

目次

第 1 章 最適設計の基礎	1
1.1 段つき 1 次元線形弾性体の最適設計問題	1
1.1.1 状態決定問題	2
1.1.2 最適設計問題	7
1.1.3 断面積微分	9
1.1.4 代入法	10
1.1.5 直接微分法	11
1.1.6 随伴変数法	14
1.1.7 最適性の条件	19
1.1.8 数値例	21
1.2 直接微分法と随伴変数法の比較	22
1.2.1 直接微分法	23
1.2.2 随伴変数法	25
1.3 1 次元分岐 Stokes 流れ場の最適設計問題	26
1.3.1 状態決定問題	27
1.3.2 最適設計問題	29
1.3.3 断面積微分	30
1.3.4 最適性の条件	34
1.3.5 数値例	35
1.4 第 1 章のまとめ	36
1.5 第 1 章の演習問題	37

第1章 最適設計の基礎

本書の主題は最適設計である。本文をはじめるときに、本章では、簡単な問題を取りあげて、最適設計とはどのような数理的構造をもつ問題なのかをみておきたい。本書を読み終えれば、連続体の形状最適化問題も本章で扱う問題と同じ構造をもつことが理解されるであろう。さらには、連続体の対象を様々に変えれば、いろいろな形状最適化問題も同じ構造をもつことがみえてくるであろう。

本書では、連続体の対象を線形弾性体と Stokes 流れ場に絞って解説する。本章では、それらに対応させて、1次元の線形弾性体と1次元の Stokes 流れ場に関する最適設計問題を構成して、それらの最適性の条件を求めるまでの過程をみることとする。ここで得られる最適性の条件は、第9章において2次元や3次元の領域で定義された線形弾性体と Stokes 流れ場の領域変動型の形状最適化問題に対する最適性の条件として、再び出会うことになる。

1.1 段つき1次元線形弾性体の最適設計問題

最初に、力学システムの例として図 1.1.1 のような二つの断面積をもつ1次元線形弾性体を取りあげて、その最適設計問題とはどのように構成されるのかをみてみよう。ここで1次元とよんだ理由は、実際には断面積と長さで構成された3次元物体であるが、長さ方向に x 座標をとって、あとで示されるように、変位が x の関数、すなわち1次元ベクトル空間¹上の関数、で与えられると仮定するからである。また、線形弾性体の線形性は、これもあとで示されるように、構成則が Hooke 則によって与えられると仮定することで、外力が変位の線形関数になるためである。

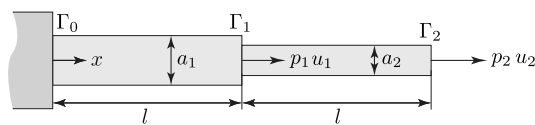


図 1.1.1: 二つの断面積をもつ1次元線形弾性体

¹ここで考える有限次元のベクトル空間は Euclid 空間ともよばれる。また、ベクトル空間は線形空間と同意語で、その定義は定義 4.2.1 で示される。

ここで、定数や変数について細かく定義していこう。 l を長さを表す正の定数とする。 a_1 と a_2 を二つの断面積として、それらを2次元ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ で定義する。本書では、 \mathbb{R} を実数全体の集合の意味で用いる。 $(\cdot)^\top$ は転置を表すことにする。また、本書の数式では、有限次元のベクトルを英文字やギリシャ文字の小文字の太字で表すことにする。二つの断面積は、ともに、ある正定数 a_{01} と a_{02} を定めて、 $i \in \{1, 2\}$ に対して $a_i \geq a_{0i}$ を満たすとする。そのことを $\mathbf{a}_0 = (a_{01}, a_{02})^\top \in \mathbb{R}^2$ に対して $\mathbf{a} \geq \mathbf{a}_0$ とかくことにする。 \mathbf{a} と同様に、 p_1 と p_2 を断面 Γ_1 と Γ_2 に作用する外力、 u_1 と u_2 をそれらに対応する変位として、 $\mathbf{p} = (p_1, p_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ および $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ のようにかくことにする。

ここでは、次のような最適設計問題を考えてみたい。 l と \mathbf{p} は与えられていると仮定する。それ以外の変数については、次のように考えることにしよう。断面積 \mathbf{a} は、それを決めれば設計しようとしているシステムが一意に決まるような変数であることから、 \mathbf{a} を**設計変数**とよぶことにする。 \mathbf{a} を定めることでシステムが特定されたときに、そのシステムの**状態方程式**を満たす変数 \mathbf{u} を**状態変数**とよぶことにする。本書では、状態変数を求める問題を**状態決定問題**とよぶことにする。状態決定問題については1.1.1項で詳しくみることにする。さらに、設計変数 \mathbf{a} と状態変数 \mathbf{u} が与えられたときに、システムの性能を表すような \mathbf{a} と \mathbf{u} の実数値関数を定義して、それらを**評価関数**とよぶことにする。1.1.2項では、このシステムは外力をささえる構造であることを考慮して、変形の大きさを表す関数と体積制約を表す関数が評価関数に選ばれる。最適設計問題は、これらの評価関数を用いて、**目的関数**と**制約関数**による制約条件を定義することで構成される。

このように構成される最適設計問題に対して、最適解を用いたならば成り立つ条件を**最適性の条件**とよぶことにする。1次元弾性体に対する最適性の条件は1.1.7項で示される。そのために、まず1.1.3項で設計変数の変動に対する評価関数の微分を定義して、1.1.4項から1.1.6項でそれらの求め方について考えることにする。これらの結果は、本来ならば、第2章で示される最適化理論の定理について説明されたあとで示されるべきかもしれない。しかし、本書では、最適化理論の定理の使われ方の理解を優先させることにする。

1.1.1 状態決定問題

それでは、最適設計問題を構成する過程を順を追って見ていこう。まず、設計の対象とする力学システムを定義することからはじめよう。設計変数が与えられたとき、このシステムは通常力のつり合い方程式や運動方程式と境界条件で構成される力学の問題に帰着する。本書では、その問題を**状態決定問題**とよぶことにする。まず、その状態決定問題が力学の原理に基づいて構成されるようすをみてみよう。力学に

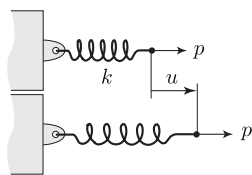


図 1.1.2: 1 自由度ばね系 (上図は変形前, 下図は力のつり合い状態)

詳しい読者はこの項をとばしてもよい。

1次元弾性体について考える前に, 力のつり合い方程式がポテンシャルエネルギーの最小条件によって求められることを復習しておきたい [7]. まず, 次の例題でポテンシャルエネルギーの定義を確認しよう。

例題 1.1.1 (1 自由度ばね系のポテンシャルエネルギー) 図 1.1.2 のような 1 自由度ばね系に対して, k と p をそれぞればね定数と外力 (\mathbb{R} 上のどこにあってても一定の力が発生する保存力) を表す正の実定数とする. $u \in \mathbb{R}$ を図 1.1.2 に示されるようなばねの復元力と外力がつり合いったときの変位とし,

$$ku - p = 0$$

が成り立つと仮定する. このとき, $u = 0$ を基準にしたときのポテンシャルエネルギー (弾性ポテンシャルエネルギー) を求めよ. \square

解答 力学においてポテンシャルエネルギーは, 仕事をする能力を表すエネルギー量として定義される. $u = 0$ を基準にしたときのポテンシャルエネルギーは, 不釣り合い力 $kv - p$ (v は途中の変位を表す) を変位 v で 0 から u まで積分した

$$\pi(u) = \int_0^u (kv - p) dv = \frac{1}{2}ku^2 - pu \quad (1.1.1)$$

によって与えられる. \square

式 (1.1.1) の右辺第 1 項は内部ポテンシャルエネルギー, 第 2 項は外部ポテンシャルエネルギーとよばれる. 内部ポテンシャルエネルギーは仕事をする能力 (ポテンシャル) を獲得した分なので正となり, 外部ポテンシャルエネルギーは仕事をしてしまった (力と変位の向きが同じ) 分なので負になっていることに注目してほしい. ここで, ポテンシャルエネルギーはエネルギー保存則に現れる保存されるエネルギー (Hamilton 関数) とは関連はある (第 4 章の演習問題 4.3) が, 別のものであることに注意する必要がある。

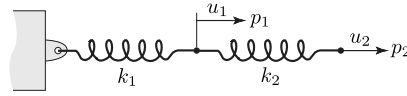


図 1.1.3: 2 自由度ばね系

ポテンシャルエネルギー π をもとにすれば, 力のつり合い方程式はポテンシャルエネルギーの停留条件

$$\frac{d\pi}{du} = ku - p = 0$$

によって与えられることになる. そのとき, π が最小になるのは

$$\frac{d^2\pi}{du^2} = k > 0$$

が成り立つためである.

ポテンシャルエネルギーとはどのようなものかがわかれば, 2 自由度ばね系においてもポテンシャルエネルギーを見積ることができる. それを用いれば, 次の例題のように 2 自由度ばね系の力のつり合い方程式が求められる.

例題 1.1.2 (2 自由度ばね系のポテンシャルエネルギー) 図 1.1.3 のような 2 自由度ばね系を考える. k_1 と k_2 をばね定数を表す正の実定数, $\mathbf{p} = (p_1, p_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ を外力を表す定ベクトル, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ を \mathbf{p} とつり合い状態になったときの変位とする. このとき, $\mathbf{u} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ ($(0, 0)^\top$ を表す) を基準にしたときのポテンシャルエネルギーを求めよ. また, ポテンシャルエネルギーの停留条件によって力のつり合い方程式を求めよ. \square

解答 この系のポテンシャルエネルギーは, 内部と外部のポテンシャルエネルギーを足し合わせることにより,

$$\pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}k_1 u_1^2 + \frac{1}{2}k_2 (u_2 - u_1)^2 - (p_1 u_1 + p_2 u_2)$$

で与えられる. このとき, ポテンシャルエネルギーの停留条件

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial u_1} &= k_1 u_1 - k_2 (u_2 - u_1) - p_1 = 0, \\ \frac{\partial \pi}{\partial u_2} &= k_2 (u_2 - u_1) - p_2 = 0 \end{aligned}$$

によって力のつり合い方程式が得られる. これらの式は,

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (1.1.2)$$

のようにかくことができる. \square

ポテンシャルエネルギーの停留条件式 (1.1.2) を満たす \mathbf{u} が π の最小点になることは、例題 2.5.8 で同様の問題を使って示される。ここでは省略することにする。

ポテンシャルエネルギーの最小条件によって力のつり合い方程式が得られることが確認されたので、図 1.1.1 の1次元線形弾性体にその条件を適用してみよう。まず、外部のポテンシャルエネルギーは、例題 1.1.2 と同様に、

$$\pi_E(\mathbf{u}) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{u} \quad (1.1.3)$$

によって与えられる。なお、本書では $\mathbf{p} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{p}^\top \mathbf{u}$ は有限次元ベクトル空間の内積を表すことにする。

次に、内部ポテンシャルエネルギーを求めてみよう。 $x \in \mathbb{R}$ を図 1.1.1 の断面 Γ_0 を原点とする長さ方向の座標とする。このとき、 $x \in [0, 2l]$ における変位は

$$u(x) = \begin{cases} u_1 \frac{x}{l} & x \in [0, l) \\ (u_2 - u_1) \frac{x}{l} + 2u_1 - u_2 & x \in [l, 2l] \end{cases} \quad (1.1.4)$$

で与えられると仮定する。すなわち、3次元的な変形は考えないと仮定する。ただし、 $[0, 2l]$ は $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2l\}$ を表すことにする。

ここで、話を中断して、集合と関数の表し方について本書の方針について説明しておきたい。本書では、集合を $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2l\}$ の形式で定義する。ここで、 \mathbb{R} の位置に線形空間 (第4章で定義する) あるいは集合の全体をかき、 $|$ のあとにその集合の要素が満たすべき条件をかくことにする。また、 $[0, l)$ は $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < l\}$ を表すことにする。 $(0, l)$ は $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < l\}$ を表すことにする。式 (1.1.4) の $u(x)$ は $x = l$ で連続なので、式 (1.1.4) の $[0, l)$ は $[0, l]$ とかいても $(0, l)$ とかいても問題は起こらない。そこで、本書では関数の定義域 (領域) は開集合で定義して (付録 A.1.1 項)、定義域の境界上の値は連続の性質を使って決定される値 (トレース (定理 4.4.2) とよばれる) によって定義されるとみなすことにする。一方、関数の定義域と値域を表す表記を、たとえば式 (1.1.4) の $u(x)$ を $u: (0, 2l) \rightarrow \mathbb{R}$ のようにかくことにする。 $(0, 2l)$ は定義域、 \mathbb{R} は値域、 \rightarrow は集合から集合への写像を表す。要素を明示するときは、 $u(x): (0, 2l) \ni x \mapsto u \in \mathbb{R}$ のようにかくことにする。本書では、関数や変数ということばにとらわれていると混乱をまねくことになる。第4章からは、関数が変数になるためである。そのようなときは、写像を使った表記が重要となることを覚えておいてほしい。

話を元にもどそう。力学において、力と変位、あるいは温度と熱量のように、現象を表す変数間の関係を与える方程式は構成方程式あるいは構成則とよばれる。線形弾性体の場合には Hooke 則が使われる。Hooke 則では、ひずみ (材料の変形率)

$$\varepsilon(u) = \frac{du}{dx} \quad (1.1.5)$$

と応力 (単位面積あたりに作用する力) $\sigma(u)$ が

$$\sigma(u) = e_Y \varepsilon(u) \quad (1.1.6)$$

によって関連づけられる. ここで, e_Y は縦弾性係数あるいは Young 率とよばれる材料固有の正の実定数で与えられると仮定する. なお, 図 1.1.1 の 1 次元線形弾性体では, e_Y は $e_Y : (0, 2l) \rightarrow \mathbb{R}$ のような不連続関数で与えられると仮定してもよいが, ここでは簡単のために正の実定数で与えられると仮定しよう. さらに, このような応力とひずみを用いて

$$w(u) = \frac{1}{2} \sigma(u) \varepsilon(u) \quad (1.1.7)$$

によって定義される力学量はひずみエネルギー密度 (内部ポテンシャルエネルギー密度) とよばれる. w が単位体積当たりのエネルギーになっていることは, w の単位が国際単位系 (SI) で $[\text{Nm}/\text{m}^3]$ になることから確認される. これらの定義を用いれば, 図 1.1.1 の 1 次元線形弾性体における内部のポテンシャルエネルギーは

$$\pi_I(\mathbf{u}) = \int_0^l w(u) a_1 dx + \int_l^{2l} w(u) a_2 dx \quad (1.1.8)$$

によって与えられる.

