

# 第5章 偏微分方程式の境界値問題

---

畔上 秀幸

December 3, 2020

名古屋大学 情報学研究科 複雑系科学専攻

## 5.1. はじめに

---

## はじめに

本章では，第4章でみてきた関数解析の定義や結果を使って，楕円型偏微分方程式の境界値問題を変分形式（ここでは弱形式とよぶ）で表現する方法と解の一意存在に関する定理についてみておきたい。

## 5.1. Poisson 問題

---

## §5.1 Poisson 問題

楕円型偏微分方程式の境界値問題 (定義 A.7.1) の簡単な例として Poisson 問題を取りあげて, その定義とそれを弱形式に変換する過程をみておこう. Poisson 問題とは, たとえば, 定常熱伝導問題において熱伝導率が 1 の場合であると想像すればよい (A.6 節).

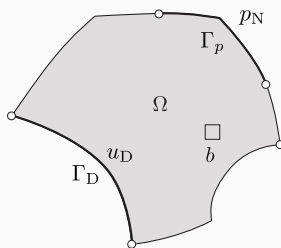


図 5.1.1: 領域  $\Omega$  とその境界  $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$

$\Omega$  を図 5.1.1 のような  $d \in \{2, 3\}$  次元の Lipschitz 領域 (A.5 節),  $\Gamma_D$  を  $\Omega$  の境界  $\partial\Omega$  の部分開集合で, 熱伝導問題においては温度が与えられた境界とする. 残りの境界  $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus \bar{\Gamma}_D$  は熱流束が与えられた境界とする. さらに,  $\Gamma_p \subset \Gamma_N$  は熱流束が非零の境界を表すことにする. 本章では,  $\Gamma_p$  と  $\Gamma_N \setminus \bar{\Gamma}_p$  を区別しないが, 第 9 章では分けて考えることにする. また,  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$  は Laplace 作用素を表す. さらに,  $\nu$  は境界で定義された外向き単位法線 (定義 A.5.4) を表すとして,  $\partial_\nu = \nu \cdot \nabla$  とかくことにする. このとき, 混合境界条件をもつ Poisson 問題は次のように定義される.

## 問題 5.1.1 (Poisson 問題)

関数  $b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p_N : \Gamma_N \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u_D : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  が与えられたとき,

$$-\Delta u = b \quad \text{in } \Omega, \tag{5.1.1}$$

$$\partial_\nu u = p_N \quad \text{on } \Gamma_N, \tag{5.1.2}$$

$$u = u_D \quad \text{on } \Gamma_D \tag{5.1.3}$$

を満たす関数  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  を求めよ.

問題 5.1.1 において, 式 (5.1.1) は **Poisson 方程式** とよばれる. また,  $b = 0$  のとき **Laplace 方程式**あるいは**同次 Poisson 方程式**とよばれる. そのときの問題 5.1.1 は **Laplace 問題**とよばれる.

なお、式 (5.1.3) の境界条件は、 $\Omega$  上で定義された関数  $u$  と  $u_D$  の  $\Gamma_D$  上でのトレースに対して成り立つ関係を表している。そこで、 $u$  と  $u_D$  の関数空間は、トレースがとれるような関数空間を選ぶ必要がある。一方、式 (5.1.2) の  $\partial_\nu u$  も  $\Gamma_N$  上でのトレースに対して成り立つ関係を示している。この関係が意味をもつためには、 $\nabla u$  の境界上トレースがとれるような仮定を設けなければならない。しかし、次に示されるように、問題 5.1.1 が積分方程式 (弱形式) に変換されたならば、そのような仮定が不要となることに注意しよう。

上記の考察から、 $u_D$  は  $H^1(\Omega; \mathbb{R})$  の要素であると仮定して、式 (5.1.3) を満たす関数  $u$  の集合を

$$U(u_D) = \{v \in H^1(\Omega; \mathbb{R}) \mid v = u_D \text{ on } \Gamma_D\}$$



とおく. 4.6 節でみてきたように,  $U(u_D)$  は Hilbert 空間

$$U = \{v \in H^1(\Omega; \mathbb{R}) \mid v = 0 \text{ on } \Gamma_D\} \quad (5.1.4)$$

のアフィン部分空間になっている.  $U$  が Hilbert 空間であることは, 後に Poisson 問題を抽象的変分問題の枠組みにはめこむ際に必要となる.

式 (5.1.1) の両辺に任意の  $v \in U$  をかけて  $\Omega$  で積分し, Gauss-Green の定理 (定理 A.8.2) を用いれば,

$$-\int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Gamma_N} \partial_{\nu} u v \, d\gamma = \int_{\Omega} b v \, dx \quad (5.1.5)$$

が成り立つ。ただし、 $\Gamma_D$  上で  $v = 0$  となることが使われた。一方、式 (5.1.2) の両辺に任意の  $v \in U$  をかけて  $\Gamma_N$  で積分すれば、

$$\int_{\Gamma_N} \partial_\nu u v \, d\gamma = \int_{\Gamma_N} p_N v \, d\gamma \quad (5.1.6)$$

が成り立つ。そこで、式 (5.1.6) を式 (5.1.5) に代入すれば、

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} b v \, dx + \int_{\Gamma_N} p_N v \, d\gamma \quad (5.1.7)$$

が得られる。式 (5.1.7) を **Poisson 問題の弱形式** という。

さらに、式 (5.1.7) の左辺は  $u$  と  $v$  に対する双線形性をもつ。また、式 (5.1.7) の右辺は  $v$  に対する線形性をもつ。そこで、4.6 節でみてきたように、

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad (5.1.8)$$

$$l(v) = \int_{\Omega} bv \, dx + \int_{\Gamma_N} p_N v \, d\gamma \quad (5.1.9)$$

とおくことにする。これらの定義を用いれば、問題 5.1.1 の弱形式は次のようになる。

### 問題 5.1.2 (Poisson 問題の弱形式)

$U$  を式 (5.1.4) とおく.  $b \in L^2(\Omega; \mathbb{R})$ ,  $p_N \in L^2(\Gamma_N; \mathbb{R})$  および  $u_D \in H^1(\Omega; \mathbb{R})$  とする. また,  $a(\cdot, \cdot)$  と  $l(\cdot)$  はそれぞれ式 (5.1.8) と式 (5.1.9) とする. このとき, 任意の  $v \in U$  に対して

$$a(u, v) = l(v) \tag{5.1.10}$$

を満たす  $\tilde{u} = u - u_D \in U$  (なる  $u$ ) を求めよ.

ここで, 問題 5.1.1 と問題 5.1.2 を比較してみよう. 問題 5.1.1 では, 式 (5.1.1) が意味を持つために  $u$  は 2 階微分可能でなければならない. また,  $\Gamma_N$  上で  $\partial_\nu u$  が定義されなければならない. 一方, 問題 5.1.2 では,  $u$  は 2 階

微分可能である必要はなく，そのかわり，式 (5.1.8) の積分が定義できるために  $u$  と  $v$  がともに 1 階微分が 2 乗可積分である性質が満たす必要がある．このように解の満たすべき条件の違いにより，問題 5.1.1 を Poisson 問題の**強形式**，問題 5.1.2 を Poisson 問題の**弱形式**という．また，問題 5.1.2 の解  $u$  は**弱解**とよばれる．なお，5.2 節で示されるように，解が一意に存在することは弱解に対して保証される．

微分方程式の境界値問題では，次の用語が使われる．

- 式 (5.1.3) を **Dirichlet 条件**あるいは**基本境界条件**あるいは**第 1 種境界条件**という．Dirichlet 条件が与えられた境界を **Dirichlet 境界**という．境界全体でこの条件が与えられたときの問題 5.1.1 あるいは問題 5.1.2 を **Dirichlet 問題**という．

- 式 (5.1.2) を Neumann 条件あるいは自然境界条件あるいは第 2 種境界条件ともいう。Neumann 条件が与えられた境界を Neumann 境界という。境界全体でこの条件が与えられたときの問題 5.1.1 あるいは問題 5.1.2 を Neumann 問題という。ただし、Neumann 問題は解が一意に定まらないことに注意する必要がある (例題 5.2.6)。
- Dirichlet 条件と Neumann 条件の両方が存在するとき、混合境界値問題という。
- Dirichlet 条件あるいは Neumann 条件において、それぞれ  $u_D = 0$  あるいは  $p_N = 0$  のとき、同次形という。  $u_D \neq 0$  あるいは  $p_N \neq 0$  のとき、非同次形という。なお、同次を斉次ということもある。

## §5.1.1 拡張 Poisson 問題

さらに，拡張された Poisson 問題を考えよう．この問題は第 8 章で抽象的な勾配法を具体化するときに使われる．また，第 9 章でも，拡張された線形弾性問題が抽象的な勾配法を具体化するときに使われる．

問題 5.1.1 で使われた記号を用いて，Poisson 問題を次のように拡張しよう．

### 問題 5.1.3 (拡張 Poisson 問題)

関数  $b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c_\Omega : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p_R : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c_{\partial\Omega} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  が与えられたとき,

$$-\Delta u + c_\Omega u = b \quad \text{in } \Omega, \tag{5.1.11}$$

$$\partial_\nu u + c_{\partial\Omega} u = p_R \quad \text{on } \partial\Omega, \tag{5.1.12}$$

を満たす関数  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  を求めよ.



問題 5.1.3 において, 式 (5.1.12) を Robin 条件あるいは第 3 種境界条件という. 問題 5.1.3 のように, 境界全体でこの条件が与えたときの問題を Robin 問題という.

問題 5.1.3 の弱形式は次のようにして得られる. ここでは,

$$U = H^1(\Omega; \mathbb{R}) \tag{5.1.13}$$

とおく. 式 (5.1.11) の両辺に任意の  $v \in U$  をかけて  $\Omega$  で積分し, Gauss-Green の定理 (定理 A.8.2) を用いれば,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\Delta u + c_{\Omega} u) v \, dx &= \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + c_{\Omega} uv) \, dx - \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu} uv \, d\gamma \\ &= \int_{\Omega} bv \, dx \end{aligned} \tag{5.1.14}$$

が成り立つ．一方，式 (5.1.12) の両辺に任意の  $v \in U$  をかけて  $\partial\Omega$  で積分すれば，

$$\int_{\partial\Omega} \partial_\nu uv \, d\gamma = \int_{\partial\Omega} (p_R - c_{\partial\Omega}u) v \, d\gamma \quad (5.1.15)$$

が成り立つ．そこで，式 (5.1.15) を式 (5.1.14) に代入すれば，

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + c_{\Omega}uv) \, dx + \int_{\partial\Omega} c_{\partial\Omega}uv \, d\gamma = \int_{\Omega} bv \, dx + \int_{\partial\Omega} p_R v \, d\gamma \quad (5.1.16)$$

が得られる．式 (5.1.16) は問題 5.1.3 の弱形式である．

ここで、式 (5.1.16) の左辺は  $u$  と  $v$  に対する双線形性をもち、右辺は  $v$  に対する線形性をもつことに注目して、 $a : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$  と  $l : U \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + c_{\Omega} uv) dx + \int_{\partial\Omega} c_{\partial\Omega} uv d\gamma, \quad (5.1.17)$$

$$l(v) = \int_{\Omega} bv dx + \int_{\partial\Omega} p_{\mathbb{R}} v d\gamma \quad (5.1.18)$$

とおく。このとき、問題 5.1.3 の弱形式は次のようになる。

### 問題 5.1.4 (拡張 Poisson 問題の弱形式)

$U$  を式 (5.1.13) とおく.  $b \in L^2(\Omega; \mathbb{R})$ ,  $c_\Omega \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ ,  $p_R \in L^2(\partial\Omega; \mathbb{R})$ ,  $c_{\partial\Omega} \in L^\infty(\partial\Omega; \mathbb{R})$  とする. また,  $a(\cdot, \cdot)$  と  $l(\cdot)$  はそれぞれ式 (5.1.17) と式 (5.1.18) とする. このとき, 任意の  $v \in U$  に対して

$$a(u, v) = l(v) \tag{5.1.19}$$

を満たす  $u \in U$  を求めよ.

