathbf{y}}_{gk}) = 0$ となる.

3.4 演習問題 1.6 で得られた \mathbf{a} の変動に対する $f(\mathbf{a})$ の勾配 $\mathbf{g}(\mathbf{a})$ と Hesse 行列 \mathbf{H} を用いる. Newton 法では, $\mathbf{H}\mathbf{b} = -\mathbf{g}(\mathbf{a}_0)$ より,

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} a_{02} \\ a_{01} \end{pmatrix}$$

によって探索ベクトル \mathbf{b} が求められる. この方程式を解けば,

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \end{pmatrix}$$

となる. そこで, 1 回目の Newton 法によって更新された点

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{01} - a_{01} \\ a_{02} - a_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は f の最小点となる。Newton 法を 1 回用いただけで最小点が得られた理由は、 f の Taylor 展開が勾配と Hesse 行列で完全に記述されていたためである。その際、Hesse 行列の正定値性は必要ないことが確かめられた。

第 4 章

4.1 U と V を

$$\begin{aligned} U &= \{u \in H^1((0, l) \times (0, t_T); \mathbb{R}) \mid \\ &\quad u(0, t) = 0 \text{ for } t \in (0, t_T), u(x, 0) = \alpha(x) \text{ for } x \in (0, l)\}, \\ V &= \{v \in H^1((0, l) \times (0, t_T); \mathbb{R}) \mid \\ &\quad v(0, t) = 0 \text{ for } t \in (0, t_T), v(x, 0) = 0 \text{ for } x \in (0, l)\} \end{aligned}$$

とおく。 $u_0(x, 0) = \alpha(x)$ を満たす $H^1((0, l) \times (0, t_T); \mathbb{R})$ の要素 u_0 を選んで固定する。任意の $v \in V$ に対する $f(u)$ の第 1 変分は

$$\begin{aligned} &f'(u)[v] \\ &= \int_0^{t_T} \left\{ \int_0^l (\rho \dot{u} \dot{v} - e \nabla u \nabla v + b v) a_S dx + p_N v(l, t) a_S(l, t) \right\} dt \\ &\quad - \int_0^l \rho \beta v(x, t_T) a_S dx \\ &= \int_0^{t_T} \left\{ \int_0^l (-\rho \ddot{u} + \nabla(e \nabla u) + b) v a_S dx \right. \\ &\quad \left. - (e \nabla u(l, t) - p_N) v(l, t) a_S(l) \right\} dt \\ &\quad + \int_0^l \rho (\dot{u}(x, t_T) - \beta) v(x, t_T) a_S dx \end{aligned}$$

となる。そこで、任意の $v \in V$ に対して $f(u)$ が停留する条件は、 $u - u_0 \in V$ に対して $f'(u)[v] = 0$ となる条件によって与えられる。すなわち、

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u} - \nabla(e \nabla u) &= \rho \ddot{u} - \nabla \sigma(u) = b \text{ for } (x, t) \in (0, l) \times (0, t_T), \\ e \nabla u(l, t) &= \sigma(u(l, t)) = p_N \text{ for } t \in (0, t_T), \\ \dot{u}(x, t_T) &= \beta \text{ for } x \in (0, l) \end{aligned}$$

を得る。その際、 $f(u)$ と $f'(u)[v]$ が意味をもつためには、

$$\begin{aligned} \rho &\in L^\infty((0, l); \mathbb{R}), \quad \alpha \in H^1((0, l); \mathbb{R}), \quad \beta \in L^2((0, l); \mathbb{R}), \\ b &\in L^2((0, l) \times (0, t_T); \mathbb{R}), \quad p_N \in L^2((0, t_T); \mathbb{R}) \end{aligned}$$

であればよい。

4.2 $u \in U$ の任意変動 $v \in V$ に対する作用積分 $f(u)$ の第1変分は

$$\begin{aligned} f'(u, \dot{u})[v, \dot{v}] &= \int_0^{t_T} \left(\frac{\partial l}{\partial u} \cdot v + \frac{\partial l}{\partial \dot{u}} \cdot \dot{v} \right) dt \\ &= \int_0^{t_T} \left(\frac{\partial l}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \dot{u}} \right) \cdot v dt + \frac{\partial l}{\partial \dot{u}}(t_T) \cdot v(t_T) - \frac{\partial l}{\partial \dot{u}}(0) \cdot v(0) \\ &= \int_0^{t_T} \left(\frac{\partial l}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \dot{u}} \right) \cdot v dt \end{aligned}$$

となる. 任意の $v \in V$ に対して $f'(u, \dot{u})[v, \dot{v}] = 0$ が成り立つためには, Lagrange の運動方程式が成り立たなければならない.

4.3 $u \in U$ の任意変動 $v \in V$ と $q \in Q$ の任意変動 $r \in Q$ に対する作用積分 $f(u, q)$ の第1変分は,

$$\begin{aligned} f'(u, q)[v, r] &= \int_0^{t_T} \left(-\dot{q} \cdot v - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \cdot v - \dot{r} \cdot u - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \cdot r \right) dt \\ &= \int_0^{t_T} \left\{ -\left(\dot{q} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \right) \cdot v + \left(\dot{r} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \right) \cdot r \right\} dt \end{aligned}$$

となる. 任意の $v \in V$ と任意の $r \in Q$ に対して $f'(u, q)[v, r] = 0$ となるためには, Hamilton の運動方程式が成り立たなければならない. また, Hamilton の運動方程式が成り立つとき,

$$\dot{\mathcal{H}}(u, q) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \cdot \dot{u} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \cdot \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0$$

が成り立つ. さらに, 図 4.1.1 のばね質点系に対して, 外力 $p = 0$ のとき, 運動量は $q = m\dot{u}$ によって与えられるので,

$$\mathcal{H}(u, q) = -l(u, q) + q\dot{u} = -\frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}ku^2 + q\dot{u} = \frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}ku^2$$

となる. すなわち, 外力が作用しないとき, 運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和が Hamilton 関数となり, それが保存されることを示している.

4.4 $Y \Subset Z$ ならば, ある正定数 c が存在して, 任意の $x \in Y$ に対して

$$\|x\|_Z \leq c\|x\|_Y$$

が成り立つ. このとき, Y' と Z' のノルムの定義 (定義 4.4.5) を用いれば, 任意の $\phi \in Z'$ に対して

$$\frac{1}{c}\|\phi\|_{Y'} = \sup_{x \in Y \setminus \{0_Y\}} \frac{|\langle \phi, x \rangle|}{c\|x\|_Y} \leq \sup_{x \in Z \setminus \{0_Z\}} \frac{|\langle \phi, x \rangle|}{\|x\|_Z} = \|\phi\|_{Z'}$$

が成り立つ. したがって, $\|\phi\|_{Y'} \leq c\|\phi\|_{Z'}$ より, $Z' \Subset Y'$ を得る.

第5章

5.1 Dirichlet 条件が境界全体で与えられていることから, $U = H_0^1(\Omega; \mathbb{R})$ とおく. このとき, 任意の $v \in U$ に対して,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\Delta u + u) v \, dx &= \int_{\Omega} (-\nabla \cdot \nabla u + u) v \, dx \\ &= - \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\gamma + \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) \, dx \\ &= \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) \, dx = \int_{\Omega} bv \, dx \end{aligned}$$

が成り立つ. そこで, この問題の弱形式は, 任意の $v \in U$ に対して

$$a(u, v) = l(v)$$

を満たす $\tilde{u} = u - u_D \in U$ を求める問題となる. ただし,

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) \, dx, \quad l(v) = \int_{\Omega} bv \, dx$$

である.

この弱形式の解が一意に存在するためには, Lax-Milgram の定理の仮定が成り立てばよい. $U = H_0^1(\Omega; \mathbb{R})$ は Hilbert 空間である. また, 任意の $v \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R})$ に対して

$$a(v, v) = \|v\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R})}^2$$

が成り立つことから, a は強圧的かつ有界である. そこで, $\hat{l} \in U'$ が成り立てばよい. \hat{l} に対して,

$$\begin{aligned} |\hat{l}(v)| &\leq \int_{\Omega} |bv| \, dx + \int_{\Omega} (|\nabla u_D \cdot \nabla v| + |u_D v|) \, dx \\ &\leq \|b\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R})} \|v\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R})} + \|\nabla u_D\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \|u_D\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R})} \|v\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R})} \\ &\leq \left(\|b\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R})} + \|u_D\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R})} \right) \|v\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R})} \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって, $b \in L^2(\Omega; \mathbb{R})$ および $u_D \in H^1(\Omega; \mathbb{R})$ であればよい.