図 1.1.1 の 1 次元線形弾性体に対する内部と外部のポテンシャルエネルギーが式 (1.1.8) と式 (1.1.3) のように求められたので, 全体のポテンシャルエネルギーは, $\mathbf{u} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ を基準にして,

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{u}) &= \pi_I(\mathbf{u}) + \pi_E(\mathbf{u}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{e_Y}{l} a_1 u_1^2 + \frac{1}{2} \frac{e_Y}{l} a_2 (u_2 - u_1)^2 - p_1 u_1 - p_2 u_2 \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

で与えられる. したがって, π の停留条件は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial u_1} &= \frac{e_Y}{l} a_1 u_1 - \frac{e_Y}{l} a_2 (u_2 - u_1) - p_1 = 0, \\ \frac{\partial \pi}{\partial u_2} &= \frac{e_Y}{l} a_2 (u_2 - u_1) - p_2 = 0 \end{aligned}$$

となる. これらの式は,

$$\frac{e_Y}{l} \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -a_2 \\ -a_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (1.1.10)$$

のようにかきかえられる.

そこで, 図 1.1.1 の 1 次元線形弾性体に外力が作用したときの変位を決定する問題を次のように定義しよう.

問題 1.1.3 (段つき1次元線形弾性問題) 図 1.1.1 の1次元線形弾性体に対して, $l \in \mathbb{R}$ ($l > 0$), $e_Y \in \mathbb{R}$ ($e_Y > 0$), $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ および $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ が与えられたとき,

$$\mathbf{K}(\mathbf{a})\mathbf{u} = \mathbf{p} \quad (1.1.11)$$

を満たす $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ を求めよ. ただし, 式 (1.1.11) は式 (1.1.10) を表すものとする.
□

なお, 本書では, \mathbf{K} のように, 行列を英文字やギリシャ文字の大文字の太字で表すことにする.

ここで, 今後の展開を先取りして, 問題 1.1.3 を別の形式で表現する方法についてみておこう. 問題 1.1.3 に対して,

$$\mathcal{L}_S(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (-\mathbf{K}(\mathbf{a})\mathbf{u} + \mathbf{p}) \quad (1.1.12)$$

を状態決定問題に対する Lagrange 関数 (第2章で定義する) とよぶことにする. ここで, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ は必ずしも問題 1.1.3 の解である必要はないとする. $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ は式 (1.1.11) に対する Lagrange 乗数とよばれるものとして導入された. 状態方程式に対する Lagrange 乗数は随伴変数ともよばれる. このとき, 任意の $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\mathcal{L}_S(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \quad (1.1.13)$$

を満たす $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ は, 問題 1.1.3 の解と同値である. なぜならば, 式 (1.1.11) が成り立つならば, 任意の $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ に対して式 (1.1.13) が成り立ち, 逆も成り立つからである. 任意の $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ に対して式 (1.1.13) が成り立つ条件は, 仮想仕事の原理ともよばれる. その理由は, \mathbf{u} の任意変動 $d\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ (仮想変位) に対するポテンシャルエネルギー

$$\pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{K}(\mathbf{a})\mathbf{u}) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}$$

の停留条件は

$$d\pi(\mathbf{u}) = \mathcal{L}_S(\mathbf{a}, \mathbf{u}, d\mathbf{u}) = 0$$

で与えられるからである.

1.1.2 最適設計問題

状態決定問題が定義されたので, それを使って最適設計問題を構成しよう. まず, 評価関数を定義しよう. 状態決定問題 1.1.3 の解 \mathbf{u} に対して,

$$f_0(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} \quad (1.1.14)$$

を平均コンプライアンスとよぶことにする。この場合の f_0 は外力仕事とよばれる力学量に相当する。しかし、第8章と第9章では、線形弾性体の変形のしやすさ（コンプライアンス）を表す評価関数として、この定義が拡張されたものを平均コンプライアンスとよんで定義する。そのときには、もはや外力仕事の意味をもたないために、そのようによぶことにするのである。式 (1.1.14) の f_0 は変形のしやすさを表す実数値関数になっている。そのことは次のように説明される。 \mathbf{u} は変形のしやすさを表すベクトルであるが、実数ではない。そこで、 \mathbf{u} を実数に変換するために、 \mathbf{p} を重みとして用いたものが f_0 であると考えれば、 f_0 が変形のしやすさを表す実数値関数になっていることが理解される。それに対して、

$$f_1(\mathbf{a}) = l(a_1 + a_2) - c_1 = \begin{pmatrix} l & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - c_1 \quad (1.1.15)$$

を体積に対する制約関数とよぶことにする。ただし、 c_1 を体積の上限値を表す正定数とする。本節では、 f_0 と f_1 を最適設計問題における評価関数と定義する。今後、本書では、評価関数を f_0, f_1, \dots, f_m のようにかいて、 f_0 を目的関数、 f_1, \dots, f_m を制約関数として用いることにする。

これらの評価関数を用いて、図 1.1.1 の1次元線形弾性体に対して問題 1.1.4 のような最適設計問題を考えよう。以下では、設計変数 \mathbf{a} と状態変数 \mathbf{u} の線形空間をそれぞれ $X = \mathbb{R}^2$ と $U = \mathbb{R}^2$ とかいて、設計変数の線形空間および状態変数の線形空間とよぶことにする。また、定数ベクトル $\mathbf{a}_0 = (a_{01}, a_{02})^\top > \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ に対して、

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{a} \in X \mid \mathbf{a} \geq \mathbf{a}_0\} \quad (1.1.16)$$

を設計変数の許容集合とよぶ。本書では集合に対しては英文字やギリシャ文字（飾り文字も含む）の大文字を使うことにする。 X, U および \mathcal{D} の集合に対する記号は、1.3 節でも、第7章以降の関数空間上の最適設計問題でも、同様の意味をもつ集合に対する記号として用いることにする。

問題 1.1.4 (平均コンプライアンス最小化問題) $X = \mathbb{R}^2$ および $U = \mathbb{R}^2$ とおく。 \mathcal{D} を式 (1.1.16) とする。 $f_0(\mathbf{u})$ と $f_1(\mathbf{a})$ をそれぞれ式 (1.1.14) と式 (1.1.15) とする。このとき、

$$\min_{(\mathbf{a}, \mathbf{u}) \in \mathcal{D} \times U} \{f_0(\mathbf{u}) \mid f_1(\mathbf{a}) \leq 0, \text{ 問題 1.1.3}\}$$

を満たす \mathbf{a} を求めよ。□

問題 1.1.4 は、本来ならば、「このとき、

$$\mathbf{a}^* = \arg \min_{\mathbf{a} \in \mathcal{D}} \{f_0(\mathbf{u}) \mid f_1(\mathbf{a}) \leq 0, \mathbf{u} \in U, \text{ 問題 1.1.3}\}$$

を求めよ。」のようにかくべきかもしれない。ただし、 $\arg \min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x})$ は関数 f が最小となる定義域 X 上の点 \mathbf{x} を表す。しかし、表記の簡単化のために、問題 1.1.4 のようにかくことにする。また、式 (1.1.16) 中で与えられた $\mathbf{a} \geq \mathbf{a}_0$ のような簡単な制約は側面制約とよばれることがある。のちの展開では、このような側面制約を無視して最適性の条件を満たす解を求め、それらの解の中からこの制約を満たす解を選ぶといった使い方をする。そこで、 \mathbf{a} は \mathcal{D} の内部 \mathcal{D}° にあると仮定して、有界の制約が有効になった場合には、不等式制約の中に含めるものとする (演習問題 1.4)。

問題 1.1.4 は等式と不等式制約つき最適化問題である。このような問題に対して、解が満たす条件 (最適性の条件) については第 2 章で詳しく解説することにする。また、数値解法は第 3 章で考える。ここでは、それらの説明を省略して、形式的な手順に沿って最適性の条件が得られるまでをみていくことにしよう。次の項では、設計変数 \mathbf{a} の変動に対する f_0 と f_1 の微分の求め方について考える。これらの結果は、1.1.7 項で最適性の条件の中で使われる。

1.1.3 断面積微分

断面積 \mathbf{a} の変動に対する f_0 と f_1 の微分をここでは断面積微分とよぶことにする。

最初に、通常の微分の定義が使える f_1 の断面積微分から考えてみよう。 f_1 は式 (1.1.15) のように \mathbf{a} の関数として定義されているので、 f_1 の \mathbf{a} に対する偏導関数は

$$f_{1\mathbf{a}} = \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial a_1 \\ \partial f_1 / \partial a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ l \end{pmatrix} = \mathbf{g}_1 \quad (1.1.17)$$

のように得られる。本書では、偏導関数 $\partial f_1 / \partial \mathbf{a}$ を $f_{1\mathbf{a}}$ のようにかくことにする。ここで、 f_1 は実数であるが、 \mathbf{a} が列ベクトルであるために $f_{1\mathbf{a}}$ は列ベクトルになることに注意されたい。一方、任意の $\mathbf{b} \in X$ に対して、 \mathbf{a} における f_1 の Taylor 展開 (定理 2.4.2) を

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= f_1(\mathbf{a}) + f'_1(\mathbf{a})[\mathbf{b}] + o(\|\mathbf{b}\|_{\mathbb{R}^2}) \\ &= f_1(\mathbf{a}) + \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{b} + o(\|\mathbf{b}\|_{\mathbb{R}^2}) \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

とかくことにする。 $f'_1(\mathbf{a})[\mathbf{b}]$ は f_1 の \mathbf{a} における \mathbf{b} の変動に対する 1 次の変動項を表すことにする。また、 $o(\cdot)$ は $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} o(\epsilon) / \epsilon = 0$ で定義された Bachmann-Landau の little-o 記号、 $\|\mathbf{b}\|_{\mathbb{R}^2} = \sqrt{|b_1|^2 + |b_2|^2}$ と定義する。なお、 f_1 に対しては $o(\|\mathbf{b}\|_{\mathbb{R}^2}) = 0$ である。式 (1.1.18) の場合、 $f'_1(\mathbf{a})[\mathbf{b}] = f_{1\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{b}$ のように $f'_1(\mathbf{a})[\mathbf{b}]$ は \mathbf{b} に対する線形関数となった。別のいいかたをすれば、 \mathbf{b} に対する内積の相手 \mathbf{g}_1 がみ

つかったことになる。このように、 $f'_1(\mathbf{a})[\mathbf{b}] = \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{b}$ とかけたとき、微分可能といい、 $f'_1(\mathbf{a})[\mathbf{b}]$ を \mathbf{a} における f_1 の断面積微分とよぶことにする。 $\mathbf{g}_1 \in \mathbb{R}^2$ を断面積勾配とよぶことにする。

次に、この要領で f_0 の断面積微分について考えてみよう。 f_0 は式 (1.1.14) のように \mathbf{u} の関数ではあるが、陽に \mathbf{a} の関数にはなっていない。しかし、 \mathbf{u} は \mathbf{a} が与えられたときの状態方程式 (問題 1.1.3) を満たすと仮定されているので、 \mathbf{a} が変動することによって \mathbf{u} は変動する。すなわち、 \mathbf{u} は \mathbf{a} の関数になっている。そこで、

$$\tilde{f}_0(\mathbf{a}) = \{f_0(\mathbf{u}) \mid (\mathbf{a}, \mathbf{u}) \in \mathcal{D} \times U, \text{問題 1.1.3}\} \quad (1.1.19)$$

とかくことにしよう。ここで、

$$\tilde{f}_0(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \tilde{f}_0(\mathbf{a}) + \tilde{f}'_0(\mathbf{a})[\mathbf{b}] + o(\|\mathbf{b}\|_{\mathbb{R}^2})$$

を満たす $\tilde{f}'_0(\mathbf{a})[\mathbf{b}]$ がみつき、ある $\mathbf{g}_0 \in \mathbb{R}^2$ を用いて $\tilde{f}'_0(\mathbf{a})[\mathbf{b}] = \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{b}$ のようにかけたとしよう。このとき、 f_0 は \mathbf{a} に対して微分可能といい、 $\tilde{f}'_0(\mathbf{a})[\mathbf{b}]$ を \mathbf{a} における f_0 の断面積微分、 \mathbf{g}_0 を断面積勾配とよぶことにする。

さらに、 $\mathbf{g}_0 : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ に対して

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_0(\mathbf{a} + \mathbf{b}_2) \cdot \mathbf{b}_1 &= \mathbf{g}_0(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}_1 + \mathbf{g}'_0(\mathbf{a})[\mathbf{b}_2] \cdot \mathbf{b}_1 + o(\|\mathbf{b}_2\|_{\mathbb{R}^2}) \\ &= \mathbf{g}_0(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}_1 + \tilde{f}''_0(\mathbf{a})[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2] + o(\|\mathbf{b}_2\|_{\mathbb{R}^2}) \end{aligned}$$

を満たす $\mathbf{g}'_0(\mathbf{a})[\mathbf{b}_2]$ が \mathbf{b}_2 に対する線形関数のとき、すなわち、 $\mathbf{g}'_0(\mathbf{a})[\mathbf{b}_2] = \mathbf{H}_0 \mathbf{b}_2$ のようにかけるとき、あるいは $\tilde{f}''_0(\mathbf{a})[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]$ が \mathbf{b}_1 と \mathbf{b}_2 に対してそれぞれ線形な関数のとき、2階微分可能といい、 $\tilde{f}''_0(\mathbf{a})[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]$ を2階断面積微分、 $\mathbf{H}_0 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ を \mathbf{a} における f_0 の Hesse 行列 (定義 2.4.1) とよぶことにする。なお、本書では、 $\mathbb{R}^{m \times n}$ は m 行 n 列の実行列全体の集合を表すことにする。

以上の定義を用いれば、 $\tilde{f}_0(\mathbf{a})$ が \mathbf{a} に対して2階微分可能ならば、 $\tilde{f}_0(\mathbf{a})$ の \mathbf{a} まわりの Taylor 展開 (定理 2.4.2) は

$$\tilde{f}_0(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \tilde{f}_0(\mathbf{a}) + \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{b} + \frac{1}{2} \tilde{f}''_0(\mathbf{a})[\mathbf{b}, \mathbf{b}] + o(\|\mathbf{b}\|_{\mathbb{R}^2}^2)$$

のようにかかれる。ここで、 \mathbf{g}_0 は f_0 が極値をとるときの条件の中で使われる。また、 $\tilde{f}''_0(\mathbf{a})[\mathbf{b}, \mathbf{b}]$ あるいは \mathbf{H}_0 は極小点となることを保証する条件の中で使われる。次の項から \mathbf{g}_0 と \mathbf{H}_0 の3通りの求め方について考えよう。

1.1.4 代入法

最初に、状態方程式を評価関数に代入して、 $\tilde{f}_0(\mathbf{a})$ を直接求めることによって、 \mathbf{g}_0 と \mathbf{H}_0 を求めてみよう。問題が複雑になればこの方法は使えない。ここではあとで示される直接微分法と随伴変数法の結果を検証するために使うことにする。

状態方程式 (式 (1.1.11)) の解は

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{a})\mathbf{p} = \frac{l}{e_Y} \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \frac{l}{e_Y} \begin{pmatrix} \frac{p_1 + p_2}{a_1} \\ \frac{p_1 + p_2}{a_1} + \frac{p_2}{a_2} \end{pmatrix} \quad (1.1.20)$$