## 5.2. 抽象的變分問題

---

## §5.2 抽象的変分問題

5.1 節と 5.1.1 項において、Poisson 問題と拡張 Poisson 問題の弱形式が式 (5.1.10) や式 (5.1.19) のように示された。これらは、線形 2 階偏微分方程式の分類によれば、楕円型偏微分方程式の境界値問題に分類される (定義 A.7.1)。楕円型偏微分方程式の境界値問題であれば、いずれの弱形式も双 1 次形式  $a$  と 1 次形式  $l$  を使って表されることが予想される。そこで、楕円型偏微分方程式の弱形式が抽象化された**抽象的変分問題**を定義して、その問題に対する解の一意存在について調べておくことにしよう。

本節では  $U$  を実 Hilbert 空間とする。  $U$  上の双 1 次形式 (4.4 節) に対して次の二つの性質を定義しよう。

### 定義 5.2.1 (実 Hilbert 空間上双 1 次形式の強圧性)

$a : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$  を  $U$  上の双 1 次形式とする. 任意の  $v \in U$  に対して,

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_U^2$$

を満たす  $\alpha > 0$  が存在するとき,  $a$  は強圧的あるいは楕円的であるという.

$U$  が  $\mathbb{R}^d$  の場合は, 双 1 次形式は  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$  に対して  $a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{y})$  のようにかかれる. ここで,  $\mathbf{A}$  は  $\mathbb{R}^{d \times d}$  の行列である.  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$  のとき,  $a$  の強圧性は  $\mathbf{A}$  の正定値性と同値となる.

## 定義 5.2.2 (実 Hilbert 空間上双 1 次形式の有界性)

$a : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$  を  $U$  上の双 1 次形式とする。任意の  $u, v \in U$  に対して、

$$|a(u, v)| \leq \beta \|u\|_U \|v\|_U$$

を満たす  $\beta > 0$  が存在するとき、 $a$  は有界であるという。

$U = \mathbb{R}^d$  の場合は、双 1 次形式  $a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y})$  の有界性は行列  $A$  のノルム (式 (4.4.3) 参照) が有界であることと同値となる。

以上の定義を用いて、次の問題を考えよう。



### 問題 5.2.3 (抽象的変分問題)

$a: U \times U \rightarrow \mathbb{R}$  を  $U$  上の双1次形式,  $l = l(\cdot) = \langle l, \cdot \rangle \in U'$  とする. このとき, 任意の  $v \in U$  に対して

$$a(u, v) = l(v)$$

を満たす  $u \in U$  を求めよ.

$U = \mathbb{R}^d$  の場合, 抽象的変分問題は, 双1次形式  $a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y})$  において行列  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  と  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$  が与えられたとき, 任意の  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$  に対して

$$(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{y} \tag{5.2.1}$$

を満たす  $x \in \mathbb{R}^d$  を求める問題となる.

## §5.2.1 Lax-Milgram の定理

問題 5.2.3 の解が一意に存在することは **Lax-Milgram の定理**によって保証される。この定理では、双1次形式  $a$  が強圧的かつ有界であると仮定される。この性質は Hilbert 空間の内積の定義と同じであることから、この定理は **Riesz の表現定理** (定理 4.4.17) を使って証明される (たとえば, [2, Theorem 1.3, p. 29], [3, Theorem 1, p. 297], [9, 定理 2.6, p. 48]).

## 定理 5.2.4 (Lax-Milgram の定理)

問題 5.2.3 において,  $a$  は強圧的かつ有界とする. また,  $l \in U'$  とする. このとき, 問題 5.2.3 の解  $u \in U$  は一意に存在し, 定義 5.2.1 で用いた  $\alpha$  に対して,

$$\|u\|_U \leq \frac{1}{\alpha} \|l\|_{U'}$$

が成り立つ.

$U = \mathbb{R}^d$  の場合は、式 (5.2.1) を満たす  $\boldsymbol{x}$  は、 $A$  が対称有界かつ正定値のとき、 $A$  の逆行列が存在して、

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} \tag{5.2.2}$$

となる。このとき、

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{\alpha} \|\boldsymbol{b}\|_{\mathbb{R}^d}$$

が成り立つ。ここで、 $\alpha$  は  $A$  の最小固有値となる。さらに、 $A$  が非対称のときには、 $A$  の正定値性は  $(A^\top + A)/2$  の正定値性に置き換えられる。なぜならば、任意の  $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$  に対して、 $\boldsymbol{x} \cdot (A\boldsymbol{x}) \geq \alpha \|\boldsymbol{x}\|_{\mathbb{R}^d}^2$  が成り立つとき、 $\boldsymbol{x} \cdot \{(A^\top + A)\boldsymbol{x}\} \geq 2\alpha \|\boldsymbol{x}\|_{\mathbb{R}^d}^2$  が成り立つからである。

次に，Poisson 問題の解の一意存在を Lax-Milgram の定理を使って示そう．

### 例題 5.2.5 (Poisson 問題の解の一意存在)

問題 5.1.2 において， $|\Gamma_D| (= \int_{\Gamma_D} d\gamma)$  が正のとき，解  $\tilde{u} = u - u_D \in U$  は一意に存在することを示せ．

解答 問題 5.1.2 に対して Lax-Milgram の定理の仮定が成り立つことを示せばよい． $U = \{u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}) \mid u = 0 \text{ on } \Gamma_D\}$  は Hilbert 空間である．また，

$$\hat{l}(v) = l(v) - a(u_D, v) \tag{5.2.3}$$

とおけば，問題 5.1.2 は，任意の  $v \in U$  に対して

$$a(\tilde{u}, v) = \hat{l}(v)$$

を満たす  $\tilde{u} = u - u_D \in U$  を求める問題にかきかえられる．そのうえで，次のように Lax-Milgram の定理の仮定が成り立つ．

1.  $a$  は強圧的である．実際，Poincaré の不等式の系 (系 A.9.4) より，

$$a(v, v) = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v \, dx = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)}^2 \geq \frac{1}{c^2} \|v\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R})}^2$$

が成り立つ． $1/c^2$  を  $\alpha$  とおけば定義 5.2.1 より， $a$  は強圧的となる．

2.  $a$  は有界である. 実際, Hölder の不等式 (定理 A.9.1) より,

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \right| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)} \\ &\leq \|u\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R})} \|v\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R})} \end{aligned}$$

が成り立つ. この関係は, 定義 5.2.2 において  $\beta = 1$  で成り立つことを示している.

3.  $\hat{l} \in U'$  である. 実際,  $\partial\Omega$  は Lipschitz 境界を仮定していることから, トレース作用素 (定理 4.4.2) のノルム

$$\|\gamma\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega; \mathbb{R}); H^{1/2}(\partial\Omega; \mathbb{R}))} = \sup_{v \in H^1(\Omega; \mathbb{R}) \setminus \{0_{H^1(\Omega; \mathbb{R})}\}} \frac{\|v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega; \mathbb{R})}}{\|v\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R})}} \quad (5.2.4)$$



は有界である。それを  $c_1 > 0$  とおく。また、Hölder の不等式を用いれば、

$$\begin{aligned} |\hat{l}(v)| &\leq \int_{\Omega} |bv| \, dx + \int_{\Gamma_N} |p_N v| \, d\gamma + \int_{\Omega} |\nabla u_D \cdot \nabla v| \, dx \\ &\leq \|b\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R})} \|v\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R})} + \|p_N\|_{L^2(\Gamma_N; \mathbb{R})} \|v\|_{L^2(\Gamma_N; \mathbb{R})} \\ &\quad + \|\nabla u_D\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)} \\ &\leq \left( \|b\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R})} + c_1 \|p_N\|_{L^2(\Gamma_N; \mathbb{R})} + \|u_D\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R})} \right) \|v\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R})} \end{aligned}$$

が成り立つ。問題 5.1.2 において、 $b \in L^2(\Omega; \mathbb{R})$ ,  $p_N \in L^2(\Gamma_N; \mathbb{R})$  および  $u_D \in H^1(\Omega; \mathbb{R})$  が仮定されていたので、右辺の ( ) は有界となり、 $l$  は  $U$  上の有界線形汎関数となる。

したがって、 $\tilde{u} = u - u_D \in U$  は一意に存在する。

□

## 例題 5.2.6 (Neumann 問題の解の不定性)

問題 5.1.2 において  $|\Gamma_D| = 0$  のとき, 問題 5.1.2 を満たす  $u \in U$  は一意に存在しないことを示せ. また, 解の一意存在を保証するためには問題をどのように修正すればよいかを示せ.

解答 例題 5.2.5 の解答において,  $a$  の強圧性を示すのに  $|\Gamma_D| > 0$  であることから Poincaré の不等式の系 (系 A.9.4) を用いた. しかし, Neumann 問題では  $|\Gamma_D| = 0$  なので Poincaré の不等式の系が使えず,  $a$  の強圧性がいえない. よって, Lax-Milgram の定理が使えないことから, 解の一意存在はいえないことになる. しかし,

$$u_D = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u \, dx \tag{5.2.5}$$

とにおいて Poincaré の不等式 (定理 A.9.3) を適用すれば

$$a(v, v) = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v \, dx = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)}^2 \geq \frac{1}{c^2} \|v - u_D\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)}^2$$

が成り立ち,  $a$  は強圧的になる. したがって, Neumann 問題を式 (5.2.5) を満たす  $u_D$  に対して  $\tilde{u} = u - u_D \in U$  を求める問題にかきかえれば, 解の一意存在はいえることになる. □

さらに, 拡張 Poisson 問題 (問題 5.1.3) に対しては, 解の一意存在を保証するために, 次のような仮定が必要となる.

### 例題 5.2.7 (拡張 Poisson 問題の解の一意存在)

問題 5.1.4 において, 次のうちの 하나가成り立つと仮定する.

1.  $c_\Omega \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R})$  は  $\Omega$  上のほとんど至るところで正值をとる.
2.  $c_{\partial\Omega} \in L^\infty(\partial\Omega; \mathbb{R})$  は  $\partial\Omega$  上のほとんど至るところで正值をとる.

このとき, 問題 5.1.4 の解  $u \in U$  は一意に存在することを示せ.

解答 問題 5.1.4 に対して Lax-Milgram の定理の仮定が成り立つことを示せばよい.  
 $U = H^1(\Omega; \mathbb{R})$  は Hilbert 空間である. さらに, 次のことが成り立つ.

1.  $a$  は強圧的である. 実際, 仮定より  $\operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} c_\Omega(x)$  および  $\operatorname{ess\,inf}_{x \in \partial\Omega} c_{\partial\Omega}(x)$  をそれぞれ  $c_1 > 0$  および  $c_2 > 0$  とおき, トレース作用素  $\gamma : H^1(\Omega; \mathbb{R}) \rightarrow L^2(\partial\Omega; \mathbb{R})$  の逆作用素のノルム

$$\|\gamma^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\partial\Omega; \mathbb{R}); H^1(\Omega; \mathbb{R}))} = \sup_{v \in L^2(\partial\Omega; \mathbb{R}) \setminus \{0_{L^2(\partial\Omega; \mathbb{R})}\}} \frac{\|v\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R})}}{\|v\|_{L^2(\partial\Omega; \mathbb{R})}} \quad (5.2.6)$$

を  $c_3 > 0$  とおいたとき,

$$\begin{aligned} a(v, v) &\geq \|\nabla v\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)}^2 + c_1 \|v\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R})}^2 + c_2 \|v\|_{L^2(\partial\Omega; \mathbb{R})}^2 \\ &\geq \left( \min\{1, c_2\} + \frac{c_2}{c_3} \right) \|v\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R})}^2 \end{aligned}$$

が成り立つ. 右辺の ( ) を  $\alpha$  とおけば定義 5.2.1 より,  $a$  は強圧的となる.

2.  $a$  は有界である。実際、式 (5.2.4) のトレース作用素のノルム  $\|\gamma\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega;\mathbb{R});H^{1/2}(\partial\Omega;\mathbb{R}))}$  を  $c_4$  とおいたとき、 $c_\Omega \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R})$  と  $c_{\partial\Omega} \in L^\infty(\partial\Omega;\mathbb{R})$  より、

$$\begin{aligned}
 |a(u, v)| &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \\
 &\quad + \|c_\Omega\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R})} \|u\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R})} \|v\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R})} \\
 &\quad + \|c_{\partial\Omega}\|_{L^\infty(\partial\Omega;\mathbb{R})} \|u\|_{L^2(\partial\Omega;\mathbb{R})} \|v\|_{L^2(\partial\Omega;\mathbb{R})} \\
 &\leq \left(1 + \|c_\Omega\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R})} + c_4^2 \|c_{\partial\Omega}\|_{L^\infty(\partial\Omega;\mathbb{R})}\right) \|u\|_{H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)} \|v\|_{H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)}
 \end{aligned}$$

が成り立つ。右辺の ( ) を  $\beta$  とおけば定義 5.2.2 より、 $a$  は有界となる。

3.  $l \in U'$  である. 実際, 式 (5.2.4) のトレース作用素のノルム  $\|\gamma\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega;\mathbb{R});H^{1/2}(\partial\Omega;\mathbb{R}))}$  を  $c_4$  とおいたとき,

$$\begin{aligned} |l(v)| &\leq \int_{\Omega} |bv| \, dx + \int_{\partial\Omega} |p_{\mathbb{R}}v| \, d\gamma \\ &\leq \|b\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R})} \|v\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R})} + \|p_{\mathbb{R}}\|_{L^2(\partial\Omega;\mathbb{R})} \|v\|_{L^2(\partial\Omega;\mathbb{R})} \\ &\leq \left( \|b\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R})} + c_4 \|p_{\mathbb{R}}\|_{L^2(\partial\Omega;\mathbb{R})} \right) \|v\|_{H^1(\Omega;\mathbb{R})} \end{aligned}$$

が成り立つ. 問題 5.1.4 では,  $b \in L^2(\Omega;\mathbb{R})$  および  $p_{\mathbb{R}} \in L^2(\partial\Omega;\mathbb{R})$  が仮定されていたので, 右辺の ( ) は有界となり,  $l$  は  $U$  上の有界線形汎関数となる.