5.2 点 \boldsymbol{x}_A は同次 Dirichlet 境界と同次 Neumann 境界の境界で, 開き角 $\alpha = \pi/2$ である. そこで, 定理 5.3.2 の (2) より, 点 \boldsymbol{x}_A の近傍 B_A では $\boldsymbol{u} \in H^2(B_A; \mathbb{R}^2)$ となり, 点 \boldsymbol{x}_A は特異点とはならない. 一方, 点 \boldsymbol{x}_B は同次 Neumann 境界と非同次 Neumann 境界の境界で, 開き角 α は 5.3.2 の (1) より, この開き角では解の特異性は生じない. しかし, \boldsymbol{p}_N は \boldsymbol{x}_B の近傍 B_B では $(0, 0)^T$ と $(0, -1)^T$ が Γ_p を境界にして階段関数状に変化している. これより, $\boldsymbol{p}_N \in L^\infty(B_B; \mathbb{R}^2)$ とみなせば, $\boldsymbol{u} \in C^{0,1}(B_B; \mathbb{R}^2)$ となり, $H^2(B_B; \mathbb{R}^2)$ には入らない.

5.3 この問題に対する関数空間を

$$U = \{ \mathbf{u} \in H^1((0, t_T); H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)) \mid \mathbf{u} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \Gamma_D \times (0, t_T), \\ \mathbf{u} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \Omega \times \{0, t_T\} \}$$

とおく. $\mathbf{u}_{D0}, \mathbf{u}_{DT} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ および $\mathbf{u}_D \in H^1((0, t_T); H^1(\Omega; \mathbb{R}^d))$ と仮定する. さらに, $\mathbf{b} \in L^2((0, t_T); L^2(\Omega; \mathbb{R}^d))$, $\mathbf{p}_N \in L^2((0, t_T); L^2(\Gamma_N; \mathbb{R}^d))$ と仮定する. このとき, この問題の弱形式は第1式に任意の $\mathbf{v} \in U$ をかけて $\Omega \times (0, t_T)$ で積分し, 基本境界条件を用いることで次のように得られる. 「任意の $\mathbf{v} \in U$ に対して

$$\int_0^{t_T} (b(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + l(\mathbf{v})) dt = 0$$

を満たす $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_D \in U$ を求めよ. ただし,

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx, \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx, \\ l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{p}_N \cdot \mathbf{v} d\gamma$$

とおく.]

5.4 ϕ に対する関数空間を

$$U = \{ \phi \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \mid \phi = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \Gamma_D \}$$

とおく. このとき, $\phi \in U$ に対する $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}) e^{\lambda t}$ を $\rho \ddot{\mathbf{u}}^\top - \nabla^\top \mathbf{S}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}^\top$ に代入し, さらに, その式に任意の $\mathbf{v} \in U$ をかけて Ω 上で積分し, 基本境界条件 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_D$ on $\Gamma_D \times (0, t_T)$ を考慮すれば, 固有振動問題の弱形式が得られる. その弱形式は次のようにかける. 「任意の $\mathbf{v} \in U$ に対して

$$\lambda^2 b(\phi, \mathbf{v}) + a(\phi, \mathbf{v}) = 0$$

を満たす $(\phi, \lambda) \in U \times \mathbb{R}$ を求めよ.]

解説 この問題は関数空間 U 上の固有値問題 (方程式は固有方程式) になっている. この問題において $a(\cdot, \cdot)$ の非負定値性 (0 を含む強圧性) と $b(\cdot, \cdot)$ の正定値性 (強圧性) を考慮すれば, U の次元数と同じ可算無限個の固有対 $(\phi_i, \lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ の存在がいえる. このとき, $\lambda_i^2 \leq 0$, すなわち $\lambda_i = \pm i\omega_i$ (i は虚数単位) が導かれる. この結果から, $\phi_i(\mathbf{x}) (e^{i\omega_i t} + e^{-i\omega_i t}) = \phi_i \cos \omega_i t$ は固有値問題の解となり, ω_i と ϕ_i を固有振動数と固有モードという.

5.5 \mathbf{u} と p に対する関数空間をそれぞれ

$$U = \{ \mathbf{u} \in H^1((0, t_T); H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)) \mid$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{u} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \partial\Omega \times (0, t_T) \cup \Omega \times \{0\}, \\ V = & \left\{ \mathbf{u} \in H^1((0, t_T); H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)) \mid \right. \\ & \left. \mathbf{u} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \partial\Omega \times (0, t_T) \cup \Omega \times \{t_T\} \right\}, \\ P = & \left\{ p \in L^2((0, t_T); L^2(\Omega; \mathbb{R})) \mid \int_{\Omega} p \, dx = 0 \right\} \end{aligned}$$

とおく. このとき, 任意の $\mathbf{v} \in V$ を Navier-Stokes 方程式にかけて $(0, t_T) \times \Omega$ 上で積分し, 基本境界条件 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_D$ on $\partial\Omega \times (0, t_T) \cup \Omega \times \{0\}$ を考慮すれば, Navier-Stokes 方程式に対する弱形式が得られる. 一方, 任意の $q \in P$ を連続の式にかけて $(0, t_T) \times \Omega$ 上で積分すれば, 連続の式に対する弱形式が得られる. これらは次のようにかける. 「任意の $(\mathbf{v}, q) \in U \times Q$ に対して

$$\begin{aligned} \int_0^{t_T} (b(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + d(\mathbf{v}, p)) \, dt &= \int_0^{t_T} l(\mathbf{v}) \, dt, \\ \int_0^{t_T} d(\mathbf{u}, q) \, dt &= 0 \end{aligned}$$

を満たす $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_D, p) \in U \times Q$ を求めよ. ただし,

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mu (\nabla \mathbf{u}^T) \cdot (\nabla \mathbf{v}^T) \, dx, \\ b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx, \\ c(\mathbf{u})(\mathbf{w}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \rho ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} \, dx, \\ d(\mathbf{v}, q) &= - \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx, \\ l(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{p}_N \cdot \mathbf{v} \, d\gamma \end{aligned}$$

とおく.]

5.6 図 P.5.1 (a) のような応力が発生したときに, 線形ひずみは

$$\varepsilon_{11} = -\varepsilon_{22} = \frac{1 + \nu_P}{e_Y} \sigma_0 \quad (1)$$

となる. 一方, 図 P.5.1 (b) のような反時計回りに $\pi/4$ だけ回転した座標系では

$$\varepsilon_{11} = \frac{\gamma'_{12}/\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\gamma'_{12}}{2} = \varepsilon'_{12} = \frac{\sigma_0}{2\mu_L} \quad (2)$$

が成り立つ. 式 (1) と式 (2) より $e_Y = 2\mu_L(1 + \nu_P)$ が成り立つことになる.