となる。そこで、 $\tilde{f}_0(\mathbf{a})$ を式 (1.1.19) で定義すれば、

$$\tilde{f}_0(\mathbf{a}) = \mathbf{p} \cdot (\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{a})\mathbf{p}) = \frac{l}{e_Y} \left(\frac{(p_1 + p_2)^2}{a_1} + \frac{p_2^2}{a_2} \right) \quad (1.1.21)$$

が得られる。この \tilde{f}_0 を用いれば、

$$\mathbf{g}_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{f}_0}{\partial a_1} \\ \frac{\partial \tilde{f}_0}{\partial a_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{K}^{-1}}{\partial a_1} \mathbf{p} \right) \\ \mathbf{p} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{K}^{-1}}{\partial a_2} \mathbf{p} \right) \end{pmatrix} = \frac{l}{e_Y} \begin{pmatrix} -\frac{(p_1 + p_2)^2}{a_1^2} \\ -\frac{p_2^2}{a_2^2} \end{pmatrix} \quad (1.1.22)$$

が得られる。さらに、Hesse 行列は

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \tilde{f}_0}{\partial a_1 \partial a_1} & \frac{\partial^2 \tilde{f}_0}{\partial a_1 \partial a_2} \\ \frac{\partial^2 \tilde{f}_0}{\partial a_2 \partial a_1} & \frac{\partial^2 \tilde{f}_0}{\partial a_2 \partial a_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{g}_0}{\partial a_1} & \frac{\partial \mathbf{g}_0}{\partial a_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{p} \cdot \left(\frac{\partial^2 \mathbf{K}^{-1}}{\partial a_1 \partial a_1} \mathbf{p} \right) & \mathbf{p} \cdot \left(\frac{\partial^2 \mathbf{K}^{-1}}{\partial a_1 \partial a_2} \mathbf{p} \right) \\ \mathbf{p} \cdot \left(\frac{\partial^2 \mathbf{K}^{-1}}{\partial a_1 \partial a_2} \mathbf{p} \right) & \mathbf{p} \cdot \left(\frac{\partial^2 \mathbf{K}^{-1}}{\partial a_2 \partial a_2} \mathbf{p} \right) \end{pmatrix} \\ &= \frac{l}{e_Y} \begin{pmatrix} \frac{2(p_1 + p_2)^2}{a_1^3} & 0 \\ 0 & \frac{2p_2^2}{a_2^3} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.1.23)$$

となる。 $a_1, a_2 > 0$ のとき、 \mathbf{H}_0 の二つの固有値が正となることから、 \mathbf{H}_0 は**正定値** (定義 2.4.5) となる。これより、あとで示される定理 2.4.6 により、 $\tilde{f}_0(\mathbf{a})$ は凸関数 (定義 2.4.3) であることが確かめられる。この性質は、1.1.7 項の中で、極小点であれば成り立つ条件を満たす点がみつかったときに、その点が最小点になることを保証する際に使われる。

1.1.5 直接微分法

次に、合成関数に対する**微分の連鎖則**を用いた**直接微分法**により \mathbf{g}_0 と \mathbf{H}_0 を求めてみよう。直接微分法の詳細は 2.6.5 項において示される。

\mathbf{a} に対して \mathbf{u} は式 (1.1.11) を満たすように決定される。そこで、式 (1.1.19) の \tilde{f}_0 に対して \mathbf{a} の周りで Taylor 展開すれば、

$$\begin{aligned}\tilde{f}_0(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= f_0(\mathbf{u}(\mathbf{a} + \mathbf{b})) \\ &= f_0(\mathbf{u}(\mathbf{a})) + \frac{\partial f_0}{\partial u_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial a_1} b_1 + \frac{\partial u_1}{\partial a_2} b_2 \right) \\ &\quad + \frac{\partial f_0}{\partial u_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial a_1} b_1 + \frac{\partial u_2}{\partial a_2} b_2 \right) + o(\|\mathbf{b}\|_{\mathbb{R}^2}) \\ &= f_0(\mathbf{u}(\mathbf{a})) + \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial a_1} & \frac{\partial u_1}{\partial a_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial a_1} & \frac{\partial u_2}{\partial a_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + o(\|\mathbf{b}\|_{\mathbb{R}^2})\end{aligned}\tag{1.1.24}$$

とかける。一方、式 (1.1.11) を a_1 で偏微分すれば、

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a_1} \mathbf{u} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a_1} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$$

とかける。この式を成分でかくと、

$$\frac{e_Y}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \frac{e_Y}{l} \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -a_2 \\ -a_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial a_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial a_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。そこで、

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a_1} &= -\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a_1} \mathbf{u} \\ &= - \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{u_1}{a_1} \\ \frac{u_1}{a_1} \\ -\frac{u_1}{a_1} \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{1.1.25}$$

が得られる。同様に、式 (1.1.11) を a_2 で偏微分した式より、

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a_2} &= -\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a_2} \mathbf{u} \\ &= - \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{u_2 - u_1}{a_2} \\ -\frac{u_2 - u_1}{a_2} \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{1.1.26}$$

が得られる。したがって、式 (1.1.25) と式 (1.1.26) を式 (1.1.24) に代入すれば、

$$\tilde{f}_0(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f_0(\mathbf{u}(\mathbf{a})) + \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{u_1}{a_1} & 0 \\ \frac{u_1}{a_1} & \frac{u_2 - u_1}{a_2} \\ \frac{u_1}{a_1} & -\frac{u_2 - u_1}{a_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + o(\|\mathbf{b}\|_{\mathbb{R}^2})$$

$$\begin{aligned}
&= f_0(\mathbf{u}(\mathbf{a})) + \begin{pmatrix} -\frac{u_1}{a_1}(p_1 + p_2) & -\frac{u_2 - u_1}{a_2}p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + o(\|\mathbf{b}\|_{\mathbb{R}^2}) \\
&= f_0(\mathbf{u}(\mathbf{a})) + \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{b} + o(\|\mathbf{b}\|_{\mathbb{R}^2})
\end{aligned} \tag{1.1.27}$$

が得られる。状態方程式の解(式(1.1.20))を用いれば、式(1.1.27)の \mathbf{g}_0 は式(1.1.22)と一致することがわかる。また、 $\varepsilon(u_1) = u_1/l$, $\sigma(u_1) = e_Y \varepsilon(u_1)$ とかけば、

$$\mathbf{g}_0 = -\frac{e_Y}{l} \begin{pmatrix} u_1^2 \\ (u_2 - u_1)^2 \end{pmatrix} = l \begin{pmatrix} -\sigma(u_1)\varepsilon(u_1) \\ -\sigma(u_2 - u_1)\varepsilon(u_2 - u_1) \end{pmatrix} \tag{1.1.28}$$

ともかける。式(1.1.28)は、 \mathbf{g}_0 が状態変数 \mathbf{u} の関数として表された式となっている。

さらに、 \tilde{f}_0 の \mathbf{a} の変動に対する2階微分(\tilde{f}_0 のHesse行列)を求めてみよう。式(1.1.28)の \mathbf{g}_0 に微分の連鎖則を用いれば、

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_0(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \mathbf{g}_0(\mathbf{a}) + \frac{\partial \mathbf{g}_0}{\partial \mathbf{u}^\top} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{a}^\top} \mathbf{b} + o(\|\mathbf{b}\|_{\mathbb{R}^2}) \\
&= \mathbf{g}_0(\mathbf{a}) + \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{01}}{\partial u_1} & \frac{\partial g_{01}}{\partial u_2} \\ \frac{\partial g_{02}}{\partial u_1} & \frac{\partial g_{02}}{\partial u_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial a_1} & \frac{\partial u_1}{\partial a_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial a_1} & \frac{\partial u_2}{\partial a_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + o(\|\mathbf{b}\|_{\mathbb{R}^2})
\end{aligned}$$

が得られる。これより、 \tilde{f}_0 のHesse行列は

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_0 &= \frac{\partial \mathbf{g}_0}{\partial \mathbf{u}^\top} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{a}^\top} \\
&= -\frac{e_Y}{l} \begin{pmatrix} 2u_1 & 0 \\ -2(u_2 - u_1) & 2(u_2 - u_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{u_1}{a_1} & 0 \\ \frac{u_1}{a_1} & -\frac{u_2 - u_1}{a_2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{e_Y}{l} \begin{pmatrix} \frac{2u_1^2}{a_1} & 0 \\ 0 & \frac{2(u_2 - u_1)^2}{a_2} \end{pmatrix} \\
&= l \begin{pmatrix} \frac{2\sigma(u_1)\varepsilon(u_1)}{a_1} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma(u_2 - u_1)\varepsilon(u_2 - u_1)}{a_2} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.1.29}$$

となる。状態方程式の解(式(1.1.20))を用いれば、式(1.1.29)の \mathbf{H}_0 は式(1.1.23)と一致することがわかる。ここで、式(1.1.23)の \mathbf{H}_0 は、式(1.1.22)の \mathbf{g}_0 が \mathbf{a}^\top で偏微分されたものと一致するが、式(1.1.29)の \mathbf{H}_0 はそのような関係からはえられない。その理由は、式(1.1.29)の \mathbf{H}_0 には、状態変数が使われているためである。

1.1.6 随伴変数法

最後に, Lagrange 乗数法が使われた随伴変数法により \mathbf{g}_0 を求めてみよう. 随伴変数法の詳細も 2.6.5 項において示される. ここでは, 形式的な利用にとどめる.

まず, f_0 の評価関数に対する Lagrange 関数を

$$\mathcal{L}_0(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) = f_0(\mathbf{u}) + \mathcal{L}_S(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{v}_0 \cdot (\mathbf{K}(\mathbf{a})\mathbf{u} - \mathbf{p}) \quad (1.1.30)$$

とおく. ここで, \mathcal{L}_S は式 (1.1.12) で定義された状態決定問題 (問題 1.1.3) に対する Lagrange 関数である. なお, Lagrange 関数で使われる \mathbf{u} は状態決定問題の解である必要はないものとする. $\mathbf{v}_0 = (v_{01}, v_{02})^\top \in U = \mathbb{R}^2$ は, f_0 のために用意された随伴変数 (Lagrange 乗数) であることを表すために下つきの 0 をつけた. 今後, f_i が状態決定問題の解 \mathbf{u} を含む関数のときは, 随伴変数を \mathbf{v}_i のようにかくことにする.

随伴変数法は, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0 の任意変動に対する $\mathcal{L}_0(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)$ の停留条件を使って \mathbf{g}_0 を求める方法である. $(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)$ の任意変動 $(\mathbf{b}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}_0) \in X \times U \times U$ に対する \mathcal{L}_0 の微分 (全微分) は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_0(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{b}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}_0] &= \mathcal{L}_{0\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{b}] + \mathcal{L}_{0\mathbf{u}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\hat{\mathbf{u}}] \\ &\quad + \mathcal{L}_{0\mathbf{v}_0}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\hat{\mathbf{v}}_0] \end{aligned} \quad (1.1.31)$$

となる. 式 (1.1.31) の右辺第 3 項は,

$$\mathcal{L}_{0\mathbf{v}_0}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\hat{\mathbf{v}}_0] = \mathcal{L}_S(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \hat{\mathbf{v}}_0) \quad (1.1.32)$$

となる. 式 (1.1.32) は状態決定問題 (問題 1.1.3) に対する Lagrange 関数になっている. そこで, \mathbf{u} が状態決定問題の解ならば, 式 (1.1.31) の右辺第 3 項はゼロとなる.

また, 式 (1.1.31) の右辺第 2 項は,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{0\mathbf{u}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\hat{\mathbf{u}}] &= f_{0\mathbf{u}}(\mathbf{u})[\hat{\mathbf{u}}] + \mathcal{L}_{S\mathbf{u}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\hat{\mathbf{u}}] \\ &= \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{v}_0 \cdot (\mathbf{K}(\mathbf{a})\hat{\mathbf{u}}) = \hat{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{K}^\top(\mathbf{a})\mathbf{v}_0) \end{aligned} \quad (1.1.33)$$

となる. ここで, 任意の $\hat{\mathbf{u}} \in U$ に対して式 (1.1.33) がゼロとなるように \mathbf{v}_0 が決定できれば, 式 (1.1.31) の右辺第 2 項もゼロとなる. この条件は, 次の随伴問題の解を \mathbf{v}_0 とおくことと同値である.

問題 1.1.5 (f_0 に対する随伴問題) $\mathbf{K}(\mathbf{a})$ と \mathbf{p} を問題 1.1.3 のとおりとする. このとき,

$$\mathbf{K}^\top(\mathbf{a})\mathbf{v}_0 = \mathbf{p} \quad (1.1.34)$$

を満たす $\mathbf{v}_0 \in U$ を求めよ. \square

問題 1.1.3 と問題 1.1.5 を比較すれば, $\mathbf{K}^\top = \mathbf{K}$ が成り立つことから,

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{u} \quad (1.1.35)$$

が得られる. 式 (1.1.35) のように, 状態変数と随伴変数が等しいという関係を **自己随伴関係** という. 実は, 式 (1.1.34) の右辺は $\partial f_0(\mathbf{u})/\partial \mathbf{u}$ となる. 問題 1.1.4 では $f_0(\mathbf{u}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}$ であったために自己随伴が成り立った. 言い換えれば, $\partial f_0(\mathbf{u})/\partial \mathbf{u}$ が状態方程式 (式 (1.1.11)) の右辺と等しくなるような f_0 が選ばれたときに自己随伴が成り立つことになる. 一般には状態方程式と随伴方程式は異なる. そのような場合を非自己随伴とよぶ. 演習問題 1.1 にその例を挙げている. 随伴方程式がどのようなになるか考えてほしい. しかし, 随伴方程式が異なる以外は以下の議論は同様であることに注意されたい.

さらに, 式 (1.1.31) の右辺第1項は,

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}'_{0\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{b}] \\ &= - \left\{ \mathbf{v}_0 \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{a})}{\partial a_1} \mathbf{u} \quad \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{a})}{\partial a_2} \mathbf{u} \right) \right\} \mathbf{b} \\ &= - \frac{e_Y}{l} \left\{ \begin{pmatrix} v_{01} & v_{02} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right) \right\} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= - \frac{e_Y}{l} \begin{pmatrix} v_{01} & v_{02} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_1 - u_2 \\ 0 & u_2 - u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= - \frac{e_Y}{l} \begin{pmatrix} u_1 v_{01} & (u_2 - u_1)(v_{02} - v_{01}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= l \begin{pmatrix} -\sigma(u_1)\varepsilon(v_{01}) & -\sigma(u_2 - u_1)\varepsilon(v_{02} - v_{01}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{b} \end{aligned} \quad (1.1.36)$$

となる. ここで, \mathbf{g}_0 は直接微分法による結果 (式 (1.1.28)) と一致する.

以上の結果をふまえて, \mathbf{u} と \mathbf{v}_0 がそれぞれ問題 1.1.3 と問題 1.1.5 の解ならば, 式 (1.1.31) の右辺第2項と第3項は0となり,

$$\mathcal{L}'_0(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{b}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}_0] = \mathcal{L}'_{0\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{b}] = \tilde{f}'_0(\mathbf{a})[\mathbf{b}] = \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{b} \quad (1.1.37)$$

が成り立つことになる. このように, 等式制約 (状態方程式) が満たされたもとで評価関数の微分を求める方法については, 2.6 節で示される. その中で, 式 (1.1.36) は式 (2.6.25) に対応する. ただし, 2.6 節では \tilde{f} の勾配を $\tilde{\mathbf{g}}$ とかいていることに注意されたい.