したがって, Lax-Milgram の定理より  $u \in U$  は一意に存在する. □

## §5.2.2 抽象的最小化問題

抽象的変分問題 (問題 5.2.3) において  $a: U \times U \rightarrow \mathbb{R}$  が対称ならば, 抽象的変分問題は**抽象的最小化問題**と同値になることが示される. 本項では, そのことを確認しておこう.

$U$  を実 Hilbert 空間として,  $a: U \times U \rightarrow \mathbb{R}$  を  $U$  上の双 1 次形式とする. 任意の  $u, v \in U$  に対して,

$$a(u, v) = a(v, u)$$

が成り立つとき,  $a$  は対称であるという.

$U$  が  $\mathbb{R}^d$  の場合は,  $x, y \in \mathbb{R}^d$  に対して  $a(x, y) = x \cdot (Ay)$  とかいたとき,  $a$  が対称であることは行列  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  が対称  $A = A^T$  であることと同値となる.

次の問題を抽象的最小化問題という.



### 問題 5.2.8 (抽象的最小化問題)

$a: U \times U \rightarrow \mathbb{R}$  を  $U$  上の双 1 次形式,  $l = l(\cdot) = \langle l, \cdot \rangle \in U'$ ,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  とする. このとき,

$$\min_{u \in U} \left\{ f(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - l(u) \right\}$$

を満たす  $u \in U$  を求めよ.

$U = \mathbb{R}^d$  の場合は,

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} \left\{ f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{x}) - \mathbf{b} \cdot \mathbf{x} \right\} \tag{5.2.7}$$

を満たす  $x \in \mathbb{R}^d$  を求める問題となる.

問題 5.2.8 に対して, 次の結果が得られる (たとえば, [2, Theorem 1.1, p. 24], [6, 定理 2.1, p. 33], [9, 定理 2.7, p. 50]).

### 定理 5.2.9 (抽象的最小化問題の解の一意存在)

問題 5.2.8 において,  $a$  は強圧的, 有界かつ対称とする. このとき, 任意の  $l \in U'$  に対して, 問題 5.2.8 を満たす  $u \in U$  は一意に存在し, 問題 5.2.3 の解と一致する.

$U = \mathbb{R}^d$  のとき,  $A$  が有界, 正定値かつ対称ならば, 式 (5.2.7) を満たす  $x \in \mathbb{R}^d$  は式 (5.2.2) と一致する.

Poisson 問題の弱形式 (問題 5.1.2) において,  $a$  は対称である. したがって, 例題 5.2.5 の解答と定理 5.2.9 より, 問題 5.1.2 は次の問題と同値となる.

### 問題 5.2.10 (Poisson 問題の最小問題)

$a$  と  $\hat{l}$  をそれぞれ式 (5.1.8) と式 (5.2.3) とする. このとき,

$$\min_{\tilde{u} \in U} \left\{ f(\tilde{u}) = \frac{1}{2} a(\tilde{u}, \tilde{u}) - \hat{l}(\tilde{u}) \right\}.$$

を満たす  $\tilde{u} = u - u_D \in U$  を求めよ.

## 5.3. 解の正則性

---

## §5.3 解の正則性

Poisson 問題は抽象的変分問題の一つであり，解の一意存在は Lax-Milgram の定理によって保証されることをみてきた．ここでは，Poisson 問題 (問題 5.1.1) の既知関数  $b, p, u_D$  で構成される式 (5.2.3) の  $\hat{l}$  が  $U'$  の要素に入っていれば，Poisson 問題の解  $u - u_D$  は  $U = \{u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}) \mid u = 0 \text{ on } \Gamma_D\}$  の中に存在することを意味していた．しかし，この条件は解が存在するための条件であり，それよりも滑らかな既知関数が仮定されたならば，Poisson 問題の解もそれに応じて滑らかになることが期待される．第 8 章と第 9 章では境界値問題の解に対して  $H^1$  級以上の滑らかさが必要となる．ここでは，その様子を見ておこう．

なお，本書では，関数の滑らかさとは，関数の微分階数とべき指数に対する可積分性を意味することにして，それらを関数の**正則性**とよぶ．それに対して，正則性が足りないあるいは少ないことを**特異性**とよぶ．関数の正則性(あるいは特異性)は，関数空間の記号に級をつけて「 $C^1$  級」などのように表現することにする．

境界値問題の解の特異性を決める要因は2つある．これらについて以下の項でみていこう．

## §5.3.1 既知関数の正則性

最初に, Poisson 問題 (問題 5.1.1) の既知関数  $b, p, u_D$  の正則性と解の正則性の関係について考えてみよう. 境界  $\partial\Omega$  は十分滑らかであるとする. このとき,

$$\begin{aligned} -\Delta u &= b && \text{in } \Omega, \\ \partial_\nu u &= p_N && \text{on } \Gamma_N, \\ u &= u_D && \text{on } \Gamma_D \end{aligned}$$

が成り立つことから,

$$b \in L^2(\Omega; \mathbb{R}), \quad p_N \in H^1(\Omega; \mathbb{R}), \quad u_D \in H^2(\Omega; \mathbb{R})$$

ならば, Dirichlet 境界と Neumann 境界の境界  $\bar{\Gamma}_N \cap \bar{\Gamma}_D$  の近傍を  $B$  とかくとき,  $u \in H^2(\Omega \setminus \bar{B}; \mathbb{R})$  となる. 実際,  $b \in L^2(\Omega; \mathbb{R})$  ならば Poisson 方程式が満たされることより  $u \in H^2(\Omega \setminus \bar{B}; \mathbb{R})$  が得られる. また, 境界  $\partial\Omega$  は十分滑らかなので,  $\nu \in C(\Gamma_N; \mathbb{R})$  となり,  $p_N \in H^1(\Omega; \mathbb{R})$  ならば,  $p_N \in H^{1/2}(\Gamma_N; \mathbb{R})$  より  $\partial_\nu u = \nu \cdot \nabla u \in H^{1/2}(\Gamma_N \setminus \bar{B}; \mathbb{R})$  が得られる. これより  $u \in H^2(\Omega \setminus \bar{B}; \mathbb{R})$  が得られる. また, Sobolev の埋蔵定理 (定理 4.3.14) によれば,  $d \in \{2, 3\}$  のとき  $\sigma \in (0, 1/2)$  に対して  $H^2(\Omega; \mathbb{R}) \subset C^{0,\sigma}(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$  となる. したがって,  $u$  は連続関数であることになる. このときの  $u$  には特異



性はないという。既知関数をさらに滑らかな関数に変更すれば，それに応じて滑らかな  $u$  が得られることになる。

## §5.3.2 境界の正則性

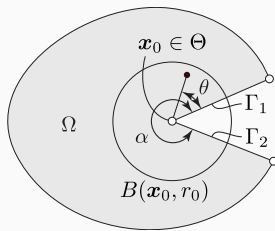


図 5.3.1: 角をもつ 2 次元領域

一方，既知関数が十分滑らかであると仮定されていても，境界が滑らかではない場合には解に特異性が現れることがある．その場合について詳細にみていこう．この項では  $\Omega$  を 2次元領域と仮定し，図 5.3.1 の  $x_0$  のような角点の近傍に注目する．このような角点は，V字型の切り欠きをもつ 3次元領域において，滑らかな切り欠き線に対して垂直な断面上の角点をみていることにも対応する．

図 5.3.1 の  $x_0$  のような境界  $\partial\Omega$  上の  $C^1$  級に対して不連続な点を角点とよび，角点の集合を  $\Theta$  とかくことにする． $r_0$  を正の定数として  $B(x_0, r_0)$  を  $x_0$  の  $r_0$  近傍 (開集合) とする． $x_0$  における領域内部の開き角を  $\alpha \in (0, 2\pi)$  とおき， $x_0$  をはさんだ両側の  $B(x_0, r_0)$  上の境界 (開集合) をそれぞれ  $\Gamma_1$  と

$\Gamma_2$  とする.  $\Gamma_1$  と  $\Gamma_2$  は滑らか ( $C^1$  級) であると仮定する. また,  $x_0$  を原点とする極座標を  $(r, \theta)$  とする.

$x_0$  からはなれたところでは  $u$  は滑らか (解析的) であることから, ある  $r \in (0, r_0]$  を固定すれば,  $u$  は

$$u(r, \theta) = \sum_{i \in \{1, 2, \dots\}} k_i u_i(r) \tau_i(\theta) + u_R \quad (5.3.1)$$

のように展開される (たとえば, [7], [8, 8 章, p. 273], [10], [5, Preface, p. ix, and Chapter 4, p. 182]). ここで,  $u_R$  は既知関数の正則性で決まる残余項を表す. それに対して, 角点によって生じた式 (5.3.1) の右辺第 1 項は主要項とよばれる. 主要項の  $k_i$  は実定数,  $u_i(r)$  は  $r$  に依存して決定される実数値関数を表す. また,  $\tau_i(\theta)$  は境界条件に依存した  $\theta \in (0, \alpha)$  の実数値関数で次のよ

うに決定される.  $\Gamma_1$  と  $\Gamma_2$  がともに同次 Dirichlet 境界 ( $u = 0$ ) およびともに同次 Neumann 境界 ( $\partial_\nu u = 0$ ) のとき, それぞれ,  $i \in \{1, 2, \dots\}$  に対して,

$$\tau_i(\theta) = \sin \frac{i\pi}{\alpha} \theta, \quad (5.3.2)$$

$$\tau_i(\theta) = \cos \frac{i\pi}{\alpha} \theta \quad (5.3.3)$$

となる. 実際, 式 (5.3.2) は  $\tau_i(0) = \tau_i(\alpha) = 0$  を満たす. 式 (5.3.3) は  $(d\tau_i/d\theta)(0) = (d\tau_i/d\theta)(\alpha) = 0$  を満たす. また,  $\Gamma_1$  と  $\Gamma_2$  がそれぞれ同次 Dirichlet 境界と同次 Neumann 境界となる混合境界ならば,  $i \in \{1, 2, \dots\}$  に対して,

$$\tau_i(\theta) = \sin \frac{i\pi}{2\alpha} \theta \quad (5.3.4)$$

となる.

一方, Laplace 作用素  $\Delta$  に対して,

$$\Delta (r^\omega \sin \omega\theta) = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (r^\omega \sin \omega\theta) = 0 \quad (5.3.5)$$

が成り立つ. ただし,  $\omega$  は  $\omega > 1/4$  を満たす 1 ではない実数とする.  $\omega > 1/4$  の条件は, 後で示される条件において  $\Gamma_1$  と  $\Gamma_2$  が混合境界条件でき裂に近づく ( $\alpha \rightarrow 2\pi$ ) ときに  $\omega \rightarrow 1/4$  となることに対応する. また,  $\omega = 1$  は境界が滑らかである条件に対応する. 式 (5.3.5) は, 複素数  $z = x_1 + ix_2 = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$  ( $i$  は虚数単位) と  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  を対応させた複素関数  $f(z) = z^\omega$  の虚部を  $u_i = \text{Im}[z^\omega] = r^m \sin \omega\theta$  とおいたとき, 複素関数が複素微分可能 (正則) であるための必要十分条件を与える **Cauchy-Riemann 方程式** が成り立つことを

使って導くこともできる. 式 (5.3.5) は,  $r^\omega \sin \omega\theta$  の形式をもつ関数であれば, Laplace 方程式 (同次 Poisson 方程式) が満たされることを示している.

この関係に注目すれば,  $\tau_i(\theta)$  が  $\sin \omega\theta$  の形式で与えられたときには,

$$u_i(r) = r^\omega$$

であれば, Laplace 方程式が満たされることになる. この結果から,  $x_0$  の  $r_0$  近傍  $B(x_0, r_0) \cap \Omega$  において, 次の結果が得られる.

