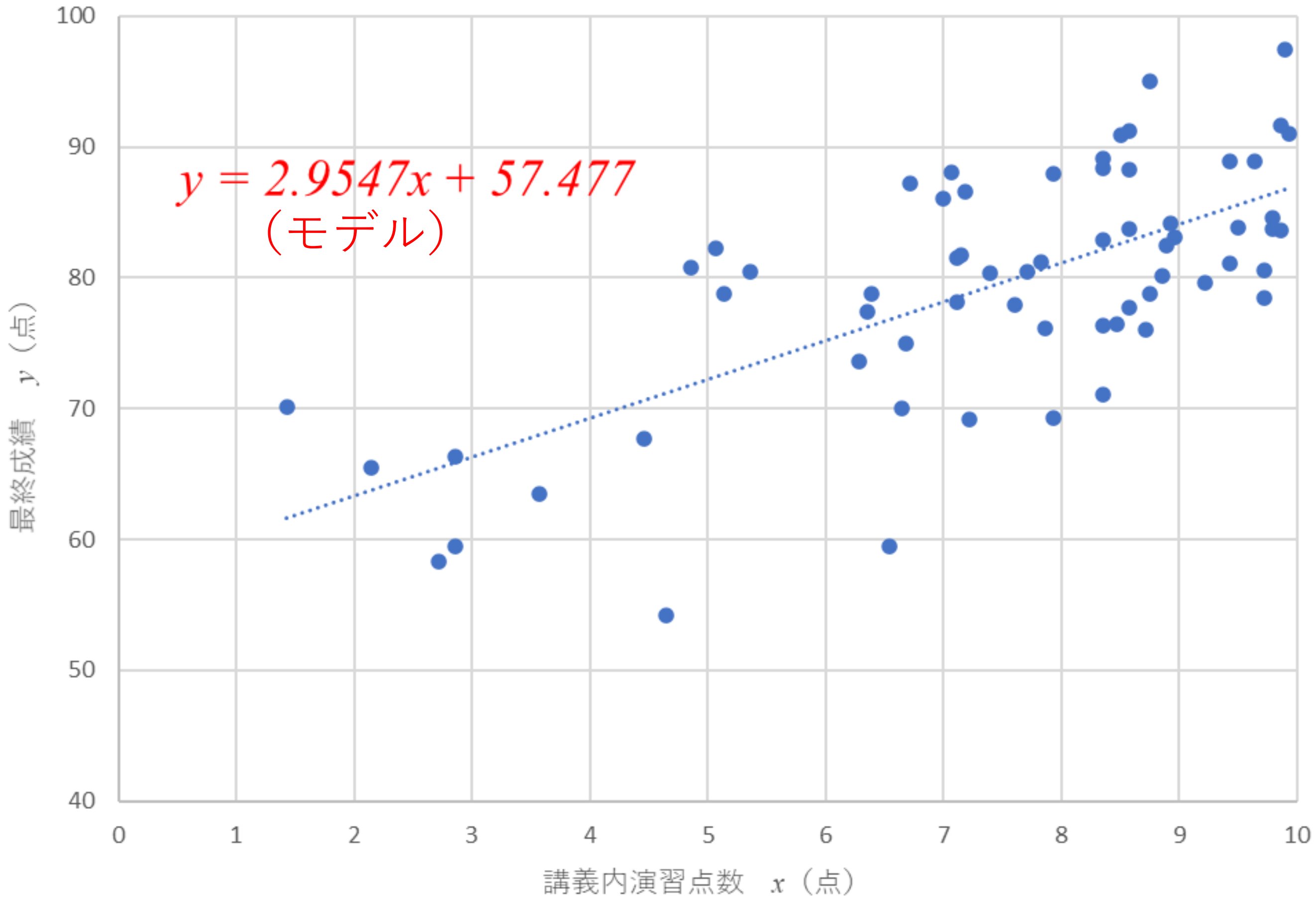
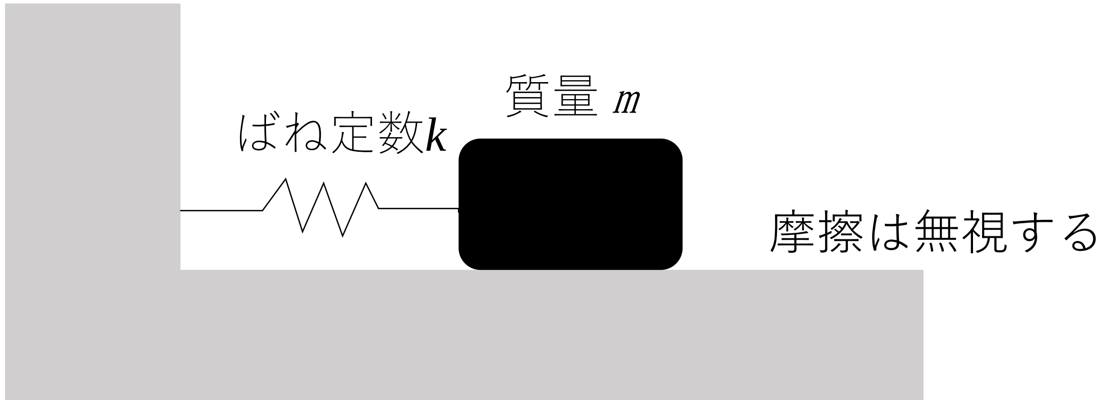
自分の最終成績を予測できる？