さらに, Lagrange 関数 \mathcal{L}_0 と Hesse 行列 \mathbf{H}_0 の関係について調べておこう.

2.1 節で説明されるように, 最適設計問題を最適化問題におきかえる場合には, 最適設計問題における設計変数と状態変数を合わせたものが最適化問題の設計変数になる. そこで, ここでは最適化問題の定義にならい, 設計変数を $\mathbf{x} = (\mathbf{a}^\top, \mathbf{u}^\top)^\top \in \mathbb{R}^4$ とおくことにする. 以下では, 表記を簡単にするために, $(\mathbf{a}^\top, \mathbf{u}^\top)^\top$ を (\mathbf{a}, \mathbf{u}) のようにかくことにする. \mathbf{v}_0 は等式制約に対する Lagrange 乗数とする. さらに, 設計変数 (\mathbf{a}, \mathbf{u}) の任意変動 $(\mathbf{b}_1, \hat{\mathbf{u}}_1) \in X \times U$ と $(\mathbf{b}_2, \hat{\mathbf{u}}_2) \in X \times U$ に対する Lagrange 関数 \mathcal{L}_0 の 2 階微分を $\mathcal{L}_{0(\mathbf{a}, \mathbf{u}), (\mathbf{a}, \mathbf{u})}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[(\mathbf{b}_1, \hat{\mathbf{u}}_1), (\mathbf{b}_2, \hat{\mathbf{u}}_2)]$ とかくことにする. このとき,

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{0(\mathbf{a}, \mathbf{u}), (\mathbf{a}, \mathbf{u})}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[(\mathbf{b}_1, \hat{\mathbf{u}}_1), (\mathbf{b}_2, \hat{\mathbf{u}}_2)] \\ &= (\mathcal{L}_{0\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{b}_1] + \mathcal{L}_{0\mathbf{u}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\hat{\mathbf{u}}_1])_{\mathbf{a}}[\mathbf{b}_2] \\ & \quad + (\mathcal{L}_{0\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{b}_1] + \mathcal{L}_{0\mathbf{u}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\hat{\mathbf{u}}_1])_{\mathbf{u}}[\hat{\mathbf{u}}_2] \\ &= (f_{0\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_1 + \mathcal{L}_{S\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{b}_1] + \mathcal{L}_{S\mathbf{u}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\hat{\mathbf{u}}_1])_{\mathbf{a}}[\mathbf{b}_2] \\ & \quad + (f_{0\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_1 + \mathcal{L}_{S\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{b}_1] + \mathcal{L}_{S\mathbf{u}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\hat{\mathbf{u}}_1])_{\mathbf{u}}[\hat{\mathbf{u}}_2] \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{b}_2 \\ \hat{\mathbf{u}}_2 \end{pmatrix} \cdot \left(\mathbf{H}_{\mathcal{L}_S} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \hat{\mathbf{u}}_1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (1.1.38)$$

となる. ここで,

$$\mathbf{H}_{\mathcal{L}_S} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{S\mathbf{a}\mathbf{a}} & \mathcal{L}_{S\mathbf{a}\mathbf{u}} \\ \mathcal{L}_{S\mathbf{u}\mathbf{a}} & \mathcal{L}_{S\mathbf{u}\mathbf{u}} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} & \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0^\top \mathbf{K}_{a_1} \\ \mathbf{v}_0^\top \mathbf{K}_{a_2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{a_1}^\top \mathbf{v}_0 & \mathbf{K}_{a_2}^\top \mathbf{v}_0 \end{pmatrix} & \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} \end{pmatrix} \quad (1.1.39)$$

となる. 式 (1.1.39) から, $\mathbf{H}_{\mathcal{L}_S}$ は正定値行列とは限らないことがわかる.

ここで, \mathbf{u} と \mathbf{v}_0 を設計変数 \mathbf{a} のときの状態決定問題 (問題 1.1.3) と随伴問題 (問題 1.1.5) の解として, $\hat{\mathbf{v}}$ (\mathbf{v} はギリシャ文字 ϵ の太文字) を \mathbf{a} の任意変動 $\mathbf{b} \in X$ に対して状態決定問題の等式制約が満たされたもとの \mathbf{u} の変動であると仮定する (定理 2.6.6 および 2.6.7 参照). このとき, 状態決定問題に対する Lagrange 関数の断面積微分は

$$\mathcal{L}_{S(\mathbf{a}, \mathbf{u})}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v})[\mathbf{b}, \hat{\mathbf{v}}] = \mathbf{v} \cdot \{ -(\mathbf{K}'(\mathbf{a})[\mathbf{b}])\mathbf{u} - \mathbf{K}(\mathbf{a})\hat{\mathbf{v}} \} = 0 \quad (1.1.40)$$

となる. これより,

$$\hat{\mathbf{v}} = -\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{a})(\mathbf{K}'(\mathbf{a})[\mathbf{b}]) = \begin{pmatrix} -\frac{u_1}{a_1} & 0 \\ \frac{u_1}{a_1} & -\frac{u_2 - u_1}{a_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (1.1.41)$$

が得られる. 式 (1.1.41) 右辺の行列は式 (1.1.25) と式 (1.1.26) を横に並べた行列と一致する. さらに, 自己随伴関係を用いれば, 式 (1.1.38) は

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_{0(a,u),(a,u)}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) [(\hat{\mathbf{b}}_1, \hat{\mathbf{v}}_1), (\mathbf{b}_2, \hat{\mathbf{v}}_2)] \\
&= \mathcal{L}_{\mathbf{S}au}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) [\hat{\mathbf{b}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2] + \mathcal{L}_{\mathbf{S}ua}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) [\mathbf{b}_2, \hat{\mathbf{v}}_1] \\
&= - \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0^\top \mathbf{K}_{a_1} \\ \mathbf{v}_0^\top \mathbf{K}_{a_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u_1/a_1 & 0 \\ -u_1/a_1 & -(u_2 - u_1)/a_2 \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \left(\begin{pmatrix} \mathbf{v}_0^\top \mathbf{K}_{a_1} \\ \mathbf{v}_0^\top \mathbf{K}_{a_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u_1/a_1 & 0 \\ -u_1/a_1 & -(u_2 - u_1)/a_2 \end{pmatrix} \right)^\top \right\} \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{H}_0 \mathbf{b}_2)
\end{aligned}$$

となる. この結果から, \tilde{f}_0 の2階断面微分

$$h_0(\mathbf{a})[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2] = \mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{H}_0 \mathbf{b}_2) \quad (1.1.42)$$

が得られる. ただし, \mathbf{H}_0 は式 (1.1.29) と同じである.

以上の結果より, (\mathbf{a}, \mathbf{u}) の任意変動に対する Lagrange 関数 \mathcal{L}_0 の Hesse 行列は \mathcal{L}_S の Hesse 行列 $\mathbf{H}_{\mathcal{L}_S}$ と一致し, それは正定値行列とは限らないことがわかった. しかし, $\hat{\mathbf{u}}_1$ と $\hat{\mathbf{u}}_2$ が, 設計変数変動したときに, 状態決定問題の解でありつづけたときの \mathbf{u} の変動であると仮定されたときには, \mathcal{L}_0 の \mathbf{a} の任意変動 $\mathbf{b}_1 \in X$ と $\mathbf{b}_2 \in X$ に対する Hesse 行列は, 他の方法で求められた Hesse 行列 \mathbf{H}_0 と一致することが確認された.

なお, 本節でみてきた最適設計問題 (問題 1.1.4) では, 設計変数 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ は, 断面面積であると仮定された. それにより, 式 (1.1.11) において $\mathbf{K}(\mathbf{a})$ は \mathbf{a} の1次形式となっていた. そのために, 式 (1.1.39) や式 (1.1.42) において $\mathcal{L}_{\mathbf{S}aa} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2 \times 2}$ となった. もしも, 設計変数 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ が正方形断面の1辺の長さであると仮定されたならば, $\mathbf{K}(\mathbf{a})$ は $\mathbf{K}(\mathbf{a}^2)$ となり, $\mathcal{L}_{\mathbf{S}aa} \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2 \times 2}$ となる (演習問題 1.5 参照). このように, 設計変数や評価関数の選び方によって \mathcal{L}_{0aa} は $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2 \times 2}$ ではないことが起こりえる. しかし, 状態決定問題が線形であれば, $\mathcal{L}_{\mathbf{S}uu} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2 \times 2}$ は常に成り立つことになる.

上記のような方法では, Lagrange 関数 \mathcal{L}_0 から Hesse 行列 \mathbf{H}_0 を求める際に, 式 (1.1.41) が使われた. 式 (1.1.41) は式 (1.1.25) と式 (1.1.26) と一致することから, 直接微分法の結果を使っていることになる. このような関係は, 第8章や第9章で扱う問題においてはいつも得られるとは限らない. そのような場合には, Lagrange 乗数法を用いることによって, 評価関数の2階微分を求めることができる. ここでは, その方法についてもみておこう. しかしながら, この方法で得られた2階微分

の表現は、最適化問題の解法を考える際には工夫が必要になる。その詳細は第 3 章で示すことにする。

第 4 章にて、一般化微分のひとつとして Fréchet 微分 (定義 4.5.4) を定義する。ここでは、その定義に従い、1 階断面積微分 $\tilde{f}'_0(\mathbf{a})[\mathbf{b}_1] = \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{b}_1$ の微分を求めることにする。 $\mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{b}_1$ に対する Lagrange 関数を

$$\mathcal{L}_{10}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_0) = \mathbf{g}_0(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{b}_1 + \mathcal{L}_S(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_0) \quad (1.1.43)$$

とおく。ここで、 $\mathbf{g}_0(\mathbf{u})$ と \mathcal{L}_S はそれぞれ式 (1.1.35) を代入した式 (1.1.36) と式 (1.1.12) で与えられる。 $\mathbf{w}_0 = (w_{01}, w_{02})^\top \in U = \mathbb{R}^2$ は、 $\mathbf{g}_0(\mathbf{u})$ が状態決定問題の解 \mathbf{u} の関数であるために用意された随伴変数である。 \mathcal{L}_{10} において \mathbf{b}_1 は定ベクトルとみなす。

$(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_0)$ の任意変動 $(\mathbf{b}_2, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{w}}_0) \in X \times U^2$ に対する \mathcal{L}_{10} の微分は

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}'_{10}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_0)[\mathbf{b}_2, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{w}}_0] \\ &= \mathcal{L}_{10\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_0)[\mathbf{b}_2] + \mathcal{L}_{10\mathbf{u}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_0)[\hat{\mathbf{u}}] \\ & \quad + \mathcal{L}_{10\mathbf{w}_0}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_0)[\hat{\mathbf{w}}_0] \end{aligned} \quad (1.1.44)$$

となる。式 (1.1.44) の右辺第 3 項は、 \mathbf{u} が状態決定問題の解ならばゼロとなる。また、式 (1.1.44) の右辺第 2 項は、

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{10\mathbf{u}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_0)[\hat{\mathbf{u}}] \\ &= \mathbf{g}_{0\mathbf{u}^\top}(\mathbf{u})[\hat{\mathbf{u}}] \cdot \mathbf{b}_1 + \mathcal{L}_{S\mathbf{u}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_0)[\hat{\mathbf{u}}] \\ &= \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{q} - \mathbf{w}_0 \cdot (\mathbf{K}(\mathbf{a})\hat{\mathbf{u}}) = \hat{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{K}^\top(\mathbf{a})\mathbf{w}_0) \end{aligned} \quad (1.1.45)$$

となる。ただし、

$$\mathbf{q} = \mathbf{g}_{0\mathbf{u}^\top}(\mathbf{u})\mathbf{b}_1 = -\frac{2e_Y}{l} \begin{pmatrix} u_1 & u_1 - u_2 \\ 0 & u_2 - u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{pmatrix} \quad (1.1.46)$$

とおく。ここで、任意の $\hat{\mathbf{u}} \in U$ に対して式 (1.1.45) がゼロとなる条件は、 \mathbf{w}_0 を次の随伴問題の解とおくことと同値である。

問題 1.1.6 ($\mathbf{g}_0(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{b}_1$ に対する随伴問題) $\mathbf{K}(\mathbf{a})$ を問題 1.1.3 のとおりとする。 \mathbf{q} を式 (1.1.46) とする。このとき、

$$\mathbf{K}^\top(\mathbf{a})\mathbf{w}_0 = \mathbf{q}$$

を満たす $\mathbf{w}_0 \in U$ を求めよ。 □

問題 1.1.6 の解は

$$\mathbf{w}_0 = \left(\mathbf{K}^\top(\mathbf{a}) \right)^{-1} \mathbf{g}_{0\mathbf{u}}^\top(\mathbf{u}) \mathbf{b}_1 = -2 \begin{pmatrix} \frac{u_1}{a_1} & 0 \\ \frac{u_1}{a_1} & \frac{u_2 - u_1}{a_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{pmatrix} \quad (1.1.47)$$

となる。これ以降、 \mathbf{w}_0 は \mathbf{b}_1 の関数であることから、 $\mathbf{w}_0(\mathbf{b}_1)$ とかくことにする。さらに、式 (1.1.44) の右辺第1項は、

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{10\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_0(\mathbf{b}_1))[\mathbf{b}_2] \\ &= - \left\{ \mathbf{w}_0(\mathbf{b}_1) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{a})}{\partial a_1} \mathbf{u} \quad \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{a})}{\partial a_2} \mathbf{u} \right) \right\} \mathbf{b}_2 \end{aligned} \quad (1.1.48)$$

となる。ここで、式 (1.1.47) を式 (1.1.48) に代入すれば、

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{10\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_0(\mathbf{b}_1))[\mathbf{b}_2] \\ &= h_0(\mathbf{a})[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2] = \mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{H}_0 \mathbf{b}_2) = \mathbf{g}_{\mathbf{H}_0}(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1) \cdot \mathbf{b}_2 \end{aligned} \quad (1.1.49)$$

が成り立つ。ここで、

$$\mathbf{g}_{\mathbf{H}_0}(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1) = \mathcal{L}_{10\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_0(\mathbf{b}_1)) \quad (1.1.50)$$

とおいた。本書では、 $\mathbf{g}_{\mathbf{H}_0}$ を平均コンプライアンスの [Hesse 勾配](#) とよぶことにする。

1.1.7 最適性の条件

前項までにおいて、断面積 $\mathbf{a} \in \mathcal{D}^\circ$ の変動に対する \tilde{f}_0 の勾配 \mathbf{g}_0 と Hesse 行列 \mathbf{H}_0 および f_1 の勾配 \mathbf{g}_1 が計算できることをみてきた。そこで、問題 1.1.4 に戻って、最適な断面積のときに満たされる条件 ([最適性の条件](#)) について考えてみることにしよう。

1.1.4 項でみてきたように、 \tilde{f}_0 は X 上で Hesse 行列 \mathbf{H}_0 が正定値となることから凸関数と判定された (定理 2.4.6)。また、 f_1 は \mathbf{a} に関する1次関数なので X 上の凸関数である (定理 2.4.4)。そこで、問題 1.1.4 は第2章で説明されるような凸最適化問題になっている。そうであれば、あとで示される KKT 条件 (定理 2.7.5) を満たす $\mathbf{a} \in \mathcal{D}^\circ$ は問題 1.1.4 の最小点であることになる (定理 2.7.9)。以下で問題 1.1.4 に対する KKT 条件を求めてみよう。

問題 1.1.4 の最適化問題に対する [Lagrange 関数](#)を

$$\mathcal{L}(\mathbf{a}, \lambda_1) = \tilde{f}_0(\mathbf{a}) + \lambda_1 f_1(\mathbf{a})$$

とおく. $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ は $f_1(\mathbf{a}) \leq 0$ に対する Lagrange 乗数である. このとき, 問題 1.1.4 の KKT 条件は

$$\mathcal{L}_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \lambda_1) = \mathbf{g}_0 + \lambda_1 \mathbf{g}_1 = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, \quad (1.1.51)$$

$$\mathcal{L}_{\lambda_1}(\mathbf{a}, \lambda_1) = f_1(\mathbf{a}) = l(a_1 + a_2) - c_1 \leq 0, \quad (1.1.52)$$

$$\lambda_1 f_1(\mathbf{a}) = 0, \quad (1.1.53)$$

$$\lambda_1 \geq 0 \quad (1.1.54)$$

で与えられる.