1.  $\Gamma_1$  と  $\Gamma_2$  がともに同次 Dirichlet 境界 ( $u = 0$ ) のとき,

$$u(r, \theta) = kr^{\pi/\alpha} \sin \frac{\pi}{\alpha} \theta + u_R \tag{5.3.6}$$

2.  $\Gamma_1$  と  $\Gamma_2$  がともに同次 Neumann 境界 ( $\partial_\nu u = 0$ ) のとき,

$$u(r, \theta) = kr^{\pi/\alpha} \cos \frac{\pi}{\alpha} \theta + u_R \quad (5.3.7)$$

3.  $\Gamma_1$  が同次 Dirichlet 境界で  $\Gamma_2$  が同次 Neumann 境界となる混合境界ならば,

$$u(r, \theta) = kr^{\pi/(2\alpha)} \sin \frac{\pi}{2\alpha} \theta + u_R \quad (5.3.8)$$

ただし,  $k$  は  $\alpha$  に依存した定数である.

また,  $r^\omega$  型の関数が入る Sobolev 空間について, 次の結果が得られる.



### 命題 5.3.1 (特異項の正則性)

$\Omega$  は 2次元有界領域で,  $x_0$  を  $\partial\Omega$  上の開き角  $\alpha \in (0, 2\pi)$  の角点とする. 関数  $u$  は  $x_0$  の近傍  $B(x_0, r_0) \cap \Omega$  で

$$u = r^\omega \tau(\theta)$$

のように与えられたとする. ただし,  $\tau(\theta)$  は  $C^\infty((0, \alpha), \mathbb{R})$  の要素とする. このとき,  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$  および  $p \in (1, \infty)$  に対して,

$$\omega > k - \frac{2}{p} \tag{5.3.9}$$

が成り立てば,  $u$  は  $W^{k,p}(B(x_0, r_0) \cap \Omega; \mathbb{R})$  に入る.

証明  $u = r^\omega \tau(\theta)$  の  $k$  階導関数は  $r^{\omega-k} \tilde{\tau}(\theta)$  の項の和で構成される. ここで,  $\tilde{\tau}(\theta)$  は  $C^\infty((0, \alpha), \mathbb{R})$  の要素である. そこで,  $u$  の  $k$  階導関数が  $B(\mathbf{x}_0, r_0) \cap \Omega$  上で  $p$  乗 Lebesgue 可積分であるためには,

$$\int_0^{r_0} \int_0^\alpha r^{p(\omega-k)} r \tilde{\tau}(\theta) \, d\theta dr < \infty$$

が成り立てばよい. そのためには,

$$p(\omega - k) + 1 > -1$$

であればよい. この関係は式 (5.3.9) を与える. □

角点近傍における Poisson 問題 の解  $u$  の主要項が  $r^\omega$  型の関数になっていることと命題 5.3.1 を用いれば, 図 5.3.2 のような角点に対して, 次の結果が得られる.

### 定理 5.3.2 (角点近傍における解の正則性)

$\Omega$  は 2 次元有界領域で,  $x_0 \in \Theta$  を開き角  $\alpha \in (0, 2\pi)$  の角点とする. このとき, Poisson 問題 (問題 5.1.1) の解  $u$  は  $x_0$  の近傍で  $u \in H^s(B(x_0, r_0) \cap \Omega; \mathbb{R})$  に入る. ただし,

1.  $x_0$  をはさんだ両側の境界  $\Gamma_1$  と  $\Gamma_2$  が同一種境界ならば,  $\alpha \in [\pi, 2\pi)$  のとき  $s \in (3/2, 2]$ ,
2.  $\Gamma_1$  と  $\Gamma_2$  が混合境界ならば,  $\alpha \in [\pi/2, \pi)$  のとき  $s \in (3/2, 2]$ , および  $\alpha \in [\pi, 2\pi)$  のとき  $s \in (5/4, 3/2]$

となる.

証明  $\Gamma_1$  と  $\Gamma_2$  が同一種境界ならば, 式 (5.3.6) と式 (5.3.7) より  $\omega = \pi/\alpha$  となる. そこで, 開き角が  $\alpha \in [\pi, 2\pi)$  のとき  $\omega \in (1/2, 1]$  となる. このとき, 式 (5.3.9) に対して

$$s_1 - \frac{2}{p} = \frac{3}{2} - \frac{2}{2} = \frac{1}{2} < \omega \leq s_2 - \frac{2}{p} = 2 - \frac{2}{2} = 1$$

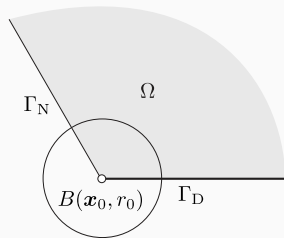
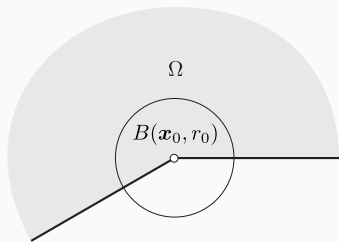
となることに注意すれば,  $\omega \in (1/2, 1]$  に対して  $s$  は (1) のようになる.

一方,  $\Gamma_1$  と  $\Gamma_2$  が混合境界ならば, 式 (5.3.8) より  $\omega = \pi/(2\alpha)$  となる. そこで, 開き角が  $\alpha \in [\pi/2, \pi)$  ならば,  $\omega \in (1/2, 1]$  となり, 式 (5.3.9) を満た

す  $s$  は (2) の前半のような結果となる. また, 開き角が  $\alpha \in [\pi, 2\pi)$  ならば,  $\omega \in (1/4, 1/2]$  となる. このとき, 式 (5.3.9) に対して

$$s_1 - \frac{2}{p} = \frac{5}{4} - \frac{2}{2} = \frac{1}{4} < \omega \leq s_2 - \frac{2}{p} = \frac{3}{2} - \frac{2}{2} = \frac{1}{2}$$

となることに注意すれば,  $\omega \in (1/4, 1/2]$  に対して  $s$  は (2) の後半のような結果となる. □



(a) 同一種境界で開き角が  $\alpha > \pi$     (b) 混合境界で開き角が  $\alpha > \pi/2$

図 5.3.2: 特異性が現れる角をもつ 2 次元領域

定理 5.3.2 の仮定では、き裂 ( $\alpha = 2\pi$ ) は含まれていなかった。  $x_0$  がき裂の場合には、  $\epsilon > 0$  に対して

$$u \in H^{3/2-\epsilon}(B(x_0, r_0) \cap \Omega; \mathbb{R}) \quad (5.3.10)$$

のようにかくことができる。また、  $x_0$  が混合境界の境界で、  $x_0$  の近傍で境界は滑らか ( $\alpha = \pi$ ) である場合も、式 (5.3.10) のようにかくことができる。

さらに、  $u$  が  $W^{1,\infty}$  級となることを保証するためには、次の結果が使われる。



### 定理 5.3.3 (角点近傍における解の正則性)

$\Omega$  は 2次元有界領域で,  $x_0 \in \Theta$  を開き角  $\alpha \in (0, 2\pi)$  の角点とする. このとき,  $x_0$  の近傍で

1.  $\Gamma_1$  と  $\Gamma_2$  が同一種境界ならば,  $\alpha < \pi$  のとき,
2.  $\Gamma_1$  と  $\Gamma_2$  が混合境界ならば,  $\alpha < \pi/2$  のとき,

Poisson 問題 (問題 5.1.1) の解  $u$  は  $W^{1,\infty}(B(x_0, r_0) \cap \Omega; \mathbb{R})$  に入る.

証明  $\Gamma_1$  と  $\Gamma_2$  が同一種境界ならば，式 (5.3.6) と式 (5.3.7) より  $\omega = \pi/\alpha$  となる．そこで，開き角が  $\alpha < \pi$  のとき  $\omega > 1$  となる．このとき，式 (5.3.9) より，(1) を得る．一方， $\Gamma_1$  と  $\Gamma_2$  が混合境界ならば，式 (5.3.8) より  $\omega = \pi/(2\alpha)$  となる．そこで，開き角が  $\alpha < \pi/2$  ならば， $\omega > 1$  となり，式 (5.3.9) より (2) を得る． □

また，定理 5.3.2 (2) より， $\Gamma_1$  と  $\Gamma_2$  が混合境界のときには，境界が滑らかであっても，き裂と同じ特異性が現れることがわかった．このような特異性が生じないようにする一つの方法は，混合境界値問題を問題 5.1.3 のような拡張 Poisson 問題にかきかえることである．このとき， $c_{\partial\Omega} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  に Dirichlet 境界から Neumann 境界に変化するような滑らかな関数を仮定することで，特異点をもたない混合境界値問題を構成することができる．

## 5.4. 線形弾性問題

---

## §5.4 線形弾性問題

本書では、形状最適化問題の具体例を線形弾性体と Stokes 流れ場を使って示そうとしている。ここでは、そのための準備として、線形弾性問題を定義して、その弱形式と解の一意存在についてみておくことにしよう。

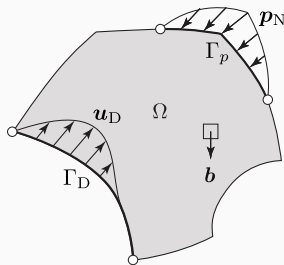


図 5.4.1: 線形弾性問題

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$  を  $d \in \{2, 3\}$  次元の Lipschitz 領域,  $\Gamma_D \subset \partial\Omega$  を変位が与えられた境界 (Dirichlet 境界), 残りの境界  $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus \bar{\Gamma}_D$  を境界力が与えられた境界 (Neumann 境界) とする. また,  $\Gamma_p \subset \Gamma_N$  は境界力が非零の境界を表すことにする. ここでは,  $\Gamma_p$  と  $\Gamma_N \setminus \bar{\Gamma}_p$  を区別しないが, 第9章では区別することにする. 図 5.4.1 に2次元の場合の線形弾性体を示す. ただし, 例題 5.2.6 でみたように, 定数分の不定性をなくすために,  $|\Gamma_D| > 0$  を仮定する. また,  $\mathbf{b} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  を**体積力**,  $\mathbf{p}_N : \Gamma_N \rightarrow \mathbb{R}^d$  を**境界力**,  $\mathbf{u}_D : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  を与えられた変位とする. 線形弾性問題はこれらが与えられたときに**変位**  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  を求める問題として定義される.

## §5.4.1 線形ひずみ

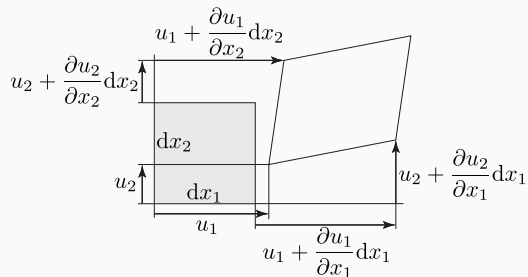


図 5.4.2: 2次元線形弾性体の変位  $u$  と変位勾配  $(\nabla u^T)^T$  の成分

第1章で1次元連続体の線形弾性問題が定義された。ここでは、それを  $d \in \{2, 3\}$  次元に拡張しよう。最初に、ひずみを定義しよう。1次元の線形弾性体では、変位  $u$  は  $(0, l)$  上で定義された実数値関数であった。ひずみはその勾配  $du/dx$  によって定義された。  $d \in \{2, 3\}$  次元の線形弾性体の場合には、変位  $\mathbf{u}$  は  $d$  次元のベクトルとなり、その勾配  $(\nabla \mathbf{u}^\top)^\top = (\partial u_i / \partial x_j)_{ij}$  は  $\mathbb{R}^{d \times d}$  の値をもつ2階のテンソル(行列)となる。図5.4.2に  $\mathbf{u}$  と  $(\nabla \mathbf{u}^\top)^\top$  の関係を示している。そのテンソルを対称成分と非対称成分に分けて

$$(\nabla \mathbf{u}^\top)^\top = \mathbf{E}(\mathbf{u}) + \mathbf{R}(\mathbf{u}) \quad (5.4.1)$$

とおく. このとき,

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \mathbf{E}^\top(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}))_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \nabla \mathbf{u}^\top + (\nabla \mathbf{u}^\top)^\top \right\} \quad (5.4.2)$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}) = -\mathbf{R}^\top(\mathbf{u}) = (r_{ij}(\mathbf{u}))_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ (\nabla \mathbf{u}^\top)^\top - \nabla \mathbf{u}^\top \right\} \quad (5.4.3)$$

となる. ここで, 対称成分  $\mathbf{E}(\mathbf{u})$  は,  $\Omega$  が 2 次元領域のとき図 5.4.3 の (a) から (c) のような変形を表し,  $d$  次元線形弾性体の線形ひずみあるいは混乱のおそれがないときはひずみとよばれる. また, 非対称成分  $\mathbf{R}(\mathbf{u})$  は,  $\Omega$  が 2 次元領域のとき図 5.4.3 の (d) のような回転運動を表し,  $d$  次元線形弾性体の回転テンソルとよばれる.