物理モデルの例

この実験で振動の周期を知りたい



フックの法則を運動方程式に代入

$$F = ma = -kx$$

（モデル）

単振動の加速度は角振動数ωを使って

$$a = -\omega^2 x$$

上の2式より

$$\omega = \sqrt{k / m}$$

周期*T*は

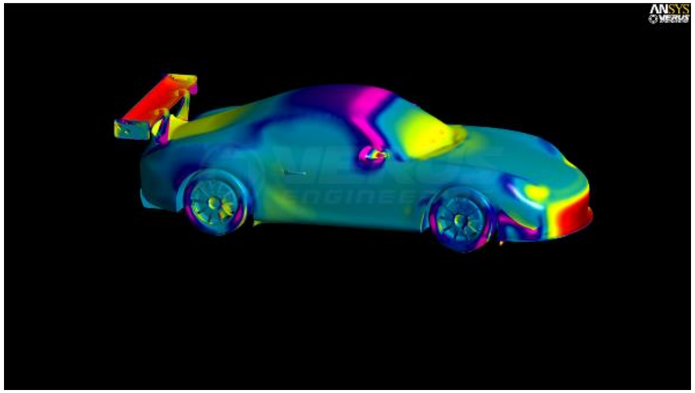
$$T = 2\pi\sqrt{m / k}$$

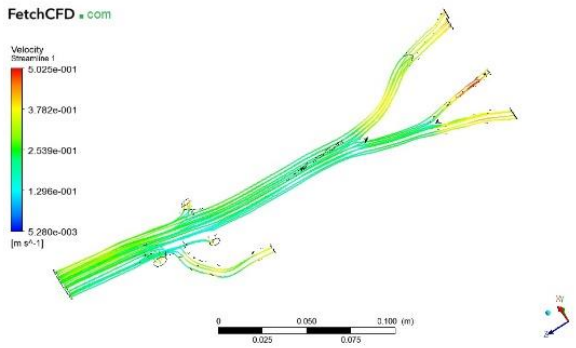
わざわざ実験せずとも、周期 を計算（予測）することができる（コストと時間の節約）

数値流体力学モデル

数値流体力学 (Computational Fluid Dynamics)