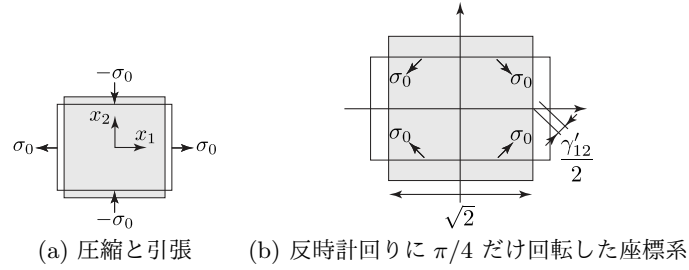


図 P.5.1: せん断応力の変形

第6章

6.1 この問題の弱形式は, $v(0) = v(1) = 0$ を満たす任意の $v : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ に対して

$$a(u, v) + c(u, v) = l_1(v) \quad (1)$$

とかける. ただし, $a(\cdot, \cdot)$ と $l_1(\cdot)$ は例題 6.1.5 の定義を用いる. また,

$$c(u, v) = \int_0^1 uv \, dx$$

とする. $a(u, v)$ と $l_1(v)$ に近似関数 u_h と v_h が代入された結果は例題 6.1.5 のとおりである. そこで, $c(u, v)$ に u_h と v_h を代入すれば,

$$\begin{aligned} c(u_h, v_h) &= \int_0^1 \left\{ \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \alpha_i \sin(i\pi x) \right\} \left\{ \sum_{j \in \{1, \dots, m\}} \beta_j \sin(j\pi x) \right\} dx \\ &= \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\alpha} \end{aligned}$$

となる. ここで, $\mathbf{C} = (c(\sin(i\pi x), \sin(j\pi x)))_{ij}$ で,

$$\begin{aligned} c(\sin(i\pi x), \sin(j\pi x)) &= \int_0^1 \sin(i\pi x) \sin(j\pi x) \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 [\cos\{(i+j)\pi x\} - \cos\{(i-j)\pi x\}] \, dx = \frac{1}{2} \delta_{ij} \end{aligned}$$

となる. 例題 6.1.5 の解答と上の結果から, 式 (1) は

$$(\mathbf{A} + \mathbf{C}) \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{f}$$

となる。すなわち,

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{c} \frac{\pi^2}{2} \\ \frac{\pi^2}{2} \\ \frac{\pi^2}{2} \\ \vdots \\ \frac{\pi^2}{2} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 9 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2/3 \\ \vdots \\ \{(-1)^{m+1} + 1\} / m \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

あるいは

$$\frac{i^2\pi^2 + 1}{2}\alpha_i = \frac{(-1)^{i+1} + 1}{i\pi}$$

となる。この連立1次方程式を解けば,

$$\alpha_i = \frac{2\{(-1)^{i+1} + 1\}}{i\pi(i^2\pi^2 + 1)}$$

が得られる。したがって、近似関数は

$$u_h = \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \frac{2\{(-1)^{i+1} + 1\}}{i\pi(i^2\pi^2 + 1)} \sin(i\pi x)$$

となる。

- 6.2** この問題の弱形式は、式 (1) で与えられた $a(u, v)$ と $l_1(v)$ に近似関数 u_h と v_h が代入された結果は例題 6.2.1 のとおりである。そこで、 $c(u, v)$ に u_h と v_h を代入すれば,

$$\begin{aligned} c(u_h, v_h) &= \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_h v_h \, dx = \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} c_i(u_h, v_h), \\ c_i(u_h, v_h) &= (v_{i(1)} \quad v_{i(2)}) \begin{pmatrix} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_{i(1)} \varphi_{i(1)} \, dx & \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_{i(1)} \varphi_{i(2)} \, dx \\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_{i(2)} \varphi_{i(1)} \, dx & \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_{i(2)} \varphi_{i(2)} \, dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i(1)} \\ u_{i(2)} \end{pmatrix} \\ &= \bar{\mathbf{v}}_i \cdot \bar{\mathbf{C}}_i \bar{\mathbf{u}}_i = \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{Z}_i^\top \bar{\mathbf{C}}_i \mathbf{Z}_i \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{C}}_i \bar{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\bar{\mathbf{C}}_i = (\bar{c}_{i\alpha\beta})_{\alpha, \beta} \in \mathbb{R}^2$ は

$$\bar{c}_{i11} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_{i(1)} \varphi_{i(1)} \, dx = \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - x)^2 \, dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x_i - x_{i-1}}{3}, \\
\bar{c}_{i12} = \bar{c}_{i21} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_{i(1)} \varphi_{i(2)} \, dx \\
&= \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - x)(x - x_{i-1}) \, dx = \frac{x_i - x_{i-1}}{6}, \\
\bar{c}_{i22} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_{i(2)} \varphi_{i(2)} \, dx = \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})^2 \, dx \\
&= \frac{x_i - x_{i-1}}{3}
\end{aligned}$$

となる。すなわち

$$\bar{C}_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

となる。全要素の和をとった行列 \bar{C} は

$$\bar{C} = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

となる。したがって、近似方程式は

$$\left(\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。

補足 有限要素上の積分は、規準領域上の積分に変換すれば、より簡単になる。写像 $\xi: (x_{i-1}, x_i) \rightarrow (0, 1)$ を

$$\xi = \frac{x - x_{i-1}}{h}$$

とおく。ただし、 $h = x_i - x_{i-1}$ とする。このとき、**Jacobi 行列式**は

$$\frac{d\xi}{dx} = h$$

となる。基底関数は

$$\begin{aligned}
\varphi_{i(1)}(x) &= \frac{x_i - x}{h} = 1 - \xi = \hat{\varphi}_{i(1)}(\xi), \\
\varphi_{i(2)}(x) &= \frac{x - x_{i-1}}{h} = \xi = \hat{\varphi}_{i(2)}(\xi).
\end{aligned}$$

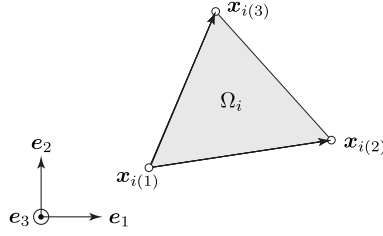


図 P.6.1: 3 角形 Ω_i の面積 $|\Omega_i|$ と点 $\mathbf{x}_{i(1)}$, $\mathbf{x}_{i(2)}$, $\mathbf{x}_{i(3)}$

となる。このとき、 \bar{C}_i は

$$\begin{aligned}\bar{c}_{i11} &= \int_0^1 \hat{\varphi}_{i(1)} \hat{\varphi}_{i(1)} h \, d\xi = h \int_0^1 (1 - \xi)^2 \, d\xi = h \int_0^1 \eta^2 \, d\eta = \frac{h}{3}, \\ \bar{c}_{i12} = \bar{c}_{i21} &= \int_0^1 \hat{\varphi}_{i(1)} \hat{\varphi}_{i(2)} h \, d\xi = h \int_0^1 (1 - \xi)\xi \, d\xi = \frac{h}{6}, \\ \bar{c}_{i22} &= \int_0^1 \hat{\varphi}_{i(2)} \hat{\varphi}_{i(2)} h \, d\xi = h \int_0^1 \xi^2 \, d\xi = \frac{h}{3}\end{aligned}$$

のように計算される。

6.3 図 P.6.1 のような 3 角形有限要素の領域 Ω_i を考える。このとき、2 つのベクトル $\mathbf{x}_{i(2)} - \mathbf{x}_{i(1)}$ と $\mathbf{x}_{i(3)} - \mathbf{x}_{i(1)}$ の外積に対して

$$\begin{aligned}2|\Omega_i| \mathbf{e}_3 &= \begin{pmatrix} x_{i(2)1} - x_{i(1)1} \\ x_{i(2)2} - x_{i(1)2} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_{i(3)1} - x_{i(1)1} \\ x_{i(3)2} - x_{i(1)2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_{i(2)1} - x_{i(1)1} & x_{i(2)2} - x_{i(1)2} & 0 \\ x_{i(3)1} - x_{i(1)1} & x_{i(3)2} - x_{i(1)2} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_{i(2)1} - x_{i(1)1} & x_{i(2)2} - x_{i(1)2} & 0 \\ x_{i(3)1} - x_{i(1)1} & x_{i(3)2} - x_{i(1)2} & 0 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 \\ &= \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_{i(2)1} - x_{i(1)1} & x_{i(2)2} - x_{i(1)2} & 0 \\ x_{i(3)1} - x_{i(1)1} & x_{i(3)2} - x_{i(1)2} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{i(1)1} & x_{i(1)2} & 0 \\ x_{i(1)1} & x_{i(1)2} & 1 \\ x_{i(1)1} & x_{i(1)2} & 1 \end{vmatrix} \right) \mathbf{e}_3 \\ &= \begin{vmatrix} x_{i(1)1} & x_{i(1)2} & 1 \\ x_{i(2)1} & x_{i(2)2} & 1 \\ x_{i(3)1} & x_{i(3)2} & 1 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 = \gamma \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、 \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 および \mathbf{e}_3 は x_1 , x_2 および x_3 座標系の単位直交ベクトルである。そこで、 $\gamma = 2|\Omega_i|$ が得られる。