KKT 条件の意味についての詳細な説明は 2.7.3 項にゆずるが, ここでは, 概要のみをみておこう.

まず, 最適な断面積のときには, 式 (1.1.51) と式 (1.1.54) は目的関数と制約関数がトレードオフの関係にあることを示している. 実際, 式 (1.1.51) の両辺と \mathbf{b} の内積をとってかきかえれば,

$$\lambda_1 = -\frac{\mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{b}} \quad (1.1.55)$$

となる. 式 (1.1.55) の右辺において, 分母と分子は設計変数が \mathbf{b} だけ変動したときの f_1 と f_0 の変動量を表している. このとき, $\lambda_1 > 0$ はそれらの変動量の符号が異なることを意味する. すなわち, f_1 と f_0 はトレードオフの関係にあることを表している.

式 (1.1.52) は本来の制約条件である.

式 (1.1.53) は相補性条件とよばれる. 実際, 不等式制約が等号で満たされる場合 (有効あるいはアクティブという) には $\lambda_1 > 0$ をとり, 不等号で満たされる場合 (無効あるいはインアクティブという) には $\lambda_1 = 0$ をとる. $\lambda_1 = 0$ は制約を無効にする作用をする.

次に, 式 (1.1.51) の物理的な意味についてみてみよう. 式 (1.1.36) の \mathbf{g}_0 と式 (1.1.17) の \mathbf{g}_1 を式 (1.1.51) に代入すれば,

$$l \begin{pmatrix} -\sigma(u_1)\varepsilon(u_1) \\ -\sigma(u_2 - u_1)\varepsilon(u_2 - u_1) \end{pmatrix} + \lambda_1 l \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とかける. この式は

$$\sigma(u_1)\varepsilon(u_1) = \sigma(u_2 - u_1)\varepsilon(u_2 - u_1) = \lambda_1 \quad (1.1.56)$$

を意味する. すなわち, 問題 1.1.4 の最小点では, 二つの弾性体のひずみエネルギー密度 (式 (1.1.7) の w) は一致して, λ_1 はひずみエネルギー密度の 2 倍の意味をもつことになる. したがって, 二つの 1 次元弾性体に非零の応力が発生するような \mathbf{p} が与えられたときには, $\lambda_1 > 0$ となり, 体積制約が有効な最小点が存在することになる.

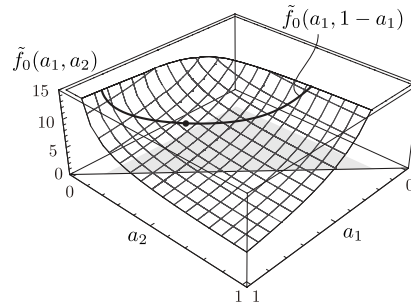


図 1.1.4: 平均コンプライアンス最小化問題の数値例

1.1.8 数値例

例題を使って最小点を具体的に求めてみよう。

例題 1.1.7 (平均コンプライアンス最小化問題の数値例) 問題 1.1.4 において $l = 1$, $e_Y = 1$, $c_1 = 1$, $\mathbf{p} = (1, 1)^\top$, $\mathbf{a}_0 = (0.1, 0.1)^\top$ とおく. このとき, \mathbf{a} の最小点を求めよ. \square

解答 $l = 1$, $e_Y = 1$, $\mathbf{p} = (1, 1)^\top$ を式 (1.1.21) に代入すれば,

$$\tilde{f}_0(\mathbf{a}) = \frac{4}{a_1} + \frac{1}{a_2} \quad (1.1.57)$$

となる. 図 1.1.4 は \tilde{f}_0 を示す. \tilde{f}_0 と f_1 の断面積微分は, 式 (1.1.22) と式 (1.1.17) より,

$$\mathbf{g}_0 = -\begin{pmatrix} 4/a_1^2 \\ 1/a_2^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる. \mathbf{a} が最小点ならば, 式 (1.1.56) より

$$\lambda_1 = \frac{4}{a_1^2} = \frac{1}{a_2^2}$$

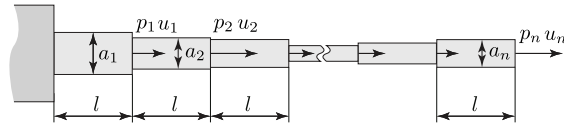
が成り立つ. \mathbf{a} が式 (1.1.16) で定義された \mathcal{D}^0 の要素であれば, λ_1 は正となり, 相補性条件より, f_1 に対する不等式制約は等号で成り立つことになる. そこで, $a_2 = 1 - a_1$ を式 (1.1.57) に代入し, a_1 の変動に対する停留条件

$$\frac{d}{da_1} \tilde{f}_0(a_1, 1 - a_1) = \frac{1}{(1 - a_1)^2} - \frac{4}{a_1^2} = 0$$

を満たす a_1 を求め, a_2 を $1 - a_1$ によって求めれば,

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる. このうち $\mathbf{a} \geq \mathbf{a}_0$ が満たされるのは $\mathbf{a} = (2/3, 1/3)^\top$ である. \tilde{f}_0 と f_1 は凸関数であることから, 問題 1.1.4 は凸最適化問題となり, 定理 2.7.9 より, KKT 条件を満たすこの \mathbf{a} はこの問題の最小点である. \square

図 1.2.1: n 個の断面積をもつ 1 次元線形弾性体

1.2 直接微分法と随伴変数法の比較

1.1 節では、問題 1.1.4 に対する最適性の条件を求めるまでをみてきた。ここでは、評価関数の断面積微分を求めるために代入法、直接微分法および随伴変数法が使われた。ここでは、将来、関数を設計変数においた最適化問題を扱うことを念頭において、代入法は複雑な問題に対しては手続きが煩雑になることから除外して、直接微分法と随伴変数法の特徴と適用範囲を比較してみよう。

問題 1.1.4 の断面積の数が $n \in \mathbb{N}$ (\mathbb{N} は自然数全体の集合を表す) 個に拡張された図 1.2.1 のような 1 次元線形弾性体を考えよう。このときの線形弾性問題は次のようになる。

問題 1.2.1 (多段つき 1 次元線形弾性問題) 図 1.2.1 の 1 次元線形弾性体に対して、 $l \in \mathbb{R}$ ($l > 0$), $e_Y \in \mathbb{R}$ ($e_Y > 0$), $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbf{a} \geq \mathbf{a}_0 > \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$) および $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ が与えられたとき、

$$\mathbf{K}(\mathbf{a}) \mathbf{u} = \mathbf{p} \quad (1.2.1)$$

を満たす $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ を求めよ。ただし、 $\mathbf{K}(\mathbf{a})$ は問題 1.1.3 の $\mathbf{K}(\mathbf{a})$ が拡張された行列とする (演習問題 1.5)。□

状態決定問題 (問題 1.2.1) に対する Lagrange 関数を、 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ および $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\mathcal{L}_S(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (-\mathbf{K}(\mathbf{a}) \mathbf{u} + \mathbf{p}) \quad (1.2.2)$$

とおく。このとき、問題 1.2.1 は、任意の $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\mathcal{L}_S(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$$

を満たす $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ を求めることと同値である。

制約関数の数を $m \in \mathbb{N}$ として、最適設計問題を次のように設定する。以下では $X = \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{R}^n$, 定数ベクトル $\mathbf{a}_0 > \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$ に対して

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{a} \in X \mid \mathbf{a} \geq \mathbf{a}_0\} \quad (1.2.3)$$

とおく。

問題 1.2.2 (多設計変数多制約問題) $X = \mathbb{R}^n$ および $U = \mathbb{R}^n$ とおく. \mathcal{D} を式 (1.2.3) とする. $f_0, f_1, \dots, f_m : X \times U \rightarrow \mathbb{R}$ は与えられているとする. このとき,

$$\min_{(\mathbf{a}, \mathbf{u}) \in \mathcal{D} \times U} \{f_0(\mathbf{a}, \mathbf{u}) \mid f_1(\mathbf{a}, \mathbf{u}) \leq 0, \dots, f_m(\mathbf{a}, \mathbf{u}) \leq 0, \text{ 問題 1.2.1}\}$$

を満たす \mathbf{a} を求めよ. □

この問題を使って, 以下で, 直接微分法と随伴変数法による評価関数 f_0, \dots, f_m の断面積勾配 $\mathbf{g}_0, \dots, \mathbf{g}_m$ の計算方法を確認しながら両者の特徴を比較してみることにしよう. 以下では, $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ を評価関数 f_i の添え字, $j \in \{1, \dots, n\}$ を設計変数 a_j の添え字とする.

1.2.1 直接微分法

まず, [直接微分法](#)による \mathbf{g}_i の計算方法をみてみよう. ここでも, 任意の $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ のときの問題 1.2.1 の解を $\mathbf{u}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ とかくことにする.

$\tilde{f}_i(\mathbf{a})$ の \mathbf{a} 周りの Taylor 展開と微分の連鎖則より,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= f_i(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{u}(\mathbf{a} + \mathbf{b})) \\ &= f_i(\mathbf{a}, \mathbf{u}(\mathbf{a})) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial a_1} & \frac{\partial f_i}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial f_i}{\partial a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial u_1} & \frac{\partial f_i}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_i}{\partial u_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial a_1} & \frac{\partial u_1}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial a_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial a_1} & \frac{\partial u_2}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial a_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial a_1} & \frac{\partial u_n}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ &\quad + o(\|\mathbf{b}\|_{\mathbb{R}^n}) \\ &= f_i(\mathbf{a}, \mathbf{u}(\mathbf{a})) + f_{i\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} + f_{i\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{u}_{\mathbf{a}^\top} \mathbf{b}) + o(\|\mathbf{b}\|_{\mathbb{R}^n}) \\ &= f_i(\mathbf{a}, \mathbf{u}(\mathbf{a})) + \{f_{i\mathbf{a}} + (\mathbf{u}_{\mathbf{a}^\top})^\top f_{i\mathbf{u}}\} \cdot \mathbf{b} + o(\|\mathbf{b}\|_{\mathbb{R}^n}) \\ &= f_i(\mathbf{a}, \mathbf{u}(\mathbf{a})) + \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{b} + o(\|\mathbf{b}\|_{\mathbb{R}^n}) \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

が成り立つ。なお、本書では、列ベクトル \mathbf{u} の行ベクトル \mathbf{a}^\top に対する偏導関数で構成された行列 $(\partial u_i / \partial a_j)_{ij}$ を $\mathbf{u}_{\mathbf{a}^\top}$ のようにかく。式 (1.2.4) において、 $f_i(\mathbf{a}, \mathbf{u})$ が与えられていれば $f_{i\mathbf{a}}$ と $f_{i\mathbf{u}}$ は既知である。そこで、 \mathbf{g}_i を求めるために、 $\mathbf{u}_{\mathbf{a}^\top}$ の計算法を考えよう。

$j \in \{1, \dots, n\}$ に対して、状態方程式の a_j に対する偏微分をとれば、

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a_j} \mathbf{u} + \mathbf{K}(\mathbf{a}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a_j} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$$

が成り立つ。そこで、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a_j} = -\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{a}) \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a_j} \mathbf{u} \quad (1.2.5)$$

が得られる。式 (1.2.5) の解を $j \in \{1, \dots, n\}$ に対して横に並べれば、 $\mathbf{u}_{\mathbf{a}^\top}$ が得られる。

以上の観察から、次のことがいえる。

注意 1.2.3 (直接微分法の特徴) 直接微分法は随伴変数法と比較して次のような特徴をもつ。

- (1) 評価関数の数が多いとき ($m \gg 1$)、直接微分法は有利となる。なぜならば、式 (1.2.5) の計算を終えて、 $\mathbf{u}_{\mathbf{a}^\top}$ をいったん求めてしまえば、 $\mathbf{u}_{\mathbf{a}^\top}$ はすべての評価関数 f_0, \dots, f_m に対して共通に使えるためである。
- (2) 設計変数の数が多いとき ($n \gg 1$)、直接微分法は不利となる。なぜならば、式 (1.2.5) の計算を n 回繰り返す必要があるためである。もしも、逆行列 \mathbf{K}^{-1} を保存しないで、設計変数ごとに \mathbf{K}^{-1} を求めなおすときには、差分による断面積微分の計算法と同程度の計算量となる。□

なお、差分による断面積微分の計算法とは次のような方法である。 $\mathbf{g}_i = (g_{ij})_{j \in \{1, \dots, n\}}$ とかくことにする。このとき、 g_{ij} を求めるために \mathbf{a} と $\mathbf{a} + (0, \dots, 0, b_j, 0, \dots, 0)^\top$ のときの状態方程式を解いて、それらの解を用いて、

$$g_{ij} = \frac{\tilde{f}_i(\mathbf{a} + (0, \dots, 0, b_j, 0, \dots, 0)^\top) - \tilde{f}_i(\mathbf{a})}{b_j} \quad (1.2.6)$$

によって g_{ij} を求める方法である。 \mathbf{g}_i を求めるために n 回状態方程式を解かなくてはならないことになる。

1.2.2 随伴変数法

次に、[随伴変数法](#)による g_i の計算方法についてみてみよう。 $f_i(\mathbf{a}, \mathbf{u})$ に対する Lagrange 関数を

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_i(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_i) &= f_i(\mathbf{a}, \mathbf{u}) + \mathcal{L}_S(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_i) \\ &= f_i(\mathbf{a}, \mathbf{u}) - \mathbf{v}_i \cdot (\mathbf{K}(\mathbf{a})\mathbf{u} - \mathbf{p})\end{aligned}\quad (1.2.7)$$