気体や液体の圧力がどこにどのようにかかるのか、流速はどれくらいなのか予測したい。





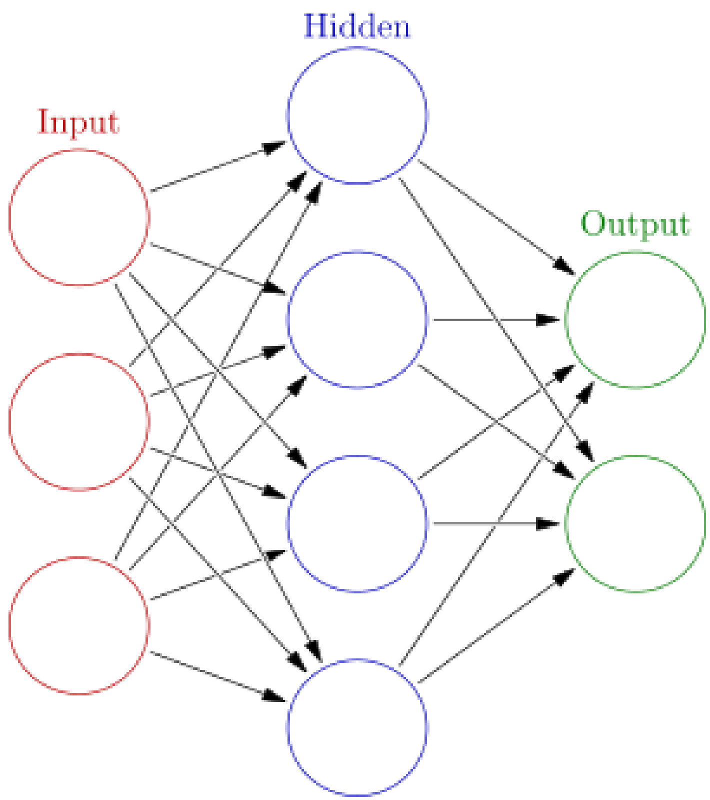
シミュレーション：

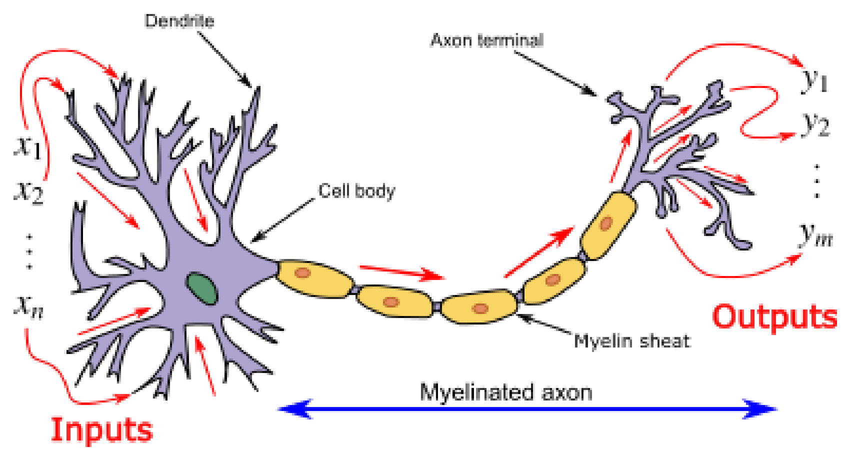
数式で表されたモデルをコンピュータで解いて解を求めること

数式が複雑（解けない微分方程式など）なため、コンピュータで解かなければならないことが多い。

https://en.wikipedia.org/wiki/Computational_fluid_dynamics

ニューラルネットワークモデル





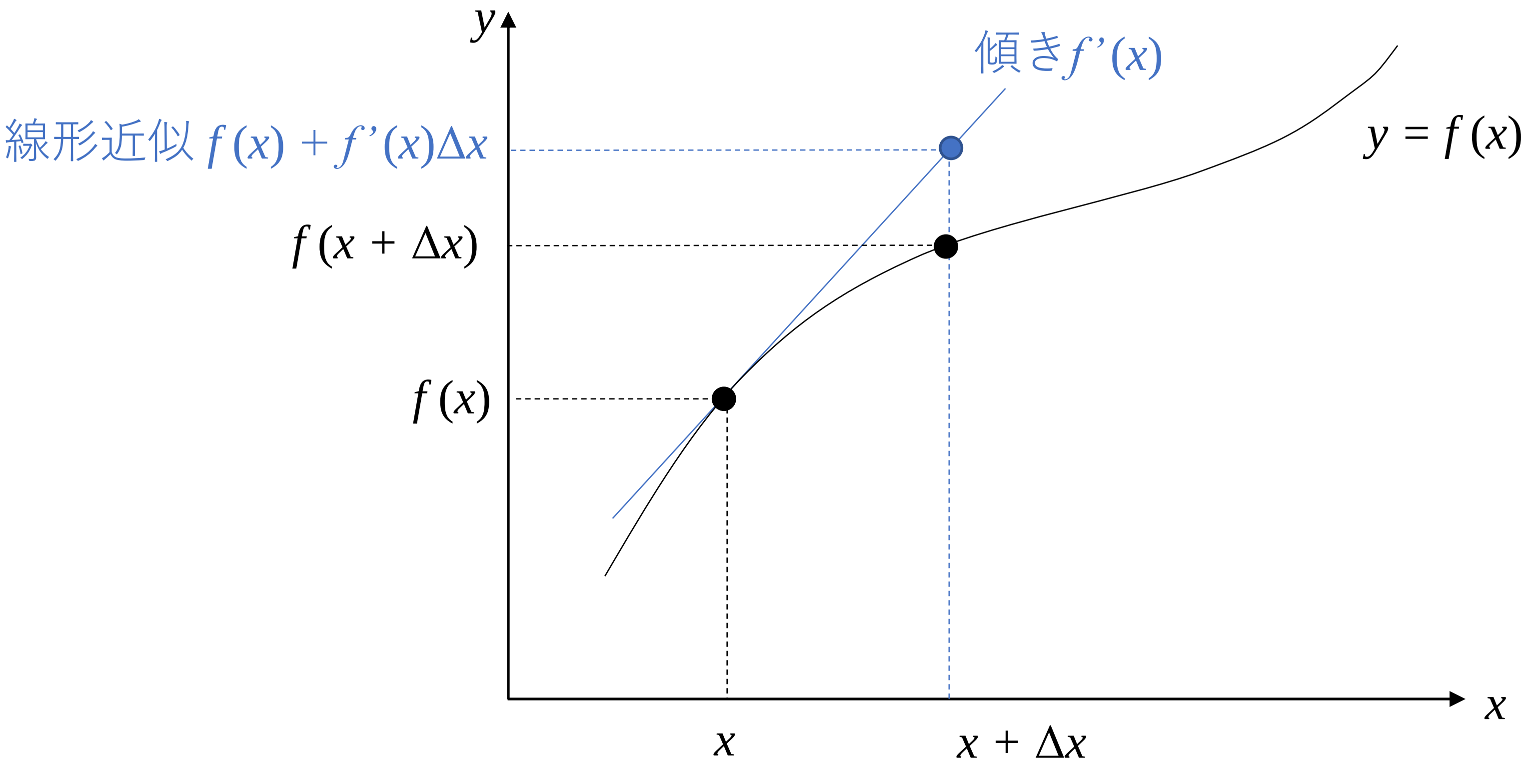
https://en.wikipedia.org/wiki/Artificial_neural_network