6.4 有限要素番号が $\{3, 5\}$, $\{4, 6\}$, $\{1, 7\}$ および $\{2, 8\}$ の有限要素をそれぞれ Type 1, Type 2, Type 3 および Type 4 とよぶ。Type 1 と Type 2 に対して例題

表 P.6.1: 局所節点 $\mathbf{x}_{i(1)}, \mathbf{x}_{i(2)}, \mathbf{x}_{i(3)}$ と全体節点 \mathbf{x}_j の関係

| $i \in \mathcal{E}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $\mathbf{x}_{i(1)}$ | \mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_4 | \mathbf{x}_2 | \mathbf{x}_2 | \mathbf{x}_4 | \mathbf{x}_4 | \mathbf{x}_5 | \mathbf{x}_8 |
| $\mathbf{x}_{i(2)}$ | \mathbf{x}_4 | \mathbf{x}_5 | \mathbf{x}_5 | \mathbf{x}_6 | \mathbf{x}_7 | \mathbf{x}_8 | \mathbf{x}_8 | \mathbf{x}_9 |
| $\mathbf{x}_{i(3)}$ | \mathbf{x}_2 | \mathbf{x}_2 | \mathbf{x}_6 | \mathbf{x}_3 | \mathbf{x}_8 | \mathbf{x}_5 | \mathbf{x}_6 | \mathbf{x}_6 |
| Type | 3 | 4 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 |

6.3.2 の結果を用いる。Type 3 に対して, $\gamma = h^2$, $|\Omega_i| = h^2/2$ および

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} x_{i(2)2} - x_{i(3)2} \\ x_{i(3)2} - x_{i(1)2} \\ x_{i(1)2} - x_{i(2)2} \end{pmatrix} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -h \\ h \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} x_{i(3)1} - x_{i(2)1} \\ x_{i(1)1} - x_{i(3)1} \\ x_{i(2)1} - x_{i(1)1} \end{pmatrix} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -h \\ 0 \\ h \end{pmatrix}.$$

となる。したがって,

$$\bar{\mathbf{A}}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{b}}_1 = \frac{h^2}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が得られる。Type 4 に対しても同様に, $\gamma = h^2$, $|\Omega_i| = h^2/2$ および

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ -h \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -h \\ h \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{A}}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{b}}_2 = \frac{h^2}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が得られる。一方, 局所節点番号と全体節点番号は表 P.6.1 のように対応づけられる。

全ての要素について和をとれば, $\bar{\mathbf{A}}$ と $\bar{\mathbf{b}}$ は

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\bar{l} = \frac{h^2}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。ここで、基本境界条件 $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_7 = 0$, $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v_7 = 0$ を代入すれば、 $h = 1/2$ を用いて、

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が得られる。これを解くと

$$\begin{pmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix} = \frac{1}{16 \times 12} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{96} \begin{pmatrix} 15 \\ 22 \\ 22 \\ 26 \end{pmatrix}$$

となる。

6.5 図 6.4.7 の有限要素 $i \in \mathcal{E}$ に対して、規準領域 $\Xi_i = (0, 1)^2$ とおく。近似関数と座標のアイソパラメトリック表示は

$$\begin{aligned} \hat{u}_h(\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{\alpha \in \{1, \dots, 4\}} \hat{\varphi}_\alpha(\boldsymbol{\xi}) u_{i\alpha} = \hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \bar{\mathbf{u}}_i, \\ \hat{v}_h(\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{\alpha \in \{1, \dots, 4\}} \hat{\varphi}_\alpha(\boldsymbol{\xi}) v_{i\alpha} = \hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \bar{\mathbf{v}}_i, \\ \hat{x}_{h1}(\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{\alpha \in \{1, \dots, 4\}} \hat{\varphi}_\alpha(\boldsymbol{\xi}) x_{i1\alpha} = \hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \bar{\mathbf{x}}_{i1}, \\ \hat{x}_{h2}(\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{\alpha \in \{1, \dots, 4\}} \hat{\varphi}_\alpha(\boldsymbol{\xi}) x_{i2\alpha} = \hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \bar{\mathbf{x}}_{i2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $x_{i1(2)} - x_{i1(1)} = h_1$ および $x_{i2(2)} - x_{i2(1)} = h_2$ とおき、

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ \lambda_{21} \\ \lambda_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_{i1(2)} - x_1) / h_1 \\ (x_1 - x_{i1(1)}) / h_2 \\ (x_{i2(2)} - x_2) / h_1 \\ (x_2 - x_{i2(1)}) / h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - \xi_1) \\ \xi_1 \\ (1 - \xi_2) \\ \xi_2 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_1(\boldsymbol{\xi}) \\ \hat{\varphi}_2(\boldsymbol{\xi}) \\ \hat{\varphi}_3(\boldsymbol{\xi}) \\ \hat{\varphi}_4(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\xi_1)(1-\xi_2) \\ \xi_1(1-\xi_2) \\ \xi_1\xi_2 \\ (1-\xi_1)\xi_2 \end{pmatrix}$$

とおく. このとき,

$$\begin{aligned} \partial_{\boldsymbol{\xi}} \hat{\varphi}_{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) &= \begin{pmatrix} \partial \hat{\varphi}_{\alpha} / \partial \xi_1 \\ \partial \hat{\varphi}_{\alpha} / \partial \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial \hat{x}_1 / \partial \xi_1 & \partial \hat{x}_2 / \partial \xi_1 \\ \partial \hat{x}_1 / \partial \xi_2 & \partial \hat{x}_2 / \partial \xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \hat{\varphi}_{\alpha} / \partial x_1 \\ \partial \hat{\varphi}_{\alpha} / \partial x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \hat{\varphi}_{\alpha} / \partial x_1 \\ \partial \hat{\varphi}_{\alpha} / \partial x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が成り立つ. そこで,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \partial \hat{\varphi}_{\alpha} / \partial x_1 \\ \partial \hat{\varphi}_{\alpha} / \partial x_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\omega(\boldsymbol{\xi})} \begin{pmatrix} \partial \hat{x}_2 / \partial \xi_2 & -\partial \hat{x}_2 / \partial \xi_1 \\ -\partial \hat{x}_1 / \partial \xi_2 & \partial \hat{x}_1 / \partial \xi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \hat{\varphi}_{\alpha} / \partial \xi_1 \\ \partial \hat{\varphi}_{\alpha} / \partial \xi_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{h_1 h_2} \begin{pmatrix} h_2 & 0 \\ 0 & h_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \hat{\varphi}_{\alpha} / \partial \xi_1 \\ \partial \hat{\varphi}_{\alpha} / \partial \xi_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が得られる. ただし,

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \partial \hat{\varphi}_1 / \partial \xi_1 & \partial \hat{\varphi}_2 / \partial \xi_1 & \partial \hat{\varphi}_3 / \partial \xi_1 & \partial \hat{\varphi}_4 / \partial \xi_1 \\ \partial \hat{\varphi}_1 / \partial \xi_2 & \partial \hat{\varphi}_2 / \partial \xi_2 & \partial \hat{\varphi}_3 / \partial \xi_2 & \partial \hat{\varphi}_4 / \partial \xi_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(1-\xi_2) & (1-\xi_2) & \xi_2 & -\xi_2 \\ -(1-\xi_1) & -\xi_1 & \xi_1 & (1-\xi_1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である. この結果を用いれば, 要素係数行列 $\bar{\mathbf{A}}_i = (\bar{a}_{i\alpha\beta})_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ は

$$\begin{aligned} \bar{a}_{i\alpha\beta} &= \int_{\Omega_i} \begin{pmatrix} \partial \varphi_{\alpha} / \partial x_1 \\ \partial \varphi_{\alpha} / \partial x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial \varphi_{\beta} / \partial x_1 \\ \partial \varphi_{\beta} / \partial x_2 \end{pmatrix} dx \\ &= \int_{\Xi_i} \begin{pmatrix} \partial \hat{\varphi}_{\alpha} / \partial x_1 \\ \partial \hat{\varphi}_{\alpha} / \partial x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial \hat{\varphi}_{\beta} / \partial x_1 \\ \partial \hat{\varphi}_{\beta} / \partial x_2 \end{pmatrix} \omega(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \\ &= \frac{1}{h_1 h_2} \int_{\Xi_i} \begin{pmatrix} \partial \hat{\varphi}_{\alpha} \\ \partial \hat{\varphi}_{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 & 0 \\ 0 & h_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 & 0 \\ 0 & h_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \hat{\varphi}_{\beta} / \partial \xi_1 \\ \partial \hat{\varphi}_{\beta} / \partial \xi_2 \end{pmatrix} d\boldsymbol{\xi} \\ &= \int_{\Xi_i} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_{\alpha}}{\partial \xi_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_{\beta}}{\partial \xi_1} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_{\alpha}}{\partial \xi_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_{\beta}}{\partial \xi_2} \right) d\boldsymbol{\xi} \end{aligned}$$