とおく。 \mathcal{L}_S は式 (1.2.2) で定義されたものとする。式 (1.2.7) の \mathbf{u} は状態決定問題の解である必要はないものとする。 $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$ は状態方程式に対する随伴変数 (Lagrange 乗数) である。 $(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_i)$ の任意変動 $(\mathbf{b}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}_i) \in X \times U \times U$ に対する \mathcal{L}_i の微分は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_i(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_i)[\mathbf{b}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}_i] &= \mathcal{L}_{i\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_i)[\mathbf{b}] + \mathcal{L}_{i\mathbf{u}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_i)[\hat{\mathbf{u}}] + \mathcal{L}_{i\mathbf{v}_i}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_i)[\hat{\mathbf{v}}_i]\end{aligned}\quad (1.2.8)$$

となる。式 (1.2.8) の右辺第3項は、

$$\mathcal{L}_{i\mathbf{v}_i}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_i)[\hat{\mathbf{v}}_i] = \mathcal{L}_S(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \hat{\mathbf{v}}_i)\quad (1.2.9)$$

となる。式 (1.2.9) は状態決定問題 (問題 1.2.1) に対する Lagrange 関数になっている。そこで、 \mathbf{u} が状態決定問題の解であれば、式 (1.2.8) の右辺第3項はゼロとなる。

また、式 (1.2.8) の右辺第2項は、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{i\mathbf{u}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_i)[\hat{\mathbf{u}}] &= f_{i\mathbf{u}}(\mathbf{a}, \mathbf{u})[\hat{\mathbf{u}}] + \mathcal{L}_{S\mathbf{u}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_i)[\hat{\mathbf{u}}] \\ &= f_{i\mathbf{u}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{v}_i \cdot (\mathbf{K}(\mathbf{a})\hat{\mathbf{u}}) \\ &= -\hat{\mathbf{u}} \cdot \left(\mathbf{K}^\top(\mathbf{a})\mathbf{v}_i - \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}) \right)\end{aligned}\quad (1.2.10)$$

となる。ここで、任意の $\hat{\mathbf{u}} \in U$ に対して式 (1.2.10) がゼロとなるように \mathbf{v}_i を決定できれば、式 (1.2.8) の右辺第2項はゼロとなる。この条件は、次の[随伴問題](#)の解を \mathbf{v}_i とおくことと同値である。

問題 1.2.4 (f_i に対する随伴問題) $\mathbf{K}(\mathbf{a})$ と f_i を問題 1.2.1 のとおりとする。このとき、

$$\mathbf{K}^\top(\mathbf{a})\mathbf{v}_i = f_{i\mathbf{u}}(\mathbf{a}, \mathbf{u})$$

を満たす $\mathbf{v}_i \in U$ を求めよ。 □

ここで、 \mathbf{u} と \mathbf{v}_i がそれぞれ問題 1.2.1 と問題 1.2.4 の解ならば、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ia}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_i)[\mathbf{b}] &= f_{ia}(\mathbf{a}, \mathbf{u}) \cdot \mathbf{b} - \mathbf{v}_i \cdot \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{a})}{\partial a_1} \mathbf{u} \quad \cdots \quad \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{a})}{\partial a_n} \mathbf{u} \right) \mathbf{b} \right\} \\ &= \left\{ f_{ia}(\mathbf{a}, \mathbf{u}) - \left(\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{a})}{\partial a_1} \mathbf{u} \quad \cdots \quad \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{a})}{\partial a_n} \mathbf{u} \right)^\top \mathbf{v}_i \right\} \cdot \mathbf{b} \\ &= \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{b}\end{aligned}$$

が成り立つ。この結果は、直接微分法の結果と一致する (2.6.5 項参照)。

以上の観察から、随伴変数法は次のような特徴をもつことがわかる。

注意 1.2.5 (随伴変数法の特徴) 随伴変数法は直接微分法と比較して次のような特徴をもつ。

- (1) 評価関数の数が多いとき ($m \gg 1$)、随伴変数法は不利になる。なぜならば、随伴問題の数は評価関数の数 $m+1$ と一致するためである。
- (2) 設計変数の数が多いとき ($n \gg 1$)、随伴変数法は有利になる。なぜならば、随伴問題の数 $m+1$ は設計変数の数 n に依存しないためである。
- (3) さらに、随伴問題の変数の数は状態方程式の変数の数 n と一致する。このことは、状態変数が時間や空間の領域上で定義された関数になった場合 (状態変数が入る線形空間は無限次元空間になる) でも、随伴変数法は成り立つことを意味する。
- (4) 自己随伴関係が成り立てば、随伴問題を解く必要がない。

□

あとの第 5 章以降で、状態方程式に偏微分方程式の境界値問題を仮定する。その際、状態変数は $d \in \{2, 3\}$ 次元空間の領域上で定義された関数となる。注意 1.2.5 (3) の特徴は、形状や位相最適化問題において状態方程式を満たしながら設計変数の変動に対する評価関数の微分を求めるためには、随伴変数法でなければならないことを示している。しかしながら、直接微分法で使われる式 (1.2.5) の関係が、ある条件のもとで、簡単な偏微分方程式 (例えば、第 8 章では式 (8.5.17)) として得られる場合には、形状や位相最適化問題においても直接微分法は有効である。

1.3 1次元分岐 Stokes 流れ場の最適設計問題

これまで、1次元線形弾性体を取りあげて最適設計問題とはどういうものかをみてきた。ここでは、設計対象を流れ場に変更しても同様の最適設計問題を構成でき

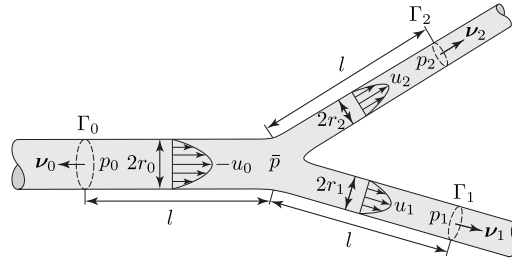


図 1.3.1: 分岐する 1 次元 Stokes 流れ場

ることをみておきたい。

図 1.3.1 のような円管内の粘性流れ場について考えてみよう。この問題は、Murray の法則をヒントにしている。Murray は、血液の輸送コストと体積維持のコストの和を最小にする条件から、血管のすべての断面において流量は血管半径の 3 乗に比例することを導いた [6]。Murray は分岐管を扱わなかったが、ここでは、断面の面積を設計変数にして、その関係が得られることをみておこう。なお、Murray は分岐角についても同じ評価関数を用いて分岐則を示している。興味のある読者は文献 [5] を参照されたい。

1.3.1 状態決定問題

図 1.3.1 において、 r_0, r_1, r_2 を円管の半径、 p_0, p_1, p_2 を流入断面 Γ_0 と流出断面 Γ_1 および Γ_2 の圧力、 \bar{p} を分岐断面の圧力、 l を長さ、 μ を粘性係数とする。 $i \in \{0, 1, 2\}$ に対して、半径 r_i の断面内の半径 r における流速は、円管の境界条件に対する定常 Stokes 方程式の解と一致する Hagen-Poiseuille 流れ

$$u_{Hi}(r) = -\frac{p_i - \bar{p}}{4\mu l} (r_i^2 - r^2) \quad (1.3.1)$$

で与えられると仮定する。ただし、三つの円管の流速は、それぞれ Γ_0, Γ_1 および Γ_2 上の流れ場に対する外向き法線 ν_0, ν_1 および ν_2 の向きを正にとることとする。すなわち、 Γ_0 から流入する流速 $u_{H0}(r)$ は ν_0 とは反対の方向を向いていることから、負となる。このとき、半径 r_i の円管を流れる流体の単位時間あたりの流量を

$$u_i = \int_0^{r_i} u_{Hi}(r) 2\pi r \, dr = \frac{\bar{p} - p_i}{8\pi\mu l} (\pi r_i^2)^2 = (\bar{p} - p_i) a_i^2 \quad (1.3.2)$$

とおく。ここで、

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{8\pi\mu l}} \begin{pmatrix} \pi r_0^2 \\ \pi r_1^2 \\ \pi r_2^2 \end{pmatrix} \quad (1.3.3)$$

とおいた. 式 (1.3.3) によれば, Γ_i の断面積は $\sqrt{8\pi\mu}a_i$ となる. しかし, 本節では, 簡単のために, a_i を断面積とよぶことにして, $\mathbf{a} \in X \in \mathbb{R}^3$ を設計変数とおくことにする. また, 連続の式は

$$u_0 + u_1 + u_2 = 0 \quad (1.3.4)$$

となる. 式 (1.3.2) を式 (1.3.4) に代入すれば

$$\bar{p} = \frac{p_0 a_0^2 + p_1 a_1^2 + p_2 a_2^2}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2} \quad (1.3.5)$$

が得られる. そこで, 式 (1.3.5) を式 (1.3.2) に代入して \bar{p} を消去すれば,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_0^2 (a_1^2 + a_2^2) & -a_0^2 a_1^2 & -a_0^2 a_2^2 \\ -a_0^2 a_1^2 & a_1^2 (a_0^2 + a_2^2) & -a_1^2 a_2^2 \\ -a_0^2 a_2^2 & -a_1^2 a_2^2 & a_2^2 (a_0^2 + a_1^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

が得られることになる.

本節では, 単位時間あたりの流量 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ を既知と仮定して, u_0 は式 (1.3.4) によって与えられると仮定する. このように, 流速に関連した値を既知と仮定する理由は, 第5章において, Stokes 問題において解の存在が保証されるのは境界全体で流速が与えられた場合であることが示されるためである (定理 5.6.3). ところが, この方程式の係数行列は特異となる. なぜならば, 圧力の基準値をどのようにとっても成り立つ (定数分の不定性がある) ためである. そこで, $p_0 = 0$ とおくことにする. このとき, 設計変数 \mathbf{a} と単位時間あたりの流量 \mathbf{u} が与えられたとき, 圧力 $\mathbf{p} = (p_1, p_2)^\top \in P = \mathbb{R}^2$ は

$$\frac{1}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1^2 (a_0^2 + a_2^2) & -a_1^2 a_2^2 \\ -a_1^2 a_2^2 & a_2^2 (a_0^2 + a_1^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (1.3.7)$$

によって一意に決定されることになる.

そこで, 本節では, $\mathbf{p} = (p_1, p_2)^\top \in P = \mathbb{R}^2$ を状態変数とにおいて, 状態決定問題を次のように定義する.

問題 1.3.1 (1次元分岐 Stokes 流れ場問題) 図 1.3.1 の1次元 Stokes 流れ場に対して, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ と $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ が与えられたとき,

$$\mathbf{A}(\mathbf{a})\mathbf{p} = -\mathbf{u} \quad (1.3.8)$$

を満たす $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ を求めよ. ただし, 式 (1.3.8) は式 (1.3.7) を表すことにする. □

式 (1.3.8) の解は,

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{a})\mathbf{u} = -\begin{pmatrix} \frac{1}{a_0^2} + \frac{1}{a_1^2} & \frac{1}{a_0^2} \\ \frac{1}{a_0^2} & \frac{1}{a_0^2} + \frac{1}{a_2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} \frac{u_1}{a_1^2} + \frac{u_1 + u_2}{a_0^2} \\ \frac{u_2}{a_2^2} + \frac{u_1 + u_2}{a_0^2} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{u_1}{a_1^2} - \frac{u_0}{a_0^2} \\ \frac{u_2}{a_2^2} - \frac{u_0}{a_0^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

となる.

あとで使うために, 問題 1.3.1 に対する Lagrange 関数を

$$\mathcal{L}_S(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{q} \cdot (\mathbf{A}(\mathbf{a})\mathbf{p} + \mathbf{u}) \quad (1.3.10)$$

とおく. ここで, \mathbf{p} は必ずしも問題 1.3.1 の解である必要はないとする. $\mathbf{q} = (q_1, q_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ は Lagrange 乗数として導入された. 問題 1.3.1 は, 任意の $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\mathcal{L}_S(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$$

を満たす \mathbf{p} を求めることと同値である.

1.3.2 最適設計問題

状態決定問題が定義されたので, 設計変数 \mathbf{a} と状態変数 \mathbf{p} を使って評価関数を定義しよう.

目的関数には, 流れに対する抵抗を表すような関数を選びたい. 粘性流れ場の内部で単位時間に粘性によって失われるエネルギーは, エネルギー保存則より, 動力を境界上で積分した値の負値に等しい. そこで,

$$f_0 = -(p_0 u_0 + p_1 u_1 + p_2 u_2) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{u} \quad (1.3.11)$$

を目的関数とおくことにする. ここでは, $p_0 = 0$ が使われた. この f_0 は散逸エネルギーや動力損失などとよばれる値に対応する. しかし, 第8章と第9章では, Stokes 流れ場の流れ抵抗を表す評価関数として, この定義が拡張されたものを, 平均流れ抵抗とよぶことにする. そのときには, もはや散逸エネルギーの意味をもたないためである. そこで, 式 (1.3.11) の f_0 も1次元分岐 Stokes 流れ場における平均流れ抵抗とよぶことにする.

また, f_1 としては, 体積に対する制約関数を

$$f_1(\mathbf{a}) = l(a_0 + a_1 + a_2) - c_1 \quad (1.3.12)$$

とおくことにする. ただし, c_1 を正定数とする.

これらの評価関数を用いて, 1次元分岐 Stokes 流れ場の最適化問題を次のように定義する. ここでは, $X = \mathbb{R}^3$ を設計変数 \mathbf{a} の線形空間とする. また, 定数ベクトル $\mathbf{a}_0 > \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ に対して

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{a} \in X \mid \mathbf{a} \geq \mathbf{a}_0\} \quad (1.3.13)$$

とおく. さらに, $P = \mathbb{R}^2$ をそれぞれ状態変数 \mathbf{p} の線形空間とする.