準備１：テイラー展開と線形近似

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2!} f''(x)\Delta x^2 + \frac{1}{3!} f'''(x)\Delta x^3 + \ldots$$

Δxが十分小さいとき、Δx^2、Δx^3…はさらに小さい数になるので無視できる
（例：0.1)　　　　　（0.01)（0.001)

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$　線形近似 と呼ぶ



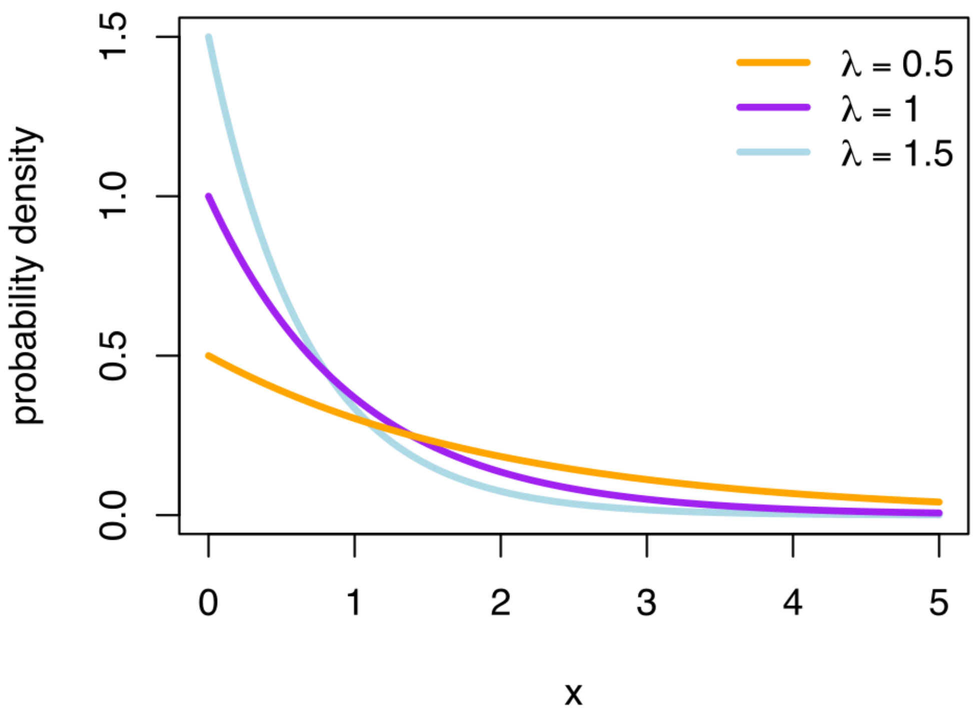
準備２：指数分布で表される確率（復習）

確率密度関数

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$$ $x>0$ でのみ定義される

確率分布関数

$$F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x}\lambda e^{-\lambda x}dx=\int_{0}^{x}\lambda e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda x}$$