となる. $\sigma = h_2/h_1$ とかけば,

$$\bar{a}_{i11} = \int_{\Xi_i} \left[\sigma \{-(1-\xi_2)\}^2 + \sigma^{-1} \{-(1-\xi_1)\}^2 \right] d\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{3} (\sigma + \sigma^{-1})$$

となる. これらの計算により,

$$\bar{\mathbf{A}}_i = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2\sigma + 2\sigma^{-1} & -2\sigma + \sigma^{-1} & -\sigma - \sigma^{-1} & \sigma - 2\sigma^{-1} \\ -2\sigma + \sigma^{-1} & 2\sigma + 2\sigma^{-1} & \sigma - 2\sigma^{-1} & -\sigma - \sigma^{-1} \\ -\sigma - \sigma^{-1} & \sigma - 2\sigma^{-1} & 2\sigma + 2\sigma^{-1} & -2\sigma + \sigma^{-1} \\ \sigma - 2\sigma^{-1} & -\sigma - \sigma^{-1} & -2\sigma + \sigma^{-1} & 2\sigma + 2\sigma^{-1} \end{pmatrix}$$

が得られる．既知項ベクトル $\bar{l}_i = (\bar{l}_{i\alpha})_\alpha \in \mathbb{R}^4$ は

$$\bar{l}_{i\alpha} = \int_{\Omega_i} b\hat{\varphi}_\alpha dx = b_0 \int_{\Xi_i} \hat{\varphi}_\alpha(\boldsymbol{\xi}) \omega(\boldsymbol{\xi}) d\xi$$

となる．したがって

$$\bar{l}_i = b_0 h_1 h_2 \begin{pmatrix} \int_{\Xi_i} (1 - \xi_1)(1 - \xi_2) d\xi \\ \int_{\Xi_i} \xi_1(1 - \xi_2) d\xi \\ \int_{\Xi_i} \xi_1 \xi_2 d\xi \\ \int_{\Xi_i} (1 - \xi_1)\xi_2 d\xi \end{pmatrix} = \frac{b_0 h_1 h_2}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる．

6.6 $\Xi = (0, 1)^2$ を規準領域とする． $\alpha \in \{1, \dots, 4\}$ に対して $\hat{\varphi}_{(\alpha)}(\boldsymbol{\xi})$ を Ξ 上の基底関数とする．このとき，

$$\begin{aligned} \varepsilon(\boldsymbol{\xi}) &= \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_{h1}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_{h2}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_{h2}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{h1}}{\partial x_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \hat{\varphi}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \hat{\varphi}_4}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \hat{\varphi}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \hat{\varphi}_4}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \hat{\varphi}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \hat{\varphi}_4}{\partial x_2} & \frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \hat{\varphi}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \hat{\varphi}_4}{\partial x_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ u_{14} \\ u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \\ u_{24} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\omega(\boldsymbol{\xi})} \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_2}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_2}{\partial \xi_2} & 0 & 0 \\ -\frac{\partial \hat{x}_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial \hat{x}_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_4}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_4}{\partial \xi_2} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial \hat{x}_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial \hat{x}_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_4}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_4}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{\partial \hat{x}_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial \hat{x}_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_2}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_2}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_2}{\partial \xi_2} \\ 0 & 0 \\ -\frac{\partial \hat{x}_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial \hat{x}_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_4}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_4}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_4}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_4}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ u_{14} \\ u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \\ u_{24} \end{pmatrix} \\
& = \mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}) \bar{\mathbf{u}}_i
\end{aligned}$$

となる。ただし、 $\omega(\boldsymbol{\xi}) = \det(\partial_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{x}^{\top})$ である。要素係数行列は

$$\mathbf{K}_i = \int_{\Omega_i} \mathbf{B}^{\top}(\mathbf{x}) \mathbf{D} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \, dx = \int_{\Xi} \mathbf{B}^{\top}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{D} \mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}) \omega(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi}$$

となる。ここで、右辺の積分は Gauss 求積により求められる。

第 8 章

8.1 θ 型線形弾性問題 (問題 8.9.2) を状態決定問題にしたとき、式 (8.9.6) で定義された平均コンプライアンス f_0 に対して自己随伴関係が得られた。それと同様に、 θ 型 Poisson 問題 (問題 8.2.3) を状態決定問題にしたときには、

$$f_0(u) = \int_D b(\theta) u \, dx + \int_{\Gamma_N} p_N u \, d\gamma - \int_{\Gamma_D} \phi^\alpha(\theta) u_D \partial_\nu u \, d\gamma$$

を目的関数とすれば、自己随伴関係が得られる。また、 f_0 の θ 微分は

$$\tilde{f}'_0(\theta)[\vartheta] = \langle g_0, \vartheta \rangle = \int_D (2b_\theta u - \alpha \phi^{\alpha-1} \phi_\theta \nabla u \cdot \nabla u) \vartheta \, dx$$

となる。

8.2 θ 型拡張 Poisson 問題は次のようになる。

問題 P.8.1 (θ 型拡張 Poisson 問題) D を $d \in \{2, 3\}$ 次元の Lipschitz 領域とする。 $\theta \in \mathcal{D}$ に対して、 $b \in C^1(\mathcal{D}; L^{2q_R}(D; \mathbb{R}))$, $c_\Omega \in L^\infty(D; \mathbb{R})$, $p_B \in L^{2q_R}(\partial D; \mathbb{R})$, $c_{\partial\Omega} \in L^\infty(\partial D; \mathbb{R})$ が与えられたとする。ただし、 $q_R > d$ とする。このとき、

$$\begin{aligned}
-\nabla \cdot (\phi^\alpha(\theta) \nabla u) + c_\Omega u &= b(\theta) \quad \text{in } D, \\
\phi^\alpha(\theta) \partial_\nu u + c_{\partial\Omega} u &= p_B \quad \text{on } \partial D
\end{aligned}$$

を満たす $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ を求めよ。 \square

問題 P.8.1 に対する Lagrange 関数を, 問題 5.1.4 を応用して,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S(\theta, u, v) &= \int_D (-\phi^\alpha(\theta) \nabla u \cdot \nabla v - c_\Omega uv + b(\theta) v) dx \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} (-c_{\partial\Omega} uv + p_B v) d\gamma \end{aligned}$$

とおく. θ 型線形弾性問題に対する平均コンプライアンスからの類推で, 目的関数を

$$f_0(u) = \int_D b(\theta) u dx + \int_{\partial D} p_B u d\gamma \quad (1)$$

とおいてみる. 領域の大きさに対する制約関数を式 (8.9.7) とおく. このときの θ 型位相最適化問題は次のようになる.