問題 1.3.2 (平均流れ抵抗最小化問題) $X = \mathbb{R}^3$ および $P = \mathbb{R}^2$ とおく. \mathcal{D} を式 (1.3.13) とする. $f_0(\mathbf{p})$ と $f_1(\mathbf{a})$ をそれぞれ式 (1.3.11) と式 (1.3.12) とする. このとき,

$$\min_{(\mathbf{a}, \mathbf{p}) \in \mathcal{D} \times P} \{f_0(\mathbf{p}) \mid f_1(\mathbf{a}) \leq 0, \text{ 問題 1.3.1}\}$$

を満たす \mathbf{a} を求めよ. □

1.3.3 断面積微分

f_0 の \mathbf{a} の変動 \mathbf{b} に対する微分 $\tilde{f}'_0(\mathbf{a})[\mathbf{b}] = f'_0(\mathbf{p}(\mathbf{a}))[\mathbf{b}] = \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{b}$ を断面積微分とよぶ. \mathbf{g}_0 を断面積勾配という. 随伴変数法を用いて, \mathbf{g}_0 と f_0 の Hesse 行列 \mathbf{H}_0 を求めてみよう.

f_0 に対する Lagrange 関数を

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{q}_0) &= f_0(\mathbf{p}) - \mathcal{L}_S(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{q}_0) \\ &= -\mathbf{p} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{q}_0 \cdot (\mathbf{A}(\mathbf{a})\mathbf{p} + \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

とおく. ここで, $\mathbf{q}_0 \in P$ は f_0 のために用意された状態方程式に対する随伴変数 (Lagrange 乗数) である. $(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{q}_0)$ の任意変動 $(\mathbf{b}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}}_0) \in X \times P \times P$ に対する \mathcal{L}_0 の微分は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_0(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{q}_0)[\mathbf{b}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}}_0] \\ = \mathcal{L}_{0\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{q}_0)[\mathbf{b}] + \mathcal{L}_{0\mathbf{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{q}_0)[\hat{\mathbf{p}}] + \mathcal{L}_{0\mathbf{q}_0}(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{q}_0)[\hat{\mathbf{q}}_0] \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

となる. 式 (1.3.15) の右辺第 3 項は,

$$\mathcal{L}_{0\mathbf{q}_0}(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{q}_0)[\hat{\mathbf{q}}_0] = -\mathcal{L}_S(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \hat{\mathbf{q}}_0) \quad (1.3.16)$$

となり、 \mathbf{p} が状態決定問題の解であれば、この項はゼロとなる。

また、式 (1.3.15) の右辺第2項は、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{0\mathbf{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{q}_0)[\hat{\mathbf{p}}] &= f_{0\mathbf{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{p})[\hat{\mathbf{p}}] - \mathcal{L}_{S\mathbf{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{q}_0)[\hat{\mathbf{p}}] \\ &= -\mathcal{L}_S(\mathbf{a}, \mathbf{q}_0, \hat{\mathbf{p}})\end{aligned}\quad (1.3.17)$$

となり、[自己随伴関係](#)

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{p} \quad (1.3.18)$$

が成り立つとき、この項はゼロとなる。

さらに、式 (1.3.15) の右辺第1項は、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{0\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{q}_0)[\mathbf{b}] &= -\frac{1}{(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2)^2} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 2a_0(a_1^2 p_1 + a_2^2 p_2)(a_1^2 q_{01} + a_2^2 q_{02}) \\ 2a_1\{a_0^2 p_1 + a_2^2(p_1 - p_2)\}\{a_0^2 q_{01} + a_2^2(q_{01} - q_{02})\} \\ 2a_2\{a_0^2 p_2 + a_1^2(p_2 - p_1)\}\{a_0^2 q_{02} + a_1^2(q_{02} - q_{01})\} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= -2 \begin{pmatrix} u_0^2/a_0^3 \\ u_1^2/a_1^3 \\ u_2^2/a_2^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{b}\end{aligned}\quad (1.3.19)$$

となる。ここで、 \mathbf{p} が状態決定問題と解であることと、自己随伴関係が使われた。

一方、 f_1 に対しては

$$f_1'(\mathbf{a})[\mathbf{b}] = l \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{b} \quad (1.3.20)$$

が得られる。

さらに、平均流れ抵抗 $\tilde{f}_0(\mathbf{a}) = f_0(\mathbf{a}, \mathbf{p}(\mathbf{a}))$ の Hesse 行列 \mathbf{H}_0 は次のようにして求められる。1.1.6 項でみてきたように、随伴変数法を用いることにする。設計変数と状態変数 (\mathbf{a}, \mathbf{p}) の任意変動 $(\mathbf{b}_1, \hat{\mathbf{p}}_1) \in X \times P$ と $(\mathbf{b}_2, \hat{\mathbf{p}}_2) \in X \times P$ に対する Lagrange 関数 \mathcal{L}_0 の2階微分は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{0(\mathbf{a}, \mathbf{p}), (\mathbf{a}, \mathbf{p})}(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{q}_0)[(\mathbf{b}_1, \hat{\mathbf{p}}_1), (\mathbf{b}_2, \hat{\mathbf{p}}_2)] &= (\mathcal{L}_{0\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{q}_0)[\mathbf{b}_1] + \mathcal{L}_{0\mathbf{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{q}_0)[\hat{\mathbf{p}}_1])_{\mathbf{a}}[\mathbf{b}_2] \\ &\quad + (\mathcal{L}_{0\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{q}_0)[\mathbf{b}_1] + \mathcal{L}_{0\mathbf{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{q}_0)[\hat{\mathbf{p}}_1])_{\mathbf{u}}[\hat{\mathbf{p}}_2]\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{b}_2 \\ \hat{\mathbf{p}}_2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} \mathcal{L}_{0aa} & \mathcal{L}_{0ap} \\ \mathcal{L}_{0pa} & \mathcal{L}_{0pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \hat{\mathbf{p}}_1 \end{pmatrix} \right) \quad (1.3.21)$$

となる．ここで， $\hat{\mathbf{p}}_1$ と $\hat{\mathbf{p}}_2$ を状態決定問題を満たす変動におきかえる．式 (1.3.8) を $i \in \{1, 2\}$ に対して， a_i で偏微分した

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial a_i} \mathbf{p} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial a_i} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} \quad (1.3.22)$$

より，

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial a_i} = -\mathbf{A}^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial a_i} \mathbf{p} \quad (1.3.23)$$

を計算し，

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{a}^\top} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \partial p_1 / \partial a_0 & \partial p_1 / \partial a_1 & \partial p_1 / \partial a_2 \\ \partial p_2 / \partial a_0 & \partial p_2 / \partial a_1 & \partial p_2 / \partial a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (1.3.24)$$

とおく．さらに，式 (1.3.24) の結果を式 (1.3.21) に代入すれば，

$$\mathcal{L}_{0(\mathbf{a}, \mathbf{p}), (\mathbf{a}, \mathbf{p})}(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{q}_0) [(\mathbf{b}_1, \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{a})[\mathbf{b}_1]), (\mathbf{b}_2, \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{a})[\mathbf{b}_2])] = \mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{H}_0 \mathbf{b}_2) \quad (1.3.25)$$

が得られる．ここで， \mathbf{p} が状態決定問題の解であることと自己随伴関係を用いれば， \tilde{f}_0 の Hesse 行列は

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0 &= \mathcal{L}_{0aa} + \mathcal{L}_{0ap} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{a}^\top} + \left(\mathcal{L}_{0ap} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{a}^\top} \right)^\top \\ &= 6 \begin{pmatrix} u_0^2/a_0^4 & 0 & 0 \\ 0 & u_1^2/a_1^4 & 0 \\ 0 & 0 & u_2^2/a_2^4 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.3.26)$$

となる．この結果は，式 (1.3.19) の \mathbf{g}_0 を \mathbf{a} で偏微分した結果と一致する．この関係は，式 (1.3.19) の \mathbf{g}_0 には状態変数である \mathbf{p} が含まれていなかったために成り立った．このように， \mathbf{H}_0 は正定値行列となる．

さらに， \tilde{f}_0 の Hesse 行列を Lagrange 乗数法を用いて求める場合には，次のようになる． $\tilde{f}_0'(\mathbf{a})[\mathbf{b}_1] = \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{b}_1$ に対する Lagrange 関数を

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{10}(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{r}_0) &= \mathbf{g}_0(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{b}_1 - \mathcal{L}_S(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{r}_0) \\ &= \mathbf{g}_0(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{b}_1 - \mathbf{r}_0 \cdot (\mathbf{A}(\mathbf{a})\mathbf{p} + \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (1.3.27)$$

とおく. ここで, $\mathbf{g}_0(\mathbf{p})$ は式 (1.3.19) の第 2 式に式 (1.3.18) を代入した式で与えられ, \mathcal{L}_S は式 (1.3.10) で定義されている. $\mathbf{r}_0 = (r_{01}, r_{02})^\top \in P = \mathbb{R}^2$ は, $\mathbf{g}_0(\mathbf{p})$ における \mathbf{p} が状態決定問題を満たすために用意された随伴変数である. \mathcal{L}_{10} において \mathbf{b}_1 は定ベクトルとみなす.

$(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{r}_0)$ の任意変動 $(\mathbf{b}_2, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{r}}_0) \in X \times U^2$ に対する \mathcal{L}_{10} の微分は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{10}(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{r}_0)[\mathbf{b}_2, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{r}}_0] \\ = \mathcal{L}_{10\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{r}_0)[\mathbf{b}_2] + \mathcal{L}_{10\mathbf{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{r}_0)[\hat{\mathbf{p}}] + \mathcal{L}_{10\mathbf{r}_0}(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{r}_0)[\hat{\mathbf{r}}_0] \end{aligned} \quad (1.3.28)$$

となる. 式 (1.3.28) の右辺第 3 項は, \mathbf{p} が状態決定問題の解ならばゼロとなる.

式 (1.3.28) の右辺第 2 項は,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{10\mathbf{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{r}_0)[\hat{\mathbf{p}}] &= \mathbf{g}_{0\mathbf{p}^\top}(\mathbf{p})[\hat{\mathbf{p}}] \cdot \mathbf{b}_1 - \mathcal{L}_{S\mathbf{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{r}_0)[\hat{\mathbf{p}}] \\ &= \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{r}_0 \cdot (\mathbf{A}(\mathbf{a})\hat{\mathbf{p}}) = \hat{\mathbf{p}} \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{A}^\top(\mathbf{a})\mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (1.3.29)$$

となる. ただし,

$$\mathbf{w} = \mathbf{g}_{0\mathbf{p}^\top}(\mathbf{p})\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{01}}{\partial p_1} & \frac{\partial g_{02}}{\partial p_1} & \frac{\partial g_{03}}{\partial p_1} \\ \frac{\partial g_{01}}{\partial p_2} & \frac{\partial g_{02}}{\partial p_2} & \frac{\partial g_{03}}{\partial p_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \end{pmatrix} \quad (1.3.30)$$

とおく. ここで, 任意の $\hat{\mathbf{p}} \in P$ に対して式 (1.3.29) がゼロとなる条件は, \mathbf{r}_0 を次の随伴問題の解とおくことと同値である.

問題 1.3.3 ($\mathbf{g}_0(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{b}_1$ に対する \mathbf{r}_0 の随伴問題) $\mathbf{A}(\mathbf{a})$ を問題 1.3.1 のとおりとする. \mathbf{w} を式 (1.3.30) とする. このとき,

$$\mathbf{A}^\top(\mathbf{a})\mathbf{r}_0 = \mathbf{w}$$

を満たす $\mathbf{r}_0 \in P$ を求めよ. □

問題 1.3.3 の解は

$$\mathbf{r}_0 = \left(\mathbf{A}^\top(\mathbf{a})\right)^{-1} \mathbf{g}_{0\mathbf{p}^\top}(\mathbf{p})\mathbf{b}_1 \quad (1.3.31)$$

となる. これ以降, \mathbf{r}_0 は \mathbf{b}_1 の関数であることから, $\mathbf{r}_0(\mathbf{b}_1)$ とかくことにする.

さらに, 式 (1.3.28) の右辺第 1 項は,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{10\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{r}_0)[\mathbf{b}_2] \\ = - \left\{ \mathbf{r}_0 \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{a})}{\partial a_1} \mathbf{p} \quad \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{a})}{\partial a_2} \mathbf{p} \quad \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{a})}{\partial a_3} \mathbf{p} \right) \right\} \mathbf{b}_2 \end{aligned} \quad (1.3.32)$$

となる. ここで, 式 (1.3.31) を式 (1.3.32) に代入すれば,

$$\mathcal{L}_{10\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{r}_0(\mathbf{b}_1))[\mathbf{b}_2] = h_0(\mathbf{a})[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2] = \mathbf{g}_{\text{H0}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1) \cdot \mathbf{b}_2 \quad (1.3.33)$$

が成り立つ. ここで, 平均流れ抵抗の Hesse 勾配 \mathbf{g}_{H0} は

$$\mathbf{g}_{\text{H0}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1) = \mathcal{L}_{10\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{r}_0(\mathbf{b}_1)) \quad (1.3.34)$$

で与えられる.

以上の結果から, 平均流れ抵抗 $f_0(\mathbf{p})$ を設計変数 \mathbf{a} だけの関数にかきかえた $\tilde{f}_0(\mathbf{a})$ は凸関数となることが確認された. したがって, 平均コンプライアンス問題のように, 次に示される KKT 条件を満たす \mathbf{a} は最小点になる.

1.3.4 最適性の条件

ここでも KKT 条件を使って最適性の条件を考えてみよう. 最適化問題 (問題 1.3.2) に対する Lagrange 関数を

$$\mathcal{L}(\mathbf{a}, \lambda_1) = \tilde{f}_0(\mathbf{a}) + \lambda_1 f_1(\mathbf{a})$$

とおく. $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ は $f_1(\mathbf{a}) \leq 0$ に対する Lagrange 乗数である. このとき, 問題 1.3.2 の KKT 条件は

$$\mathcal{L}_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \lambda_1) = \mathbf{g}_0 + \lambda_1 \mathbf{g}_1 = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, \quad (1.3.35)$$

$$\mathcal{L}_{\lambda_1}(\mathbf{a}, \lambda_1) = f_1(\mathbf{a}) \leq 0, \quad (1.3.36)$$

$$\lambda_1 f_1(\mathbf{a}) = 0, \quad (1.3.37)$$

$$\lambda_1 \geq 0 \quad (1.3.38)$$

で与えられる. 式 (1.3.35) は

$$-2 \begin{pmatrix} u_0^2/a_0^3 \\ u_1^2/a_1^3 \\ u_2^2/2_1^3 \end{pmatrix} + \lambda_1 l \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる. そこで, 平均流れ抵抗最小化問題 (問題 1.3.2) に対する最適性の条件は

$$2 \frac{u_0^2}{a_0^3 l} = 2 \frac{u_1^2}{a_1^3 l} = 2 \frac{u_2^2}{a_2^3 l} = \lambda_1 \quad (1.3.39)$$

によって与えられることになる.

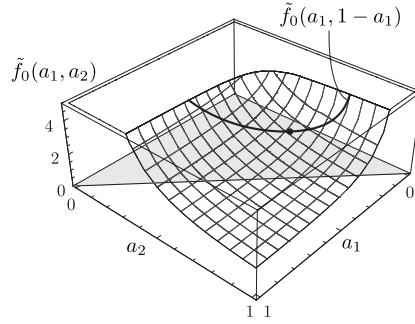


図 1.3.2: 平均流れ抵抗最小化問題の数値例

この最適性の条件は, Murray の法則が成り立つことを示している. 実際, 式 (1.3.1) の $u_{Hi}(r)$ を用いれば, $i \in \{0, 1, 2\}$ に対して, 管壁のせん断ひずみ速度とせん断応力は, それぞれ

$$\gamma_i = \left. \frac{du_{Hi}}{dr} \right|_{r=r_i} = -\frac{\bar{p} - p_i}{2\mu l} r_i = -\frac{u_i}{2\mu a_i^2} r_i, \quad (1.3.40)$$

$$\tau_i = \mu \gamma_i = -\frac{u_i}{2a_i^2} r_i \quad (1.3.41)$$

となる. これらを用いれば, [散逸エネルギー密度](#)について,

$$\frac{1}{2} \tau_i \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{8\mu l}} \frac{u_i^2}{a_i^3 l} = \frac{\sqrt{8\mu l}}{2} \lambda_1 \quad (1.3.42)$$

が成り立つことになる. ただし, 式 (1.3.3) が使われた. 式 (1.3.42) は, 最適な分岐円管では, 散逸エネルギー密度が一致することを示している. この条件はせん断応力が同一ならば, 流量は血管半径の 3 乗に比例することを表している. このことから, Murray の法則と同じ関係が得られたことになる.