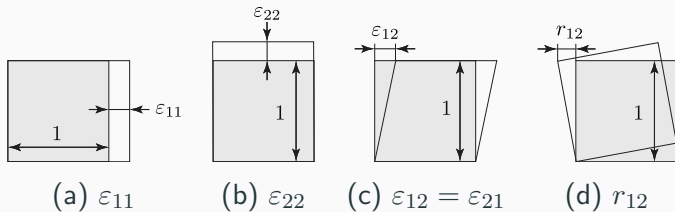


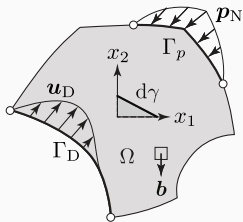
図 5.4.3: 2次元線形弾性体の線形ひずみ  $E(u)$  と回転テンソル  $R(u)$  の成分

式 (5.4.2) と式 (5.4.3) で定義された線形ひずみと回転テンソルは， $u$  が  $0_{\mathbb{R}^d}$  (変形前) のときの勾配テンソルを用いて定義されている．そこで， $u$  は大きな値をとることはできないことに注意する必要がある． $u$  が有限の大きさをもつことが仮定されたときには，変位勾配の2次項をもつ Almansi のひ

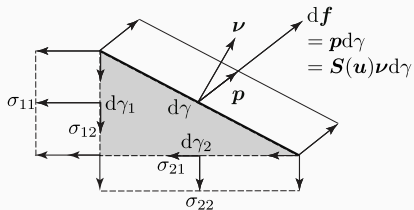
ずみあるいは Green のひずみを用いた有限変形理論が使われる。その場合には偏微分方程式が非線形となる。このときの非線形性は幾何学的非線形性とよばれる。本書の範囲は線形問題までにとどめることにする。

## §5.4.2 Cauchy 応力

一方，変位から定義された線形ひずみに対して，力の分布からは応力が定義される．領域  $\Omega$  の内部に微小な領域を考える． $d = 2$  のときには図 5.4.4 (b) のような 3 角形を， $d = 3$  のときには図 5.4.5 のような 3 角錐を考える．それらの傾斜境界の法線を  $\nu$  とする．傾斜境界に作用する単位境界測度 ( $d = 2$  のとき長さ， $d = 3$  のとき面積) あたりの力を  $p \in \mathbb{R}^d$  とする． $p$  は**応力**とよばれる．また， $i, j \in \{1, \dots, d\}$  に対して  $\sigma_{ij}$  を  $x_i$  方向を法線とする境界に作用する単位境界測度あたりの  $x_j$  方向の力とするととき， $S = (\sigma_{ij}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$  は**Cauchy 応力**，あるいは混乱のおそれがないときは**応力**とよばれる．



(a) 領域内の微小線分  $d\gamma$



(b) Cauchy 応力と応力

図 5.4.4: 2次元線形弾性体の Cauchy 応力  $\mathbf{S}$  と応力  $\mathbf{p}$

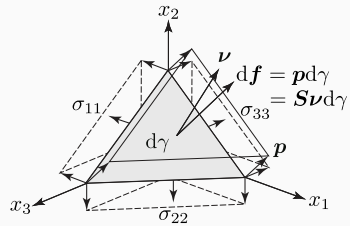


図 5.4.5: 3次元線形弾性体の Cauchy 応力  $S$  と応力  $p$

Cauchy 応力  $S$  と応力  $p$  は次のように関連づけられる.

### 命題 5.4.1 (Cauchy 応力)

$p$  を応力,  $S$  を Cauchy 応力とするとき,

$$S^{\top} \nu = S \nu = p \tag{5.4.4}$$

が成り立つ.

証明  $d = 2$  の場合について示す.  $i \in \{1, 2\}$  に対して,  $x_i$  方向の力のつり合いにより,

$$\sigma_{1i}d\gamma_1 + \sigma_{2i}d\gamma_2 = p_i d\gamma$$

が成り立つ (図 5.4.4 (b)). ここで,  $\nu_1 = d\gamma_1/d\gamma$  と  $\nu_2 = d\gamma_2/d\gamma$  を使えば,

$$\sigma_{1i}\nu_1 + \sigma_{2i}\nu_2 = p_i \tag{5.4.5}$$

が得られる. 式 (5.4.5) は式 (5.4.4) を表している. 一方, モーメントのつり合いにより,

$$\sigma_{21} = \sigma_{12}$$

が成り立つ (図 5.4.6).  $d = 3$  の場合も同様の関係が成り立つ. □

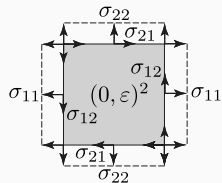


図 5.4.6: 2次元線形弾性体の微小面積におけるモーメントのつり合い ( $\epsilon \ll 1$ )



### §5.4.3 構成方程式

第1章で1次元の線形弾性問題が定義された際にも使われたように、変位を用いて定義されたひずみと力を用いて定義された応力を関連づける**構成方程式**あるいは**構成則**が必要となる。  $d$  次元の線形弾性体では、

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{u}) &= \mathbf{S}^\top(\mathbf{u}) = (\sigma_{ij}(\mathbf{u}))_{ij} \\ &= \mathbf{C}\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \left( \sum_{(k,l) \in \{1, \dots, d\}^2} c_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \right)_{ij} \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

によって与えられる。ここで、 $\mathbf{C} = (c_{ijkl})_{ijkl} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d \times d \times d}$  は剛性を表す4階のテンソル値関数で、次の性質が仮定される。まず、 $\mathbf{S}(\mathbf{u})$  と  $\mathbf{E}(\mathbf{u})$  の対称性により、

$$c_{ijkl} = c_{jikl}, \quad c_{ijkl} = c_{ijlk} \tag{5.4.7}$$

が成り立つ。また、 $C$  は  $L^\infty$  級の関数であると仮定して、 $\Omega$  上ほとんど至るところで、任意の対称テンソル  $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{d \times d}$  と  $B = (b_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{d \times d}$  に対して

$$A \cdot (CA) \geq \alpha \|A\|^2, \tag{5.4.8}$$

$$|A \cdot (CB)| \leq \beta \|A\| \|B\| \tag{5.4.9}$$

が成り立つような正の定数  $\alpha$  と  $\beta$  が存在する。なお、本書では行列のスカラ積を  $A \cdot B = \sum_{i,j \in \{1, \dots, d\}} a_{ij} b_{ij}$  のように表すことにする。式 (5.4.8) が成

り立つことを  $C$  は楕円的であるという。また、式 (5.4.9) が成り立つことを  $C$  は有界であるという。  $C$  が  $u$  の関数ではない (応力がひずみの線形関数になる) とき、式 (5.4.6) は一般化 Hooke の法則とよばれる。  $C$  が  $u$  の関数となることによる非線形性は材料非線形性とよばれる。このような非線形性も本書では扱わないことにする。

また、剛性  $C$  の中で独立に選べる実数の数について、  $d = 3$  のとき、次のことがいえる。

1.  $C$  は  $3^4 = 81$  個の実数で構成される。
2. 式 (5.4.7) により 36 個に減少する。

3. ひずみエネルギー密度  $w$  が存在して

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{E}(\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{C} \mathbf{E}(\mathbf{u})), \quad \mathbf{S}(\mathbf{u}) = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{E}(\mathbf{u})}$$

が成り立つと仮定すれば, 2次形式の対称性により

$$c_{ijkl} = c_{klij} \tag{5.4.10}$$

が成り立ち, 21 個に減少する.

4. 直交異方性材料の場合は 9 個に減少する.
5. 等方性材料の場合は 2 個に減少する.

等方性材料の場合の2定数を  $\lambda_L$  と  $\mu_L$  のようにかくことにして,

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}) = 2\mu_L \mathbf{E}(\mathbf{u}) + \lambda_L \text{tr}(\mathbf{E}(\mathbf{u})) \mathbf{I}$$

とおいたとき,  $\lambda_L$  と  $\mu_L$  は **Lamé の定数** とよばれる. ただし,  $\text{tr}(\mathbf{E}(\mathbf{u})) = \sum_{i \in \{1, \dots, d\}} e_{ii}(\mathbf{u})$  を表す. なお,  $\mu_L$  は **せん断弾性係数** とよばれる. また, 2定数を  $e_Y$  と  $\nu_P$  のようにかくことにして,

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \frac{1 + \nu_P}{e_Y} \mathbf{S}(\mathbf{u}) - \frac{\nu_P}{e_Y} \text{tr}(\mathbf{S}(\mathbf{u})) \mathbf{I}$$

が仮定されたとき， $e_Y$  と  $\nu_P$  はそれぞれ縦弾性係数 (Young 率) と Poisson 比とよばれる．その他に，体積弾性率  $k_b$  も使われる．これらの定数に関して，

$$k_b = \lambda_L + \frac{2\mu_L}{3}, \quad e_Y = 2\mu_L(1 + \nu_P), \quad \lambda_L = \frac{2\mu_L\nu_P}{1 - 2\nu_P}$$

などの関係が成り立つ．

## §5.4.4 力のつり合い方程式

線形弾性問題は，線形ひずみと Cauchy 応力が式 (5.4.6) の一般化 Hooke の法則で関連づけられているもとで，力のつり合い条件を使って構成される．

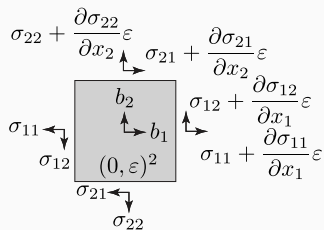


図 5.4.7: 微小面積における力のつり合い ( $\epsilon \ll 1$ )

2次元線形弾性体の内部に任意の4角形微小要素を選んだとき、その要素に作用する力は図 5.4.7 の矢印のようになる。このとき、 $x_1$  方向と  $x_2$  方向の力のつり合い方程式は

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + b_1 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + b_2 &= 0\end{aligned}$$

となる。  $d \in \{2, 3\}$  次元線形弾性体の場合には、

$$-\nabla^\top \mathbf{S}(\mathbf{u}) = \mathbf{b}^\top \tag{5.4.11}$$



とかける．式 (5.4.11) は， $\nabla^\top S(u) = \nabla \cdot \left[ C \left\{ \frac{1}{2} \left( \nabla u^\top + (\nabla u^\top)^\top \right) \right\} \right]$  であることをみれば， $u$  に対する 2 階偏微分方程式となっている．さらに， $C$  が楕円性を満たすことから，式 (5.4.11) は楕円型偏微分方程式に分類される．

式 (5.4.11) の力のつり合い方程式に境界条件を加えれば，次のような線形弾性問題が定義される．

### 問題 5.4.2 (線形弾性問題)

$\mathbf{b} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\mathbf{p}_N : \Gamma_N \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\mathbf{u}_D : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  に対して,

$$-\nabla^\top \mathbf{S}(\mathbf{u}) = \mathbf{b}^\top \quad \text{in } \Omega, \quad (5.4.12)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} = \mathbf{p}_N \quad \text{on } \Gamma_N, \quad (5.4.13)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D \quad \text{on } \Gamma_D \quad (5.4.14)$$

を満たす  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  を求めよ.

## §5.4.4 力のつり合い方程式

線形弾性問題の解の一意存在を示すために、問題 5.4.2 を弱形式にかきかえよう。  $u$  に対する関数空間を

$$U = \{ \boldsymbol{v} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \mid \boldsymbol{v} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \Gamma_D \} \quad (5.4.15)$$

とおく。式 (5.4.12) の両辺に任意の  $\boldsymbol{v} \in U$  をかけて  $\Omega$  で積分し、Gauss-Green の定理 (A.8.2) を用いることにより、

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} (\nabla^\top \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})) \boldsymbol{v} \, dx &= - \int_{\Gamma_N} (\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{v} \, d\gamma + \int_{\Omega} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}) \, dx \\ &= \int_{\Omega} \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v} \, dx \end{aligned} \quad (5.4.16)$$

が得られる。また、式 (5.4.13) の両辺に任意の  $\boldsymbol{v} \in U$  をかけて  $\Gamma_N$  で積分すれば、

$$\int_{\Gamma_N} (\mathbf{S}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu}) \cdot \mathbf{v} \, d\gamma = \int_{\Gamma_N} \mathbf{p}_N \cdot \mathbf{v} \, d\gamma \quad (5.4.17)$$

が得られる。式 (5.4.16) の第 2 式第 1 項に式 (5.4.17) を代入すれば,

$$\int_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{p}_N \cdot \mathbf{v} \, d\gamma$$

が得られる。任意の  $\mathbf{v} \in U$  に対してこの式が成り立つことを線形弾性問題の弱形式という。

ここでも,

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) \, dx, \quad (5.4.18)$$

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{p}_N \cdot \mathbf{v} \, d\gamma \quad (5.4.19)$$

とおけば, 線形弾性問題の弱形式は次のようになる.