問題 P.8.2 (θ 型位相最適化問題) D を式 (8.1.4) とおく. $\mathcal{S} = W^{1,2q_R}(D; \mathbb{R})$ とおく. f_0 と f_1 をそれぞれ式 (1) と式 (8.9.7) とする. このとき,

$$\min_{(\theta, u) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}} \{ f_0(\theta, u) \mid f_1(\theta) \leq 0, \text{ 問題 P.8.1} \}$$

を満たす θ を求めよ. □

f_0 の θ 微分を求めるために, f_0 の Lagrange 関数を

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(\theta, u, v_0) &= f_0(\theta, u) + \mathcal{L}_S(\theta, u, v_0) \\ &= \int_D \{-\phi^\alpha(\theta) \nabla u \cdot \nabla v_0 + b(\theta)(u + v_0)\} dx \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} p_B(u + v_0) d\gamma \end{aligned}$$

とおく. (θ, u, v_0) の任意変動 $(\vartheta, \hat{u}, \hat{v}_0) \in X \times U \times U$ (ただし, $U = H^1(D; \mathbb{R})$) に対する \mathcal{L}_0 の Fréchet 微分を

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_0(\theta, u, v_0)[\vartheta, \hat{u}, \hat{v}_0] &= \mathcal{L}_{0\theta}(\theta, u, v_0)[\vartheta] + \mathcal{L}_{0u}(\theta, u, v_0)[\hat{u}] \\ &\quad + \mathcal{L}_{0v_0}(\theta, u, v_0)[\hat{v}_0] \end{aligned} \quad (2)$$

とかく. 式 (2) の右辺第 3 項は,

$$\mathcal{L}_{0v_0}(\theta, u, v_0)[\hat{v}_0] = \mathcal{L}_{Sv_0}(\theta, u, v_0)[\hat{v}_0] = \mathcal{L}_S(\theta, u, \hat{v}_0)$$

となる. また, 式 (2) の右辺第 2 項は,

$$\mathcal{L}_{0u}(\theta, u, v_0)[\hat{u}] = \mathcal{L}_S(\theta, \hat{u}, v_0)$$

となる. そこで, 自己随伴関係

$$u = v_0$$

が成り立つ。さらに、式 (2) の右辺第 1 項は、

$$\mathcal{L}_{0\theta}(\theta, u, v_0)[\vartheta] = \int_D \{b_\theta \cdot (u + v_0) - \alpha \phi^{\alpha-1} \phi_\theta \nabla u \cdot \nabla v_0\} \vartheta \, dx$$

となる。そこで、

$$\begin{aligned} \tilde{f}'_0(\theta)[\vartheta] &= \mathcal{L}_{0\theta}(\theta, u, v_0)[\vartheta] = \langle g_0, \vartheta \rangle \\ &= \int_D (2b_\theta \cdot u - \alpha \phi^{\alpha-1} \phi_\theta \nabla u \cdot \nabla u) \vartheta \, dx \end{aligned}$$

となる。一方、 $f_1(\theta)$ の θ 微分は

$$f'_1(\theta)[\vartheta] = \langle g_1, \vartheta \rangle = \int_D \phi_\theta \vartheta \, dx$$

となる。そこで、問題 P.8.2 に対する KKT 条件は、任意の $\vartheta \in X$ に対して、

$$\begin{aligned} \langle g_0 + \lambda_1 g_1, \vartheta \rangle &= \langle 2b_\theta \cdot u + (-\alpha \phi^{\alpha-1} \nabla u \cdot \nabla u + \lambda_1) \phi_\theta, \vartheta \rangle = 0, \\ f_1(\theta) &\leq 0, \\ \lambda_1 f_1(\theta) &= 0, \\ \lambda_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

が成り立つ条件として与えられる。ここで、 λ_1 は領域の大きさ制約に対する Lagrange 乗数である。

8.3 問題 8.12.1 に対する Lagrange 関数を

$$\mathcal{L}(\theta, \beta, u, v_1, \dots, v_m, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \beta + \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \lambda_i \mathcal{L}_i(\theta, \beta, u, v_i)$$

とおく。ただし、 $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}^\top$ は $f_1 - \beta \leq 0, \dots, f_m - \beta \leq 0$ に対する Lagrange 乗数とする。また、

$$\mathcal{L}_i(\theta, \beta, u, v_i) = f_i(\theta, u) - \beta + \mathcal{L}_S(\theta, u, v_i)$$

とする。ここで、 \mathcal{L}_S は式 (8.2.4) とする。 $(\theta, \beta, u, v_1, \dots, v_m)$ の任意変動 $(\vartheta, \hat{\beta}, \hat{u}, \hat{v}_1, \dots, \hat{v}_m) \in X \times \mathbb{R} \times U^{m+1}$ に対する \mathcal{L} の Fréchet 微分を

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(\theta, \beta, u, v_1, \dots, v_m, \lambda_1, \dots, \lambda_m) &\left[\vartheta, \hat{\beta}, \hat{u}, \hat{v}_1, \dots, \hat{v}_m \right] \\ &= \mathcal{L}'_\theta(\theta, \beta, u, v_1, \dots, v_m, \lambda_1, \dots, \lambda_m)[\vartheta] \\ &\quad + \mathcal{L}'_\beta(\theta, \beta, u, v_1, \dots, v_m, \lambda_1, \dots, \lambda_m)[\hat{\beta}] \\ &\quad + \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \lambda_i \mathcal{L}'_{iu}(\theta, \beta, u, v_i)[\hat{u}] \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \lambda_i \mathcal{L}_{iv_i}(\theta, \beta, u, v_i) [\hat{v}_i] \quad (3)$$

とかく、式 (3) の右辺第 4 項は、 u が状態決定問題の弱解のときに 0 となる。
式 (3) の右辺第 3 項は、

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \lambda_i \mathcal{L}_{iu}(\theta, \beta, u, v_i) [\hat{u}] \\ &= \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \lambda_i (f_{iu}(\theta, u) [\hat{u}] + \mathcal{L}_{Su}(\theta, u, v_i) [\hat{u}]) \end{aligned}$$

となり、 v_1, \dots, v_m がそれぞれ f_1, \dots, f_m に対する随伴問題 (問題 8.5.1) の弱解のときに 0 となる。式 (3) の右辺第 2 項は、

$$\mathcal{L}_\beta(\theta, \beta, u, v_1, \dots, v_m, \lambda_1, \dots, \lambda_m) [\hat{\beta}] = (1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_m) \hat{\beta}$$

となる。さらに、式 (3) の右辺第 1 項は、

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_\theta(\theta, \beta, u, v_1, \dots, v_m, \lambda_1, \dots, \lambda_m) [\vartheta] \\ &= \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \lambda_i \mathcal{L}_{i\theta}(\theta, \beta, u, v_i) [\vartheta] = \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \lambda_i \langle g_i, \vartheta \rangle \end{aligned}$$

とかくことができる。ここで、 g_i は式 (8.5.6) で与えられる。

そこで、問題 8.12.1 に対する KKT 条件は、任意の $\vartheta \in X$ に対して、

$$\begin{aligned} & \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1, \quad (4) \\ & \left\langle \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \lambda_i g_i, \vartheta \right\rangle = 0, \\ & \quad f_i(\theta) \leq 0 \quad \text{for } i \in \{1, \dots, m\}, \\ & \quad \lambda_i f_i(\theta) = 0 \quad \text{for } i \in \{1, \dots, m\}, \\ & \quad \lambda_i \geq 0 \quad \text{for } i \in \{1, \dots, m\} \end{aligned}$$

が成り立つ条件として与えられる。

また、この問題に対して制約付き問題に対する勾配法を用いた解法は次のようになる。3.7.1 項に示された簡単なアルゴリズム 3.7.2 を使う場合を想定し、8.7 節で示したような変換をおこなうこととする。この問題では g_0 (問題 3.7.1 では \mathbf{g}_0) は 0 となる。したがって、 $\vartheta_{g_0} = 0$ とおく。また、 ϵ を正定数として、 $\beta = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} f_i - \epsilon$ とおく。このとき、Lagrange 乗数を求める式 (8.7.3) は

$$(\langle g_i, \vartheta_{g_j} \rangle)_{(i,j) \in I_A^2} (\lambda_j)_{j \in I_A} = - (f_i)_{i \in I_A} \quad (5)$$

となる。 $(g_i)_{i \in I_A}$ が 1 次独立ならば、式 (5) を満たす $(\lambda_j)_{j \in I_A}$ は一意に決定される。ここで、 $c = \sum_{j \in I_A} \lambda_j$ を用いて、 $(\lambda_j/c)_{j \in I_A}$ を $(\lambda_j)_{j \in I_A}$ におきか

え, $(c\vartheta_{gj})_{j \in I_A}$ を $(\vartheta_{gj})_{j \in I_A}$ におきかえれば, 式 (4) と式 (5) は同時に満たされることになる. しかし, 式 (8.7.2) で ϑ_g を求めるときには, このおきかえは不要となる.