1.3.5 数値例

例題を使って最小点を具体的に求めてみよう.

例題 1.3.4 (平均流れ抵抗最小化問題の数値例) 問題 1.3.2 において $a_0 = 1$ とおき, 設計変数には含まないことにする. また, $l = 1$, $c_1 = 2$, $\mathbf{u} = (1/3, 2/3)^\top$, $\mathbf{a}_0 = (0.1, 0.1, 0.1)^\top$ とおく. このとき, \mathbf{a} の最小点を求めよ. \square

解答 f_0 が定義された式 (1.3.11) に状態決定問題の解 \mathbf{p} を与える式 (1.3.9) を代入すれば,

$$\tilde{f}_0(\mathbf{a}) = \frac{1}{9} \left(9 + \frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} \right) \quad (1.3.43)$$

となる. 図 1.3.2 は \tilde{f}_0 を示す. \tilde{f}_0 と f_1 の断面積微分は, 式 (1.3.19) と式 (1.3.20) より,

$$\mathbf{g}_0 = - \begin{pmatrix} 2/9a_1^3 \\ 8/9a_2^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる. ここで, \mathbf{a} が最小点ならば, 式 (1.3.39) より

$$\lambda_1 = \frac{2}{9a_1^3} = \frac{8}{9a_2^3}$$

が成り立つ. \mathbf{a} が式 (1.3.13) で定義された \mathcal{D}° の要素であれば, λ_1 は正となり, 相補性条件より, f_1 に対する不等式制約は等号で成り立つことになる. そこで, $a_2 = 1 - a_1$ を式 (1.3.43) に代入し, a_1 の変動に対する停留条件

$$\frac{d}{da_1} \tilde{f}_0(a_1, 1 - a_1) = \frac{1}{(1 - a_1)^2} - \frac{4}{a_1^2} = 0$$

を満たす a_1 を求めれば,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{5} \left(1 + 2^{4/3} - 2^{2/3} \right), \quad \frac{1}{5} \left\{ 1 - 2^{1/3} (1 - i\sqrt{3}) + 2^{-1/3} (1 + i\sqrt{3}) \right\}, \\ &\quad \frac{1}{5} \left\{ 1 - 2^{1/3} (1 + i\sqrt{3}) + 2^{-1/3} (1 - i\sqrt{3}) \right\} \\ &= 0.386488, \quad 0.106756 + 0.711395i, \quad 0.106756 - 0.711395i \end{aligned}$$

となる. ただし, i は虚数単位である. また, a_2 は $1 - a_1$ によって求められる. このうち $\mathbf{a} \in \mathcal{D}^\circ$ が満たされるのは $\mathbf{a} = (0.386488, 0.613512)^\top$ である. \tilde{f}_0 と f_1 は凸関数であることから, 問題 1.3.2 は凸最適化問題となり, 定理 2.7.9 より, KKT 条件を満たすこの \mathbf{a} はこの問題の最小点である. \square

1.4 第 1 章のまとめ

第 1 章では, 1 次元弾性体と 1 次元 Stokes 流れ場の断面積を設計対象においた最適設計問題を構成して, 最適性の条件を求めるまでをみてきた. 要点は以下のようである.

- (1) 最適設計問題では, システムを決定する設計変数に加えて, システムの状態を記述する状態変数が存在する. 状態変数を決定する状態方程式は等式制約となる. 評価関数は設計変数と状態変数の関数として定義される (1.1.2 項, 1.3.2 項).

(2) 評価関数が状態変数の関数で与えられる場合、設計変数の変動に対する評価関数の微分は、状態決定問題の等式制約を満たすもとで微分を求める必要がある。その微分を求める方法には、微分の連鎖則を用いた直接微分法 (1.1.5 項, 1.2.1 項) と Lagrange 乗数法による随伴変数法 (1.1.6 項, 1.2.2 項) が考えられる。

- 直接微分法は多制約問題に有利である (注意 1.2.3).
- 随伴変数法は多設計変数問題に有利である (注意 1.2.5).

本書では第5章以降で、状態方程式に偏微分方程式の境界値問題を仮定し、状態変数は $d \in \{2, 3\}$ 次元空間の領域上で定義された関数 (無限次元空間の要素) になる。ここでは、随伴変数法が必須となる。

(3) 1次元弾性体の断面積を設計変数においた平均コンプライアンス最小化問題 (問題 1.1.4) では、最適性の条件として、ひずみエネルギー密度が一様となる条件 (式 (1.1.56)) が得られた (1.1.7 項)。

(4) 分岐する1次元 Stokes 流れ場において断面積を設計変数においた平均流れ抵抗最小化問題 (問題 1.3.2) では、最適性の条件として、式 (1.3.42) のような散逸エネルギー密度が一様となる条件 (式 (1.3.42)) が得られた (1.3.4 項)。

最適設計問題に関する文献はたくさん存在するが、そのうちのいくつかをあげると、[1-4, 8] である。

1.5 第1章の演習問題

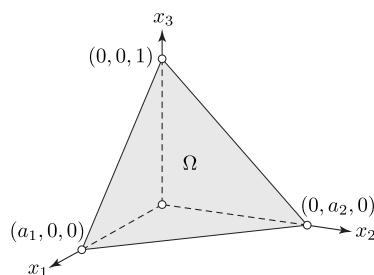
1.1 問題 1.1.4 の f_0 を u_2^2 に変更した

$$\min_{(\mathbf{a}, \mathbf{u}) \in \mathcal{D} \times U} \{ f_0(\mathbf{u}) = u_2^2 \mid f_1(\mathbf{a}) \leq 0, \text{問題 1.1.3} \}$$

を満たす \mathbf{a} を求める問題を考える。このとき、 f_0 に対する随伴変数を $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^2$ とおき、随伴方程式を示せ。また、 \mathbf{g}_0 を \mathbf{u} と \mathbf{v}_0 で示せ。

1.2 1.1.6 項では、問題 1.1.4 における f_0 の断面積勾配 \mathbf{g}_0 を Lagrange 関数の \mathbf{u} と \mathbf{v}_0 の任意変動に対する停留条件を用いて求めた。その際、自己随伴関係が使われた。このように、自己随伴関係が成り立つ場合には、Lagrange 関数を使わずに、断面積勾配 \mathbf{g}_0 を求めることができる。平均コンプライアンス f_0 の代わりに、ポテンシャルエネルギー

$$\pi(\mathbf{a}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{K}(\mathbf{a}) \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \mathbf{p}$$

図 1.5.1: 4 面体 Ω

を用いて,

$$\max_{\mathbf{a} \in \mathcal{D}} \min_{\mathbf{u} \in U} \pi(\mathbf{a}, \mathbf{u})$$

を満たす (\mathbf{a}, \mathbf{u}) を求める問題を考える. このとき, $\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2} \pi$ を満たす \mathbf{u} を用いたときの $-\pi$ の断面積勾配が式 (1.1.36) における \mathbf{g}_0 の $1/2$ と一致することを示せ. なお, この問題における π はポテンシャルエネルギーである. この問題により, 平均コンプライアンスの最小化はポテンシャルエネルギーの最大化と同値であることがわかる.

- 1.3 演習問題 1.1 において $l = 1$, $e_Y = 1$, $c_1 = 1$ および $\mathbf{p} = (1, 1)^\top$ において, \mathbf{a} の最小点を求めよ.
- 1.4 問題 1.1.4 の状態決定問題において $\mathbf{p} = (1, -1)^\top$ とおいたとき, 断面積が a_1 の 1 次元線形弾性体の応力はゼロとなる. そこで, 最適解では体積制約に加えて断面積 a_1 に対する側面制約が有効となる. このときの最適解は $(a_1, a_2) = (a_{01}, (c_1/l) - a_{01})$ となる. このときの KKT 条件を示せ. また, そのときの Lagrange 乗数を求めよ. ただし, \mathbf{g}_0 と \mathbf{g}_1 はそれぞれ式 (1.1.28) と式 (1.1.17) で与えられているものとする.
- 1.5 問題 1.1.4 の状態決定問題において, 設計変数 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ が正方形断面の 1 辺の長さであると仮定されたとき, \mathbf{a} の変動に対する f_0 の勾配 \mathbf{g}_0 と Hesse 行列 \mathbf{H}_0 を求めよ.
- 1.6 図 1.5.1 のような 4 面体 Ω を考える. 設計変数を底面の辺の長さ $\mathbf{a} = (a_1, a_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ として, 評価関数 f を Ω の体積とおいたとき, \mathbf{a} の変動に対する f の勾配 \mathbf{g} と Hesse 行列 \mathbf{H} を求めよ.
- 1.7 式 (1.2.1) の $\mathbf{K}(\mathbf{a})$ を具体的に示せ.

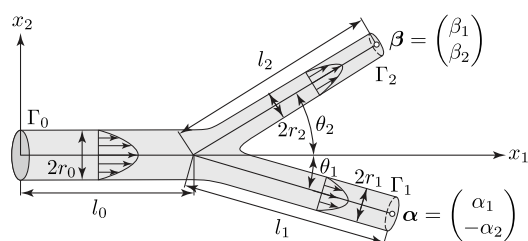


図 1.5.2: 分岐する 1 次元 Stokes 流れ場の分岐角

- 1.8 問題 1.3.2 の f_0 に対しても自己随伴関係が成り立った．そのため，演習問題 1.2 と同様に，Lagrange 関数を使わずに，断面積勾配 \mathbf{g}_0 を求めることができる． f_0 に対して，ここでは，形式的に，

$$\min_{\mathbf{a} \in \mathcal{D}} \max_{\mathbf{p} \in P} \pi(\mathbf{a}, \mathbf{p})$$

を満たす (\mathbf{a}, \mathbf{p}) を求める問題を考える．ただし，散逸系のポテンシャルエネルギーを

$$\pi(\mathbf{a}, \mathbf{p}) = -\frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{A}(\mathbf{a}) \mathbf{p}) - \mathbf{u} \cdot \mathbf{p}$$

とおく．このとき， $\max_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2} \pi$ を満たす \mathbf{p} を用いたときの π の断面積勾配が式 (1.3.19) における \mathbf{g}_0 の 1/2 と一致することを示せ．この問題により，平均流れ抵抗の最小化は，形式的にこの散逸系のポテンシャルエネルギーを π とおいたときの π の最小化と同値であることがわかる．

- 1.9 図 1.5.2 のような分岐する 1 次元 Stokes 流れ場を考える．流入境界 Γ_0 の中心を原点とする．4 つの正定数 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ に対して $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, -\alpha_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ と $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ を流出境界 Γ_1 と Γ_2 の中心位置の座標とする． $\mathbf{r} = (r_0, r_1, r_2)^\top \in \mathbb{R}^3$ を円管の半径とする． \mathbf{r} と $\boldsymbol{\alpha}$ および $\boldsymbol{\beta}$ が既知と仮定されたとき，三つの円管の体積の和が最小であるならば，分岐角 θ_1 と θ_2 を用いて

$$r_0^2 = r_1^2 \cos \theta_1 + r_2^2 \cos \theta_2$$

が成り立つことを示せ．

参考文献

- [1] J. S. Arora. *Introduction to Optimum Design*. McGraw-Hill, New York; Tokyo, 1989.
- [2] K. K. Choi and N. H. Kim. *Structural Sensitivity Analysis and Optimization, 1 & 2*. Springer, New York, 2005.
- [3] R. T. Haftka and Z. Gurdal. *Elements of Structural Optimization. 3rd Rev. and Expanded Ed.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992.
- [4] E. J. Haug, K. K. Choi, and V. Komkov. *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*. Academic Press, Orlando, 1986.
- [5] C. D. Murray. The physiological principle of minimum work applied to the angle of branching of arteries. *The Journal of General Physiology*, 9:835–841, 1926.
- [6] C. D. Murray. The physiological principle of minimum work. I. the vascular system and the cost of blood volume. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 12:207–214, 1926.
- [7] 鷺津 久一郎. エネルギー原理入門. 培風館, 東京, 1980.
- [8] 山川 宏 (編集委員長). 最適設計ハンドブック: 基礎・戦略・応用. 朝倉書店, 東京, 2003.

索引

- Euclid 空間 (Euclidean space), 1
- Hamilton 関数 (Hamilton function), 3
- Hesse 行列 (Hesse matrix), 10
- Hesse 勾配 (Hesse-gradient), 19, 34
- Hooke 則 (Hooke's law), 5
- KKT 条件 (KKT conditions), 20, 34
- Lagrange 関数 (Lagrange function), 19
状態決定問題に対する — (Lagrange function for state determination problem), 7
評価関数に対する — (Lagrange function for cost function), 14
- Lagrange 乗数 (Lagrange multiplier), 7, 14, 20, 30
- Lagrange 乗数法 (Lagrange multiplier method), 14
- Young 率 (Young's modulus), 6
- 応力 (stress), 6
- 外力仕事 (external work), 8
- 仮想仕事の原理 (principle of virtual work), 7
設計変数の — (admissible set of design variable), 8
- 構成則 (constitutive law), 5
- 構成方程式 (constitutive equation), 5
- 最適性の条件 (optimality condition), 2, 19
- 散逸エネルギー (dissipation energy), 29
- 散逸エネルギー密度 (dissipation energy density), 35
- 自己随伴関係 (self-adjoint relation), 15, 31
- 状態決定問題 (state determination problem), 2
- 状態変数 (state variable), 2, 8, 30
- 状態方程式 (state equation), 2
- 随伴変数 (adjoint variable), 7, 14, 30
- 随伴変数法 (adjoint variable method), 14, 25
- 随伴問題 (adjoint problem), 14, 25
- 正定値 (positive definite), 11
- 制約関数 (constraint function), 2, 8
- 設計変数 (design variable), 2, 8, 30
状態変数の — (linear space of state variable), 8
設計変数の — (linear space of design variable), 8
- 相補性条件 (complementarity condition), 20
- 側面制約 (side constraint), 9
- 縦弾性係数 (longitudinal elastic modulus), 6

- 断面積勾配 (cross sectional area gradient), 10, 30
- 断面積微分 (cross-sectional-area-derivative), 9, 30
- 2階 — (second cross-sectional-area-derivative), 10
- 直接微分法 (direct derivative method), 11, 23
- 動力損失 (power loss), 29
- ひずみ (strain), 5
- ひずみエネルギー密度 (strain energy density), 6, 20
- 微分の連鎖則 (chain rule of differentiation), 11
- 評価関数 (cost function), 2, 8, 29
- 平均コンプライアンス (mean compliance), 8
- 平均流れ抵抗 (mean flow resistance), 29
- ポテンシャルエネルギー (potential energy), 3, 6
- 外部 — (external potential energy), 3
- 弾性 — (elastic potential energy), 3
- 内部 — (internal potential energy), 3
- 無効 (inactive), 20
- 目的関数 (object function), 2, 8
- 有効 (active), 20