### 問題 5.4.3 (線形弾性問題の弱形式)

$U$  を式 (5.4.15) とする.  $\mathbf{b} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$ ,  $\mathbf{p}_N \in L^2(\Gamma_N; \mathbb{R}^d)$ ,  $\mathbf{u}_D \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$  および  $\mathbf{C} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{d \times d \times d \times d})$  とする.  $a(\cdot, \cdot)$  と  $l(\cdot)$  をそれぞれ式 (5.4.18) と式 (5.4.19) とおく. このとき, 任意の  $\mathbf{v} \in U$  に対して

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v})$$

を満たす  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_D \in U$  を求めよ.

## §5.4.6 解の存在

線形弾性問題の弱形式は、 $v$  を仮想変位とみなせば  $l(v)$  は外力による仮想仕事、 $a(u, v)$  は内力による仮想仕事であることから、仮想仕事の原理を表している。この弱形式に対する解の一意存在は次のようにして示される。

### 例題 5.4.4 (線形弾性問題の解の一意存在)

問題 5.4.3 において、 $|\Gamma_D| > 0$  のとき、解  $\tilde{u} = u - u_D \in U$  は一意に存在することを示せ。

解答 Lax-Milgram の定理の仮定が成り立つことを確かめよう.  $U$  は Hilbert 空間である. また, 任意の  $v \in U$  に対して,

$$\hat{l}(v) = l(v) - a(u_D, v)$$

とおけば, 問題 5.4.3 は,

$$a(\tilde{u}, v) = \hat{l}(v)$$

を満たす  $\tilde{u} = u - u_D \in U$  を求める問題にかきかえられる. そのうえで, 次のように Lax-Milgram の定理の仮定が成り立つことが確かめられる.



1.  $a$  は強圧的である。実際、 $|\Gamma_D| > 0$  より剛体運動は発生しない。したがって、**Korn の第 2 不等式** (定理 A.9.6) より、正の定数  $c$  に対して

$$\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)}^2 \leq c \|\mathbf{E}(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^{d \times d})}^2$$

が成り立つ。式 (5.4.8) による  $C$  の楕円性より、 $\mathbf{v} \in U$  に対して、

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{E}(\mathbf{v}) \cdot (C\mathbf{E}(\mathbf{v})) \, dx \\ &\geq c_1 \|\mathbf{E}(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^{d \times d})}^2 \geq \frac{c_1}{c} \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)}^2 \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $c_1$  は式 (5.4.8) の  $\alpha$  と  $|\Omega|$  をかけた正の定数である。 $c_1/c$  をあらためて  $\alpha$  とおけば定義 5.2.1 より、 $a$  は強圧的となる。

2.  $a$  は有界である．実際，式 (5.4.9) の  $\beta$  と  $|\Omega|$  をかけた正の定数をあらためて  $\beta$  とおけば，定義 5.2.2 より， $a$  の有界性が確かめられる．
3.  $\hat{l} \in U'$  である．実際， $\partial\Omega$  は Lipschitz 境界を仮定していることから，トレース作用素 (定理 4.4.2) のノルム  $\|\gamma\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega;\mathbb{R}^d);H^{1/2}(\partial\Omega;\mathbb{R}^d))}$  は有界である．それを  $c_2 > 0$  とおく．また，Hölder の不等式を用いれば，

$$\begin{aligned}
 |\hat{l}(\mathbf{v})| &\leq \int_{\Omega} |\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}| \, dx + \int_{\Gamma_N} |\mathbf{p}_N \cdot \mathbf{v}| \, d\gamma + \int_{\Omega} \beta |\mathbf{E}(\mathbf{u}_D) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v})| \, dx \\
 &\leq \|\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{p}_N\|_{L^2(\Gamma_N;\mathbb{R}^d)} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma_N;\mathbb{R}^d)} \\
 &\quad + \beta \|\mathbf{E}(\mathbf{u}_D)\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{d \times d})} \|\mathbf{E}(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{d \times d})} \\
 &\leq \left( \|\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + c_2 \|\mathbf{p}_N\|_{L^2(\Gamma_N;\mathbb{R}^d)} \right)
 \end{aligned}$$

$$+ \beta \| \mathbf{E}(\mathbf{u}_D) \|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^{d \times d})} \| \mathbf{v} \|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)}$$

が成り立つためである.

したがって, Lax-Milgram の定理より, 問題 5.4.3 を満たす  $\tilde{u} = u - u_D \in U$  は一意に存在する. □

## 5.5. Stokes 問題

---

## §5.5 Stokes 問題

次に、流れ場の例として **Stokes 問題** を定義して、その弱形式と解の一意存在についてみておこう。Stokes 問題とは、粘性流体の流れ場で、粘性力に比べて慣性力が無視できる程度にゆっくりとした流れ場の数理モデルとして用いられる。

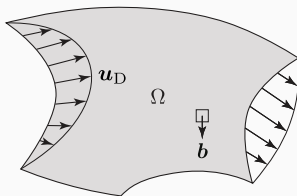


図 5.5.1: Stokes 問題

ここでも  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  を  $d \in \{2, 3\}$  次元の Lipschitz 領域とする.  $\mathbf{b} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  を体積力とする. また,  $\Omega$  の全境界  $\partial\Omega$  を流速が与えられた Dirichlet 境界として,  $\mathbf{u}_D : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  を与えられた流速とする. ただし,

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_D = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{5.5.1}$$

が満たされるとする.  $\mu$  を粘性係数を表す正の定数とする. 図 5.5.1 に 2 次元の場合の Stokes 問題を示す.

Stokes 問題は, これらが与えられたときに流速  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  と圧力  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  を求める問題として次のように定義される. なお,  $(\boldsymbol{\nu} \cdot \nabla) \mathbf{u} = (\nabla \mathbf{u}^\top)^\top \boldsymbol{\nu}$  を  $\partial_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{u}$  とかくことにする.

### 問題 5.5.1 (Stokes 問題)

$\mathbf{b} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\mathbf{u}_D : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  と  $\mu \in \mathbb{R}$  が与えられたとき,

$$-\nabla^\top (\mu \nabla \mathbf{u}^\top) + \nabla^\top p = \mathbf{b}^\top \quad \text{in } \Omega, \quad (5.5.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (5.5.3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (5.5.4)$$

$$\int_{\Omega} p \, dx = 0 \quad (5.5.5)$$

を満たす  $(\mathbf{u}, p) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$  を求めよ.

問題 5.5.1 において、式 (5.5.2) を Stokes 方程式、式 (5.5.3) を連続の式という。これらは非圧縮性の Newton 粘性流体の流れ場に対して使われる。

なお、式 (5.5.2) は

$$-\nabla^\top (\mu \nabla \mathbf{u}^\top - p \mathbf{I}) = \mathbf{b}^\top \quad \text{in } \Omega \quad (5.5.6)$$

とかかれることもある。ただし、 $\mathbf{I}$  は  $d$  次の単位行列を表す。また、式 (5.4.2) の  $\mathbf{E}(\mathbf{u})$  を用いて、Cauchy 応力を

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}, p) = -p \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E}(\mathbf{u}) \quad (5.5.7)$$

のように定義して、式 (5.5.2) を

$$-\nabla^\top \mathbf{S}(\mathbf{u}, p) = \mathbf{b}^\top \quad \text{in } \Omega, \quad (5.5.8)$$



のようにかくこともある。式 (5.5.3) が成り立つ場合には、これらは同値となる。本章では、5.6 節で抽象的鞍点型変分問題との関連をみるために式 (5.5.2) を用いることにする。

問題 5.5.1 に対する弱形式は次のようにして求められる。 $u$  に対する関数空間を

$$U = \{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \mid \mathbf{u} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \partial\Omega \} \quad (5.5.9)$$

とおく。式 (5.5.2) の両辺に任意の  $\mathbf{v} \in U$  をかけて  $\Omega$  で積分し、Gauss-Green の定理 (A.8.2) を用いることにより、

$$\int_{\Omega} \{ \nabla^{\top} (\mu \nabla \mathbf{u}^{\top}) - \nabla^{\top} p + \mathbf{b}^{\top} \} \mathbf{v} \, dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\partial\Omega} (\mu\partial_\nu \mathbf{u} - p\nu) \cdot \mathbf{v} \, d\gamma \\
&\quad + \int_{\Omega} \{-\mu (\nabla \mathbf{u}^\top) \cdot (\nabla \mathbf{v}^\top) + p\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}\} \, dx \\
&= \int_{\Omega} \{-\mu (\nabla \mathbf{u}^\top) \cdot (\nabla \mathbf{v}^\top) + p\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}\} \, dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

が得られる。任意の  $\mathbf{v} \in U$  に対してこの式が成り立つことを Stokes 方程式の弱形式という。

一方,  $p$  に対する関数空間を

$$P = \left\{ q \in L^2(\Omega; \mathbb{R}) \mid \int_{\Omega} q \, dx = 0 \right\} \tag{5.5.10}$$

とおく. 式 (5.5.3) に任意の  $q \in P$  をかけて  $\Omega$  で積分することにより,

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} \, dx = 0$$

が成り立つ. 任意の  $q \in P$  に対してこの式が成り立つことを連続の式の弱形式という.

Stokes 問題に対しては.

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mu (\nabla \mathbf{u}^{\top}) \cdot (\nabla \mathbf{v}^{\top}) \, dx, \quad (5.5.11)$$

$$b(\mathbf{v}, q) = - \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx, \quad (5.5.12)$$

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dx \tag{5.5.13}$$

とおく. このとき, Stokes 問題の弱形式は次のようにかける.

## 問題 5.5.2 (Stokes 問題の弱形式)

$U$  と  $P$  をそれぞれ式 (5.5.9) と式 (5.5.10) とする.  $\mathbf{u}_D \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$  は式 (5.5.1) を満たすとする.  $\mu$  は正の定数とする.  $a(\cdot, \cdot)$ ,  $b(\cdot, \cdot)$  および  $l(\cdot)$  はそれぞれ式 (5.5.11), 式 (5.5.12) および式 (5.5.13) とする. このとき, 任意の  $(\mathbf{v}, q) \in U \times P$  に対して

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = l(\mathbf{v}), \quad (5.5.14)$$

$$b(\mathbf{u}, q) = 0 \quad (5.5.15)$$

を満たす  $(\tilde{\mathbf{u}}, p) = (\mathbf{u} - \mathbf{u}_D, p) \in U \times P$  を求めよ.

## 5.6. 抽象的鞍点型变分問題

---

## §5.6 抽象的鞍点型変分問題

Stokes 問題の弱形式がえられたので，それらを満たす解の一意存在がどのような結果に基づいて保証されるのかについてみておこう．

線形弾性問題は変位  $u$  に対する楕円型偏微分方程式になっていた．そこで，抽象的変分問題あるいは抽象的最小化問題に対する結果を用いて解の一意存在を示すことができた．それに対して，Stokes 問題は流速  $u$  に加えて圧力  $p$  が未知変数に加わり，その分連続の式を同時に満たすことが要請されている．この構成は，制約付きの抽象的変分問題，あるいは制約付きの抽象的最小化問題に相当する**抽象的鞍点型変分問題**，あるいは**抽象的鞍点問題**とよばれる問題になっていることが確かめられる．ここでは，その定義と結果を使って Stokes 問題に対する解の一意存在を示そう．

$U$  と  $P$  を実 Hilbert 空間として,  $a : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$  と  $b : U \times P \rightarrow \mathbb{R}$  をそれぞれ  $U \times U$  および  $U \times P$  上で定義された有界双線形作用素 (4.4.4 項) とする. それらのノルムを

$$\|a\| = \|a\|_{\mathcal{L}(U,U;\mathbb{R})} = \sup_{\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U \setminus \{\mathbf{0}_U\}} \frac{|a(\mathbf{u}, \mathbf{v})|}{\|\mathbf{u}\|_U \|\mathbf{v}\|_U},$$
$$\|b\| = \|b\|_{\mathcal{L}(U,P;\mathbb{R})} = \sup_{\mathbf{u} \in U \setminus \{\mathbf{0}_U\}, q \in P \setminus \{0_P\}} \frac{|b(\mathbf{u}, q)|}{\|\mathbf{u}\|_U \|q\|_P}$$

とおく.