8.4 \mathbf{u} が状態決定問題 (問題 8.9.2) の解ならば, $\min_{\mathbf{u} \in U} \pi$ を満たす (定理 5.2.9). 一方, θ に対する $\pi(\theta, \mathbf{u})$ の最大点は, $-\pi(\theta, \mathbf{u})$ の最小点となる. \mathbf{u} が状態決定問題の解のとき, 任意の $\vartheta \in X$ に対して,

$$-\pi_\theta(\theta, \mathbf{u})[\vartheta] = \frac{1}{2} \langle g_0, \vartheta \rangle$$

が成り立つ. ただし, g_0 は式 (8.9.14) のベクトルを表す.

8.5 (\mathbf{u}, p) が状態決定問題 (問題 8.10.2) の解ならば, $\min_{\mathbf{u} \in U} \max_{p \in P} \pi$ を満たす (定理 5.6.6). 一方, (\mathbf{u}, p) が状態決定問題の解のとき, 任意の $\vartheta \in X$ に対して,

$$\pi_\theta(\theta, \mathbf{u}, p)[\vartheta] = \frac{1}{2} \langle g_0, \vartheta \rangle$$

が成り立つ. ただし, g_0 は式 (8.10.17) のベクトルを表す.

第9章

9.1 式 (9.8.9) の右辺第2項に対して

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\sum_{j \in \{1, \dots, d-1\}} \{\boldsymbol{\tau}_j \cdot \nabla(p_N v_i)\} \boldsymbol{\tau}_j \right) \cdot \boldsymbol{\varphi} \right\|_{L^1(\Gamma_p(\boldsymbol{\phi}); \mathbb{R})} \\ & \leq (d-1) \max_{j \in \{1, \dots, d-1\}} \left(\|\boldsymbol{\tau}_j\|_{L^\infty(\Gamma_p(\boldsymbol{\phi}); \mathbb{R})}^2 \right. \\ & \quad \left. \times \|\nabla(p_N v_i)\|_{L^2(\Gamma_p(\boldsymbol{\phi}); \mathbb{R})} \right) \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(\Gamma_p(\boldsymbol{\phi}); \mathbb{R}^d)} \end{aligned} \quad (1)$$

が成り立つ. ここで,

$$\begin{aligned} \|\nabla(p_N v_i)\|_{L^2(\Gamma_p(\boldsymbol{\phi}); \mathbb{R})} & \leq \|p_N v_i\|_{H^1(\Gamma_p(\boldsymbol{\phi}); \mathbb{R})} \\ & \leq \|p_N\|_{W^{1,4}(\Gamma_p(\boldsymbol{\phi}); \mathbb{R})} \|v_i\|_{W^{1,4}(\Gamma_p(\boldsymbol{\phi}); \mathbb{R})} \\ & \leq \|\gamma_{\partial\Omega}\|^2 \|p_N\|_{C^{1,1}(D; \mathbb{R})} \|v_i\|_{W^{2,4}(D; \mathbb{R})} \end{aligned}$$

が成り立つ. そこで,

(式 (1) の右辺)

$$\begin{aligned} & \leq \|\gamma_{\partial\Omega}\|^3 (d-1) \max_{j \in \{1, \dots, d-1\}} \|\boldsymbol{\tau}_j\|_{H^{3/2} \cap C^{0,1}(\Gamma_p(\boldsymbol{\phi}); \mathbb{R})}^2 \\ & \quad \times \|p_N\|_{C^{1,1}(D; \mathbb{R})} \|v_i\|_{W^{2,4}(D; \mathbb{R})} \|\boldsymbol{\varphi}\|_X \end{aligned}$$

が成り立つ。仮定 9.5.1 が満たされていれば、上式の右辺は有界となり、式 (9.8.8) の右辺第 2 項は X' の要素となる。さらに、式 (9.8.9) の右辺第 2 項は、 $\nabla(p_N v_i) = v_i \nabla p_N + p_N \nabla v_i \in W^{1,4}(D; \mathbb{R})$ および $\tau_j \in H^{3/2} \cap C^{0,1}(\Gamma_p(\phi); \mathbb{R})$ より、 $H^{1/2} \cap L^\infty(\Gamma_p(\phi); \mathbb{R}^d)$ に入る。

9.2 問題 9.15.1 の Lagrange 関数を

$$\mathcal{L}_S(\phi, u, v) = - \int_{\Omega(\phi)} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega(\phi)} (p_R v - c_{\partial\Omega} uv) \, d\gamma$$

とおく。また、 f_i に対する Lagrange 関数を

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i(\phi, u, v_i) &= f_i(\phi, u) + \mathcal{L}_S(\phi, u, v_i) \\ &= - \int_{\Omega(\phi)} \nabla u \cdot \nabla v_i \, dx \\ &\quad + \int_{\partial\Omega(\phi)} (\eta_{Ri}(\phi, u) + p_R v_i - c_{\partial\Omega} u v_i) \, d\gamma \end{aligned}$$

とおく。 \mathcal{L}_i の形状微分は、関数の形状微分公式をもちいたとき、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_i(\phi, u, v_i)[\varphi, \hat{u}, \hat{v}_i] \\ = \mathcal{L}'_{i\phi}(\phi, u, v_i)[\varphi] + \mathcal{L}'_{iu}(\phi, u, v_i)[\hat{u}] + \mathcal{L}'_{iv_i}(\phi, u, v_i)[\hat{v}_i] \end{aligned} \quad (2)$$

とかくことができる。式 (2) の右辺第 3 項は、

$$\mathcal{L}'_{iv_i}(\phi, u, v_i)[\hat{v}_i] = \mathcal{L}'_{Sv_i}(\phi, u, v_i)[\hat{v}_i] = \mathcal{L}'_S(\phi, u, \hat{v}_i)$$

となり、 u が状態決定問題 (問題 9.15.1) の弱解ならば 0 となる。また、式 (2) の右辺第 2 項は、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{iu}(\phi, u, v_i)[\hat{u}] \\ = - \int_{\Omega(\phi)} \nabla \hat{u} \cdot \nabla v_i \, dx + \int_{\partial\Omega(\phi)} (\eta_{Riu}(\phi, u)[\hat{u}] - c_{\partial\Omega} v_i \hat{u}) \, d\gamma. \end{aligned}$$

となり、 v_i が次のような f_i に対する随伴問題の弱解であるときに式 (2) の右辺第 2 項も 0 になる。

問題 P.9.1 (f_i に対する随伴問題) $\phi \in \mathcal{D}$ に対して問題 9.15.1 の解 u が与えられたとき、

$$\begin{aligned} -\Delta v_i &= 0 \quad \text{in } \Omega(\phi), \\ \partial_\nu v_i + c_{\partial\Omega}(\phi) v_i &= \eta_{Riu}(\phi, u) \quad \text{on } \partial\Omega(\phi) \end{aligned}$$

を満たす $v_i : \Omega(\phi) \rightarrow \mathbb{R}$ を求めよ。

□

さらに, 式 (2) の右辺第 1 項は,

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_{i\phi'}(\phi, u, v_i)[\varphi] \\
&= \int_{\Omega(\phi)} \left\{ \nabla u \cdot (\nabla \varphi^\top \nabla v_i) + \nabla v_i \cdot (\nabla \varphi^\top \nabla u) \right. \\
&\quad \left. - (\nabla u \cdot \nabla v_i) \nabla \cdot \varphi \right\} dx \\
&\quad + \int_{\partial\Omega(\phi)} \left\{ \kappa(\eta_{Ri}(\phi, u) + p_R v_i - c_{\partial\Omega} u v_i) \boldsymbol{\nu} \cdot \varphi \right. \\
&\quad \left. - \nabla_\tau (\eta_{Ri}(\phi, u) + p_R v_i - c_{\partial\Omega} u v_i) \cdot \varphi_\tau \right\} d\gamma \\
&\quad + \int_{\Theta(\phi)} (\eta_{Ri}(\phi, u) + p_R v_i - c_{\partial\Omega} u v_i) \boldsymbol{\tau} \cdot \varphi \, d\varsigma
\end{aligned}$$

となる. この積分を求めるために, $\partial\Omega(\phi)$ が区分的に $H^3 \cap C^{1,1}$ 級であることを用いた. また, 既知関数は物質固定であると仮定された.