さらに, 連続の式が満たされるような関数の集合で Hilbert 空間となるような線形空間を次のように定義する.



### 定義 5.6.1 (発散なし Hilbert 空間 $U_{\text{div}}$ )

$b : U \times P \rightarrow \mathbb{R}$  を双 1 次形式とする。このとき、

$$U_{\text{div}} = \{v \in U \mid b(v, q) = 0 \text{ for all } q \in P\}$$

を  $U$  に対する発散なし Hilbert 空間という。

これらの定義を用いて、次のような問題を考える。

### 問題 5.6.2 (抽象的鞍点型変分問題)

$a : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$  と  $b : U \times P \rightarrow \mathbb{R}$  を有界双線形作用素とする.  $l \in U'$  および  $r \in P'$  とする. 任意の  $(v, q) \in U \times P$  に対して,

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = \langle l, \mathbf{v} \rangle,$$

$$b(\mathbf{u}, q) = \langle r, q \rangle$$

を満たす  $(\mathbf{u}, p) \in U \times P$  を求めよ.

## §5.6.1 解の存在定理

抽象的鞍点型変分問題 5.6.2 の解の一意存在について次の結果が知られている (たとえば, [4, Corollary 4.1, p. 61], [1, Theorem 1.1, p. 42], [6, 定理 7.3, p. 135], [9, 定理 4.3, p. 116]).

### 定理 5.6.3 (抽象的鞍点型変分問題の解の存在)

$a : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$  を  $U_{\text{div}}$  で強圧的な有界双線形作用素 (任意の  $\boldsymbol{v} \in U_{\text{div}}$  に対して,

$$|a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})| \geq \alpha \|\boldsymbol{v}\|_U^2$$

を満たす  $\alpha > 0$  が存在する) とする.  $b : U \times P \rightarrow \mathbb{R}$  を有界双線形作用素で,

$$\inf_{q \in P \setminus \{0_P\}} \sup_{\boldsymbol{v} \in U \setminus \{0_U\}} \frac{b(\boldsymbol{v}, q)}{\|\boldsymbol{v}\|_U \|q\|_P} \geq \beta \tag{5.6.1}$$

### 定理 5.6.3 (抽象的鞍点型変分問題の解の存在)

を満たす  $\beta > 0$  が存在するとする. このとき, 問題 5.6.2 の解  $(\mathbf{u}, p) \in U \times P$  は一意に存在し,  $\alpha, \beta, \|a\|$  および  $\|b\|$  に依存した  $c > 0$  に対して,

$$\|u\|_U + \|p\|_P \leq c (\|l\|_{U'} + \|r\|_{P'})$$

が成り立つ.

式 (5.6.1) は **下限上限条件**, あるいは Ladysensskaja-Babuška-Brezzi 条件, Babuška-Brezzi-Kikuchi 条件などとよばれる.

定理 5.6.3 を用いれば, Stokes 問題に対する解の一意存在は次のように示される.

#### 例題 5.6.4 (Stokes 問題の解の一意存在)

問題 5.5.2 において,  $\partial\Omega$  上で  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$  を満たすような  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_D \in U_{\text{div}}$  が存在するとする. このとき, 式 (5.5.14) と式 (5.5.15) を満たす  $(\tilde{\mathbf{u}}, p) \in U \times P$  は一意に存在することを示せ.

解答 定理 5.6.3 の仮定が次のように成り立つことを確認しよう.  $U$  と  $P$  は Hilbert 空間である. また, 問題 5.5.2 は, 任意の  $(\mathbf{v}, q) \in U \times P$  に対して,

$$a(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = \hat{l}(\mathbf{v}), \quad b(\tilde{\mathbf{u}}, q) = \hat{r}(q),$$

を満たす  $(\tilde{u}, p) \in U \times P$  を求める問題と同値である。ただし、

$$\hat{l}(v) = l(v) - a(u_D, v), \quad \hat{r}(q) = -b(u_D, q)$$

とする。  $a$  は  $U_{\text{div}}$  上で有界かつ強圧的である。なぜならば、例題 5.4.4 の解答より、 $a$  は有界かつ  $U$  で強圧的であるためである。  $b$  は有界かつ下限上限条件を満たす。実際、  $U_{\text{div}}^\perp$  を  $U_{\text{div}}$  の直交補空間として、作用素  $\text{div}$  の定義域を  $U_{\text{div}}^\perp$  に制限した作用素を  $\tau$  とする。  $\tau$  は有界 ( $|\text{div}v| / \|v\|_U < \infty$ ) 線形である。また、単射 ( $v_1, v_2 \in U_{\text{div}}^\perp$  に対して  $\tau v_1 = \tau v_2$  ならば  $v_1 = v_2$ ) である。なぜならば、  $v \in U_{\text{div}}^\perp$  に対して  $\tau v = \text{div}v = 0$  のときに  $v \in U_{\text{div}}$  となり、  $v \in U_{\text{div}}^\perp \cap U_{\text{div}} = \{0_U\}$  となるからである。さらに、  $\tau$  は  $U_{\text{div}}^\perp$  から  $P$  への全射であることが示される (証明は [4] などを参照されたい)。そこで、

$$\inf_{q \in P \setminus \{0_P\}} \sup_{v \in U \setminus \{0_U\}} \frac{b(v, q)}{\|v\|_U \|q\|_P}$$

$$\begin{aligned}
&= \inf_{q \in P \setminus \{0_P\}} \sup_{\mathbf{v} \in U \setminus \{\mathbf{0}_U\}} \frac{(-\operatorname{div} \mathbf{v}, q)_{L^2(\Omega; \mathbb{R})}}{\|\mathbf{v}\|_U \|q\|_P} \\
&\geq \inf_{q \in P \setminus \{0_P\}} \sup_{\mathbf{v} \in U \setminus \{\mathbf{0}_U\}} \frac{(-\tau \mathbf{v}, q)_P}{\|\tau^{-1}(-q)\|_U \|q\|_P} \geq \inf_{q \in P \setminus \{0_P\}} \frac{(q, q)_P}{\|\tau^{-1}(-q)\|_U \|q\|_P} \\
&\geq \frac{1}{\|\tau^{-1}\|_{\mathcal{L}(P; U_{\operatorname{div}}^\perp)}} > 0
\end{aligned}$$

が成り立つ．一方， $\hat{l} \in U'$  は例題 5.4.4 の解答の中で示されている．また，式 (5.5.1) の仮定より， $\hat{r}(q) = 0 \in P'$  である．以上のことから，定理 5.6.3 が適用できて，問題 5.5.2 を満たす  $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_D, p) \in U \times P$  は一意に存在する．  $\square$



## §5.6.2 抽象的鞍点問題

抽象的鞍点型変分問題 (問題 5.6.2) において  $a : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$  が対称のときには, 抽象的鞍点型変分問題は次のような**抽象的鞍点問題**と同値になる.

### 問題 5.6.5 (抽象的鞍点問題)

$a : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$  と  $b : U \times P \rightarrow \mathbb{R}$  を有界双線形作用素とする。  
 $(l, r) \in U' \times P'$  が与えられたとき,

$$\mathcal{L}(v, q) = \frac{1}{2}a(v, v) + b(v, q) - \langle l, v \rangle - \langle r, q \rangle$$

とする。このとき、任意の  $(v, q) \in U \times P$  に対して,

$$\mathcal{L}(u, q) \leq \mathcal{L}(u, p) \leq \mathcal{L}(v, p)$$

を満たす  $(u, p) \in U \times P$  を求めよ。

問題 5.6.5 に対して次の結果が得られる (たとえば, [4, Theorem 4.2, p. 62], [9, 定理 4.4, p. 118]).

### 定理 5.6.6 (抽象的鞍点問題と鞍点型変分問題の解の一致)

$a$  が対称 ( $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ ) かつ半正定値 (任意の  $\mathbf{v} \in U$  に対して  $a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$  が成り立つ) のとき, 問題 5.6.2 の解と問題 5.6.5 の解は一致する.

なお, 抽象的鞍点問題 (問題 5.6.5) において,  $q \in P$  は連続の式のような等式制約に対する Lagrange 乗数となっていることを確認しておこう. 問題 5.6.5 は,

$$f(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \langle l, \mathbf{v} \rangle$$

とおいたとき,

$$\min_{(\mathbf{v}, q) \in U \times P} \{f(\mathbf{v}) \mid b(\mathbf{v}, q) - \langle r, q \rangle = 0\} \quad (5.6.2)$$

を満たす  $(\mathbf{v}, q)$  を求める問題になっている。このとき、問題 5.6.5 の  $\mathcal{L}(\mathbf{v}, q)$  はこの問題の Lagrange 関数であり、 $q \in P$  は等式制約に対する Lagrange 乗数になっている。式 (5.6.2) の解が問題 5.6.5 の鞍点と一致することを示す定理 5.6.6 は、双対定理 (定理 2.9.2) に対応した結果になっている。

## 5.7. 第5章のまとめ

---

## §5.7 第5章のまとめ

第5章では、楕円型偏微分方程式の境界値問題を定義して、その弱形式を求め、解の存在と正則性についてみてみた。要点は以下のものである。

1. 楕円型偏微分方程式の境界値問題 (Poisson 問題) に対する解の一意存在は、弱形式に対して Lax-Milgram の定理の仮定がみたされたときに保証される (5.1 節, 5.2 節).
2. 楕円型偏微分方程式の境界値問題に対する解の正則性は、既知関数の正則性と境界の正則性に依存する (5.3 節).
3. 線形弾性問題は楕円型偏微分方程式の境界値問題の一つである。その問題に対する解の一意存在は、弱形式に対して Lax-Milgram の定理の仮定がみたされたときに保証される (5.4 節).

## §5.7 第5章のまとめ (cnt.)

4. Stokes 問題は連続の式を等式制約にもつ楕円型偏微分方程式の境界値問題である。Stokes 問題に対する解の一意存在は，弱形式に対して下限上限条件を用いた抽象的鞍点型変分問題に対する解の存在の仮定がみたされたときに保証される (5.5 節).

## 5.8. 第5章の演習問題

---



## §5.8 第5章の演習問題

5.1  $b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u_D : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  に対して,

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= b \quad \text{in } \Omega, \\ u &= u_D \quad \text{on } \partial\Omega \end{aligned}$$

をみたく  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  を求める境界値問題の弱形式を求めよ. また, この弱形式をみたく  $u$  が一意に存在するためには,  $b$  と  $u_D$  をどのような関数空間から選べばよいかを示せ.

5.2 図 5.8.1 のような線形弾性体の片持ちはり問題を考える. このとき, 点  $x_A$  は特異点ではないが, 点  $x_B$  は特異点になることを示せ.

## §5.8 第5章の演習問題 (cnt.)

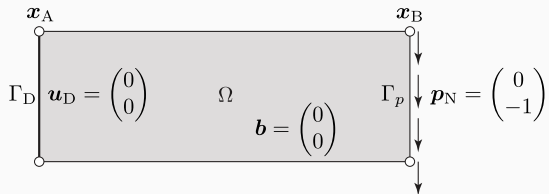


図 5.8.1: 線形弾性体の片持ちはり問題

## §5.8 第5章の演習問題 (cnt.)

5.3 動的線形弾性問題は次のようにかかれる。「 $\mathbf{b} : \Omega \times (0, t_T) \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  
 $\mathbf{p}_N : \Gamma_N \times (0, t_T) \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\mathbf{u}_D : \Omega \times (0, t_T) \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\mathbf{u}_{D0} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  
 $\mathbf{u}_{DT} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  および  $\rho > 0$  に対して,

$$\begin{aligned}\rho \ddot{\mathbf{u}}^\top - \nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{u}) &= \mathbf{b}^\top && \text{in } \Omega \times (0, t_T), \\ \mathbf{S}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{p}_N && \text{on } \Gamma_N \times (0, t_T), \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_D && \text{on } \Gamma_D \times (0, t_T), \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_{D0} && \text{in } \Omega \times \{0\}, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_{DT} && \text{in } \Omega \times \{t_T\}\end{aligned}$$

をみたす  $\mathbf{u} : \Omega \times (0, t_T) \rightarrow \mathbb{R}^d$  を求めよ. ただし, 時刻  $t \in (0, t_T)$  に対して  $\dot{\mathbf{u}} = \partial \mathbf{u} / \partial t$  を表す.」この問題の弱形式を求めよ.

## §5.8 第5章の演習問題 (cnt.)

5.4 演習問題 5.3 において,  $\mathbf{b} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$ ,  $\mathbf{p}_N = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$  および  $\mathbf{u}_D = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$  とするとき,  $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, t_T)$  に対して, 変数分離型の解 (定在波)

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}) e^{\lambda t}$$

が仮定されたとき,  $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  と  $\lambda \in \mathbb{R}$  を求める問題を固有振動問題という. この問題の弱形式を求めよ.

5.5  $\mathbf{b}: \Omega \times (0, t_T) \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\mathbf{u}_D: \Omega \times (0, t_T) \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\mu > 0$  および  $\rho > 0$  に対して,

$$\rho \dot{\mathbf{u}} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{b} \quad \text{in } \Omega \times (0, t_T),$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, t_T),$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D \quad \text{on } \{\partial\Omega \times (0, t_T)\} \cup \{\Omega \times \{0\}\}$$

## §5.8 第5章の演習問題 (cnt.)

をみたく  $(\mathbf{u}, p) : \Omega \times (0, t_T) \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  を求める問題を **Navier-Stokes 問題**という. 第1式を **Navier-Stokes 方程式**, 第2式を**連続の式**という. この問題の弱形式を求めよ.

- 5.6** 等方性の線形弾性体に対して, 縦弾性係数  $e_Y$ , せん断弾性係数  $\mu_L$  と Poisson 比  $\nu_P$  の間に,  $e_Y = 2\mu_L(1 + \nu_P)$  の関係が成り立つことを示せ.

## P.9. 演習問題の解答例

---

## P.10. 第5章

---

**5.1** Dirichlet 条件が境界全体で与えられていることから,  $U = H_0^1(\Omega; \mathbb{R})$  とおく. このとき, 任意の  $v \in U$  に対して,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\Delta u + u) v \, dx &= \int_{\Omega} (-\nabla \cdot \nabla u + u) v \, dx \\ &= - \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\gamma + \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) \, dx \\ &= \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) \, dx = \int_{\Omega} bv \, dx \end{aligned}$$

が成り立つ. そこで, この問題の弱形式は, 任意の  $v \in U$  に対して

$$a(u, v) = l(v)$$



## 演習問題の解答例 (cnt.)

を満たす  $\tilde{u} = u - u_D \in U$  を求める問題となる。ただし,

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) \, dx, \quad l(v) = \int_{\Omega} bv \, dx$$

である。

この弱形式の解が一意に存在するためには, Lax-Milgram の定理の仮定が成り立てばよい。  $U = H_0^1(\Omega; \mathbb{R})$  は Hilbert 空間である。また, 任意の  $v \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R})$  に対して

$$a(v, v) = \|v\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R})}^2$$

## 演習問題の解答例 (cnt.)

が成り立つことから、 $a$  は強圧的かつ有界である。そこで、 $\hat{l} \in U'$  が成り立てばよい。 $\hat{l}$  に対して、

$$\begin{aligned} |\hat{l}(v)| &\leq \int_{\Omega} |bv| \, dx + \int_{\Omega} (|\nabla u_D \cdot \nabla v| + |u_D v|) \, dx \\ &\leq \|b\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R})} \|v\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R})} + \|\nabla u_D\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \|u_D\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R})} \|v\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R})} \\ &\leq \left( \|b\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R})} + \|u_D\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R})} \right) \|v\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R})} \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、 $b \in L^2(\Omega; \mathbb{R})$  および  $u_D \in H^1(\Omega; \mathbb{R})$  であればよい。

## 演習問題の解答例 (cnt.)

**5.2** 点  $x_A$  は同次 Dirichlet 境界と同次 Neumann 境界の境界で、開き角  $\alpha = \pi/2$  である。そこで、定理 5.3.2 の (2) より、点  $x_A$  の近傍  $B_A$  では  $\mathbf{u} \in H^2(B_A; \mathbb{R}^2)$  となり、点  $x_A$  は特異点とはならない。一方、点  $x_B$  は同次 Neumann 境界と非同次 Neumann 境界の境界で、開き角  $\alpha$  は  $\pi/2$  である。定理 5.3.2 の (1) より、この開き角では解の特異性は生じない。しかし、 $\mathbf{p}_N$  は  $x_B$  の近傍  $B_B$  では  $(0, 0)^\top$  と  $(0, -1)^\top$  が  $\Gamma_p$  を境界にして階段関数状に変化している。これより、 $\mathbf{p}_N \in L^\infty(B_B; \mathbb{R}^2)$  とみなせば、 $\mathbf{u} \in C^{0,1}(B_B; \mathbb{R}^2)$  となり、 $H^2(B_B; \mathbb{R}^2)$  には入らない。

**5.3** この問題に対する関数空間を

$$U = \left\{ \mathbf{u} \in H^1((0, t_T); H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)) \mid \mathbf{u} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \Gamma_D \times (0, t_T), \right. \\ \left. \mathbf{u} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \Omega \times \{0, t_T\} \right\}$$

## 演習問題の解答例 (cnt.)

とおく.  $\mathbf{u}_{D0}, \mathbf{u}_{DT} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^a)$  および  $\mathbf{u}_D \in H^1((0, t_T); H^1(\Omega; \mathbb{R}^a))$  と仮定する. さらに,  $\mathbf{b} \in L^2((0, t_T); L^2(\Omega; \mathbb{R}^d))$ ,  $\mathbf{p}_N \in L^2((0, t_T); L^2(\Gamma_N; \mathbb{R}^d))$  と仮定する. このとき, この問題の弱形式は第1式に任意の  $\mathbf{v} \in U$  をかけて  $\Omega \times (0, t_T)$  で積分し, 基本境界条件を用いることで次のように得られる. 「任意の  $\mathbf{v} \in U$  に対して

$$\int_0^{t_T} (b(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}}) - a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + l(\mathbf{v})) dt = 0$$

を満たす  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_D \in U$  を求めよ. ただし,

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx,$$
$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx,$$

## 演習問題の解答例 (cnt.)

$$l(\boldsymbol{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v} \, dx + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{p}_N \cdot \boldsymbol{v} \, d\gamma$$

とおく。」

### 5.4 $\phi$ に対する関数空間を

$$U = \{ \phi \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \mid \phi = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \Gamma_D \}$$

とおく. このとき,  $\phi \in U$  に対する  $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \phi(\boldsymbol{x}) e^{\lambda t}$  を  $\rho \ddot{\boldsymbol{u}}^\top - \nabla^\top \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}^\top$  に代入し, さらに, その式に任意の  $\boldsymbol{v} \in U$  をかけて  $\Omega$  上で積分し, 基本境界条件  $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_D$  on  $\Gamma_D \times (0, t_T)$  を考慮すれば, 固有振動問題の弱形式が得られる. その弱形式は次のようにかける. 「任意の  $\boldsymbol{v} \in U$  に対して

$$\lambda^2 b(\phi, \boldsymbol{v}) + a(\phi, \boldsymbol{v}) = 0$$

## 演習問題の解答例 (cnt.)

を満たす  $(\phi, \lambda) \in U \times \mathbb{R}$  を求めよ。」

(解説) この問題は関数空間  $U$  上の固有値問題 (方程式は固有方程式) になっている. この問題において  $a(\cdot, \cdot)$  の非負定値性 (0 を含む強圧性) と  $b(\cdot, \cdot)$  の正定値性 (強圧性) を考慮すれば,  $U$  の次元数と同じ可算無限個の固有対  $(\phi_i, \lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$  の存在がいえる. このとき,  $\lambda_i^2 \leq 0$ , すなわち  $\lambda_i = \pm i\omega_i$  ( $i$  は虚数単位) が導かれる. この結果から,  $\phi_i(\mathbf{x}) (e^{i\omega_i t} + e^{-i\omega_i t}) = \phi_i \cos \omega_i t$  は固有値問題の解となり,  $\omega_i$  と  $\phi_i$  を固有振動数と固有モードという.

### 5.5 $u$ と $p$ に対する関数空間をそれぞれ

$$U = \left\{ \mathbf{u} \in H^1((0, t_T); H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)) \mid \right. \\ \left. \mathbf{u} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \partial\Omega \times (0, t_T) \cup \Omega \times \{0\} \right\},$$

## 演習問題の解答例 (cnt.)

$$V = \left\{ \mathbf{u} \in H^1((0, t_T); H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)) \mid \right. \\ \left. \mathbf{u} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \partial\Omega \times (0, t_T) \cup \Omega \times \{t_T\} \right\}, \\ P = \left\{ p \in L^2((0, t_T); L^2(\Omega; \mathbb{R})) \mid \int_{\Omega} p \, dx = 0 \right\}$$

とおく. このとき, 任意の  $\mathbf{v} \in V$  を Navier-Stokes 方程式にかけて  $(0, t_T) \times \Omega$  上で積分し, 基本境界条件  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_D$  on  $\partial\Omega \times (0, t_T) \cup \Omega \times \{0\}$  を考慮すれば, Navier-Stokes 方程式に対する弱形式が得られる. 一方, 任意の  $q \in P$  を連続の式にかけて  $(0, t_T) \times \Omega$  上で積分すれば, 連続の式に対する弱形式が得られる. これらは次のようにかける. 「任意の  $(\mathbf{v}, q) \in U \times Q$  に対して

$$\int_0^{t_T} (b(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + d(\mathbf{v}, p)) \, dt = \int_0^{t_T} l(\mathbf{v}) \, dt,$$

## 演習問題の解答例 (cnt.)

$$\int_0^{t_1} d(\mathbf{u}, q) dt = 0$$

を満たす  $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_D, p) \in U \times Q$  を求めよ。ただし,

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mu (\nabla \mathbf{u}^T) \cdot (\nabla \mathbf{v}^T) dx,$$

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx,$$

$$c(\mathbf{u})(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} dx,$$

$$d(\mathbf{v}, q) = - \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} dx,$$

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{p}_N \cdot \mathbf{v} d\gamma$$



## 演習問題の解答例 (cnt.)

とおく.]

5.6 図 P.5.1 (a) のような応力が発生したときに，線形ひずみは

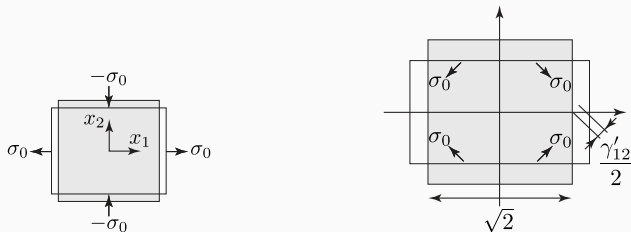
$$\varepsilon_{11} = -\varepsilon_{22} = \frac{1 + \nu_P}{e_Y} \sigma_0 \quad (1)$$

となる．一方，図 P.5.1 (b) のような反時計回りに  $\pi/4$  だけ回転した座標系では

$$\varepsilon_{11} = \frac{\gamma'_{12}/\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\gamma'_{12}}{2} = \varepsilon'_{12} = \frac{\sigma_0}{2\mu_L} \quad (2)$$

が成り立つ．式 (1) と式 (2) より  $e_Y = 2\mu_L (1 + \nu_P)$  が成り立つことになる．

# 演習問題の解答例 (cnt.)



(a) 圧縮と引張 (b) 反時計回りに  $\pi/4$  だけ回転した座標系

図 P.5.1: せん断応力の変形

## P.6. 参考文献

---

[1] F. Brezzi and M. Fortin.

**Mixed and Hybrid Finite Element Methods.**

Springer, New York; Tokyo, 1991.

[2] P. G. Ciarlet.

**Finite Element Methods.**

Handbook of Numerical Analysis, P.G. Ciarlet, J.L. Lions, general editors.  
Elsevier, Amsterdam; Tokyo: North-Holl, 1991.

[3] L. C. Evans and R. F. Gariepy.

**Measure Theory and Fine Properties of Functions.**

CRC Press, Boca Raton, 1992.

[4] V. Girault and P. A. Raviart.

**Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations: Theory and Algorithms.**

Springer, Berlin; Tokyo, 1986.

[5] P. Grisvard.

**Elliptic Problems in Nonsmooth Domains.**

Pitman Advanced Pub. Program, Boston, 1985.

## 参考文献 (cnt.)

[6] 菊地文雄.

有限要素法の数理: 数学的基礎と誤差解析.

培風館, 東京, 1994.

[7] R. S. Lehman.

**Developments at an analytic corner of solutions of elliptic partial differential equations.**

Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 8, pp. 727–760, 1959.

[8] G. Strang, G. J. Fix, 三好哲彦, 藤井宏訳.

有限要素法の理論.

培風館, 東京, 1976.

- [9] 田端正久.  
偏微分方程式の数値解析.  
岩波書店, 東京, 2010.
- [10] 田端正久, 藤井宏, 三好哲彦.  
特異関数を用いる有限要素法.  
bit, Vol. 5, pp. 1035–1040, 1973.