以上の結果をふまえて, u と v_i はそれぞれ問題 9.15.1 と問題 P.9.1 の弱解であると仮定すれば,

$$\begin{aligned}
\tilde{f}'_i(\phi)[\varphi] &= \mathcal{L}_{i\phi'}(\phi, u, v_i)[\varphi] = \langle \mathbf{g}_i, \varphi \rangle \\
&= \int_{\Omega(\phi)} (\mathbf{G}_{\Omega i} \cdot \nabla \varphi^\top + g_{\Omega i} \nabla \cdot \varphi) \, dx + \int_{\partial\Omega(\phi)} \mathbf{g}_{\partial\Omega i} \cdot \varphi \, d\gamma \\
&\quad + \int_{\Theta(\phi)} \mathbf{g}_{\Theta i} \cdot \varphi \, d\varsigma
\end{aligned}$$

とかくことができる. ここで,

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{\Omega i} &= \nabla u (\nabla v_i)^\top + \nabla v_i (\nabla u)^\top, \\
g_{\Omega i} &= -\nabla u \cdot \nabla v_i, \\
\mathbf{g}_{\partial\Omega i} &= \kappa(\eta_{Ri}(\phi, u) + p_R v_i - c_{\partial\Omega} u v_i) \boldsymbol{\nu} \\
&\quad - \sum_{j \in \{1, \dots, d-1\}} \{ \boldsymbol{\tau}_j \cdot \nabla (\eta_{Ri}(\phi, u) + p_R v_i - c_{\partial\Omega} u v_i) \} \boldsymbol{\tau}_j, \\
\mathbf{g}_{\Theta i} &= (\eta_{Ri}(\phi, u) + p_R v_i - c_{\partial\Omega} u v_i) \boldsymbol{\tau}
\end{aligned}$$

となる.

定理 9.8.2 と同程度の正則性とは, $\mathbf{G}_{\Omega i} \in H^1 \cap L^\infty(\Omega(\phi); \mathbb{R}^{d \times d})$, $g_{\Omega i} \in H^1 \cap L^\infty(\Omega(\phi); \mathbb{R})$ および $\mathbf{g}_{\partial\Omega i} \in H^{1/2} \cap L^\infty(\partial\Omega(\phi); \mathbb{R}^d)$ となることである. これらの結果を得るためには, 定理 9.8.2 の証明より, u と v_i は $W^{2,4}(D; \mathbb{R})$ の要素になるように仮定されていたことを考慮して, 既知関数の正則性を $\phi \in D^\circ$ の近傍 $B \subset Y$ 上で

$$\begin{aligned}
& c_{\partial\Omega} C_{S'}^1(B; C^{1,1}(D; \mathbb{R})), \quad p_R \in C_{S'}^1(B; C^{1,1}(D; \mathbb{R})), \\
& \eta_{Ri}(\phi, u) \in W^{2,q_R}(D; \mathbb{R}), \quad \eta_{Riu}(\phi, u)[\hat{u}] \in W^{1,4}(D; \mathbb{R})
\end{aligned}$$

のように仮定する必要がある。その反面、角点の開き角 β に対しては、同一種境界上にあるときの条件 $\beta < 2\pi/3$ が適用されることになる。

9.3 式 (9.15.3) を用いて、 \hat{g}_{iC} を求めよう。式 (9.15.3) 右辺被積分関数の第 1 項に対して、

$$\begin{aligned}\nabla u &= \begin{pmatrix} \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} \\ \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} \end{pmatrix} u = \frac{k_j}{2\epsilon^{1/2}} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}, \\ \nabla v_i &= \frac{l_{ij}}{2\epsilon^{1/2}} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

が成り立つ。そこで、

$$\nabla u \cdot \nabla v_i = \frac{k_j l_{ij}}{4\epsilon}$$

が得られる。この結果を式 (9.15.3) 右辺被積分関数の第 1 項に代入すれば、任意の $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ に対して、

$$\begin{aligned}- \int_0^{2\pi} (\nabla u \cdot \nabla v_i) \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} \epsilon \, d\theta \\ = \int_0^{2\pi} \frac{k_j l_{ij}}{4} (\varphi_1 \cos\theta + \varphi_2 \sin\theta) \, d\theta = 0\end{aligned}\quad (3)$$

となる。さらに、被積分関数の第 2 項に対して、

$$\begin{aligned}\partial_\nu u &= \boldsymbol{\nu} \cdot \nabla u = \frac{k_j}{2\epsilon^{1/2}} \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \\ &= -\frac{k_j}{2\epsilon^{1/2}} \cos(\theta/2), \\ \partial_\nu u \nabla v_i &= -\frac{k_j l_{ij}}{4\epsilon} \cos(\theta/2) \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

が成り立つ。そこで、被積分関数の第 2 項は、任意の $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ に対して、

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \partial_\nu u \nabla v_i \cdot \boldsymbol{\varphi} \epsilon \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \partial_\nu v_i \nabla u \cdot \boldsymbol{\varphi} \epsilon \, d\theta \\ &= -\frac{k_j l_{ij}}{4} \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (4)$$

となる。被積分関数の第 3 項も同じ結果となる。そこで、式 (3) と式 (4) より、

$$\langle \hat{g}_{iC}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = -\frac{k_j l_{ij}}{2} \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}\quad (5)$$

が得られる．式 (5) より，き裂の変動に対する形状微分 \hat{g}_{iC} はき裂面の方向を向いている結果が得られたことになる．

\hat{g}_{iM} は次のようになる．式 (9.15.3) 右辺被積分関数の第 1 項に対して，

$$\begin{aligned}\nabla u &= \begin{pmatrix} \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} u = \frac{k_j}{2\epsilon^{1/2}} \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix}, \\ \nabla v_i &= \frac{l_{ij}}{2\epsilon^{1/2}} \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

が成り立つ．そこで，

$$\nabla u \cdot \nabla v_i = \frac{k_j l_{ij}}{4\epsilon}$$

が得られる．この結果を被積分関数の第 1 項に代入すれば，任意の $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ に対して，

$$\begin{aligned}-\int_0^\pi (\nabla u \cdot \nabla v_i) \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} \epsilon \, d\theta &= \int_0^\pi \frac{k_j l_{ij}}{4} (\varphi_1 \cos \theta + \varphi_2 \sin \theta) \, d\theta \\ &= \frac{k_j l_{ij}}{2} \varphi_2\end{aligned}\tag{6}$$

となる．さらに，

$$\begin{aligned}\partial_\nu u &= \boldsymbol{\nu} \cdot \nabla u = \frac{k_j}{2\epsilon^{1/2}} \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \\ &= -\frac{k_j}{2\epsilon^{1/2}} \sin(\theta/2), \\ \partial_\nu u \nabla v_i &= -\frac{k_j l_{ij}}{4\epsilon} \sin(\theta/2) \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

が成り立つ．そこで，被積分関数の第 2 項は，任意の $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ に対して，

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \partial_\nu u \nabla v_i \cdot \boldsymbol{\varphi} \epsilon \, d\theta &= \int_0^\pi \partial_\nu v_i \nabla u \cdot \boldsymbol{\varphi} \epsilon \, d\theta \\ &= \frac{k_j l_{ij}}{8} \begin{pmatrix} \pi \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{7}$$

となる．被積分関数の第 3 項も同じ結果となる．そこで，式 (6) と式 (7) より，

$$\langle \hat{g}_{iM}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \frac{k_j l_{ij}}{4} \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}\tag{8}$$

が得られる．式 (8) より，滑らかな境界上にある混合境界が変動するときの形状微分 \hat{g}_{iM} は Neumann 境界の方向を向いているという結果が得られてことになる．