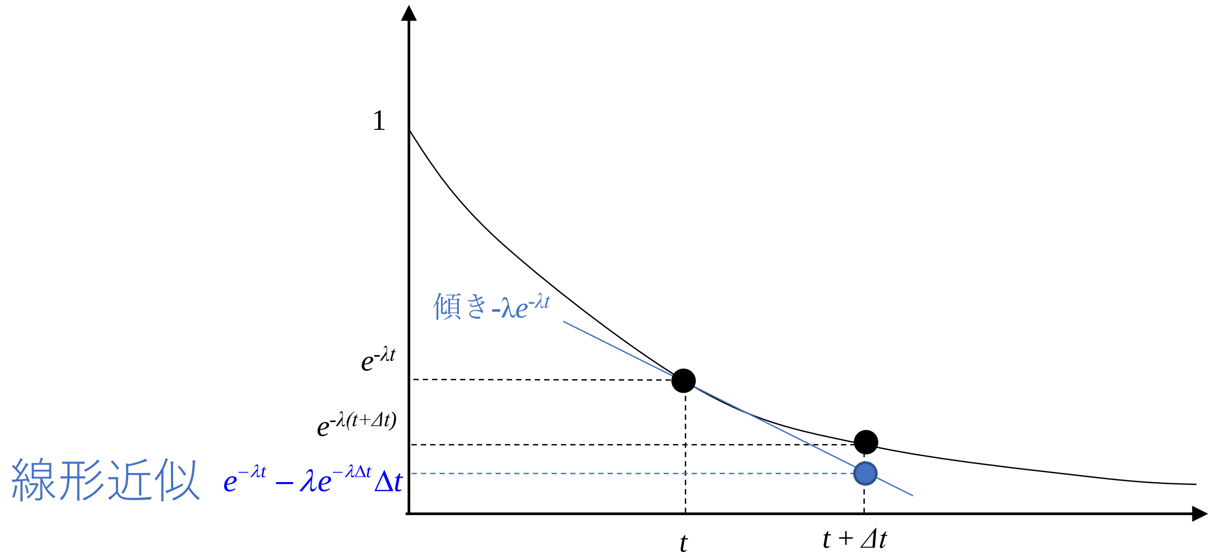
https://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_distribution

指数関数の線形近似

$$f(t) = e^{-\lambda t}$$

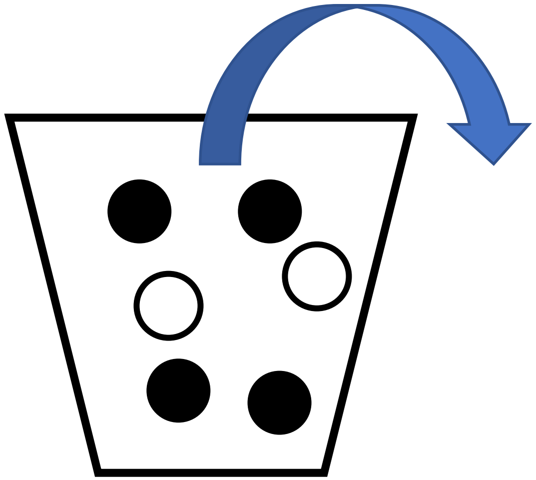
$$e^{-\lambda(t+\Delta t)} = e^{-\lambda t} + \underbrace{\left(e^{-\lambda t}\right)'}_{-\lambda e^{-\lambda t}}\Delta t + \frac{1}{2!}\left(e^{-\lambda t}\right)''\Delta t^2 + \frac{1}{3!}\left(e^{-\lambda t}\right)'''\Delta t^3 + \ldots$$

$$\approx e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t}\Delta t$$



準備３：条件付き確率(Conditional probability)

1回目



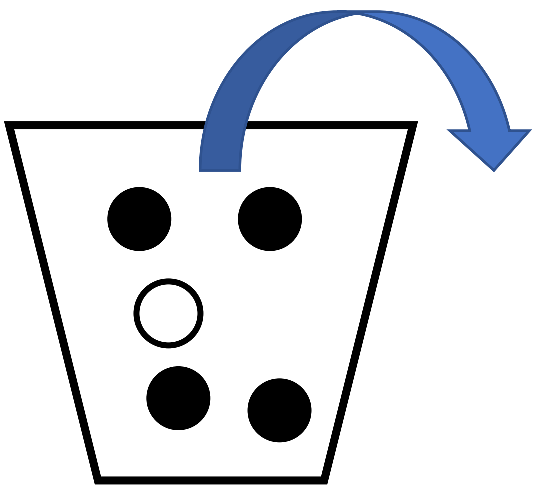
白が出るときを$X = 1$, 黒が出る時を $X = 0$とする

白が出る確率

$$P\{X_1 = 1\} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

取り出した球は戻さない。

2 回目



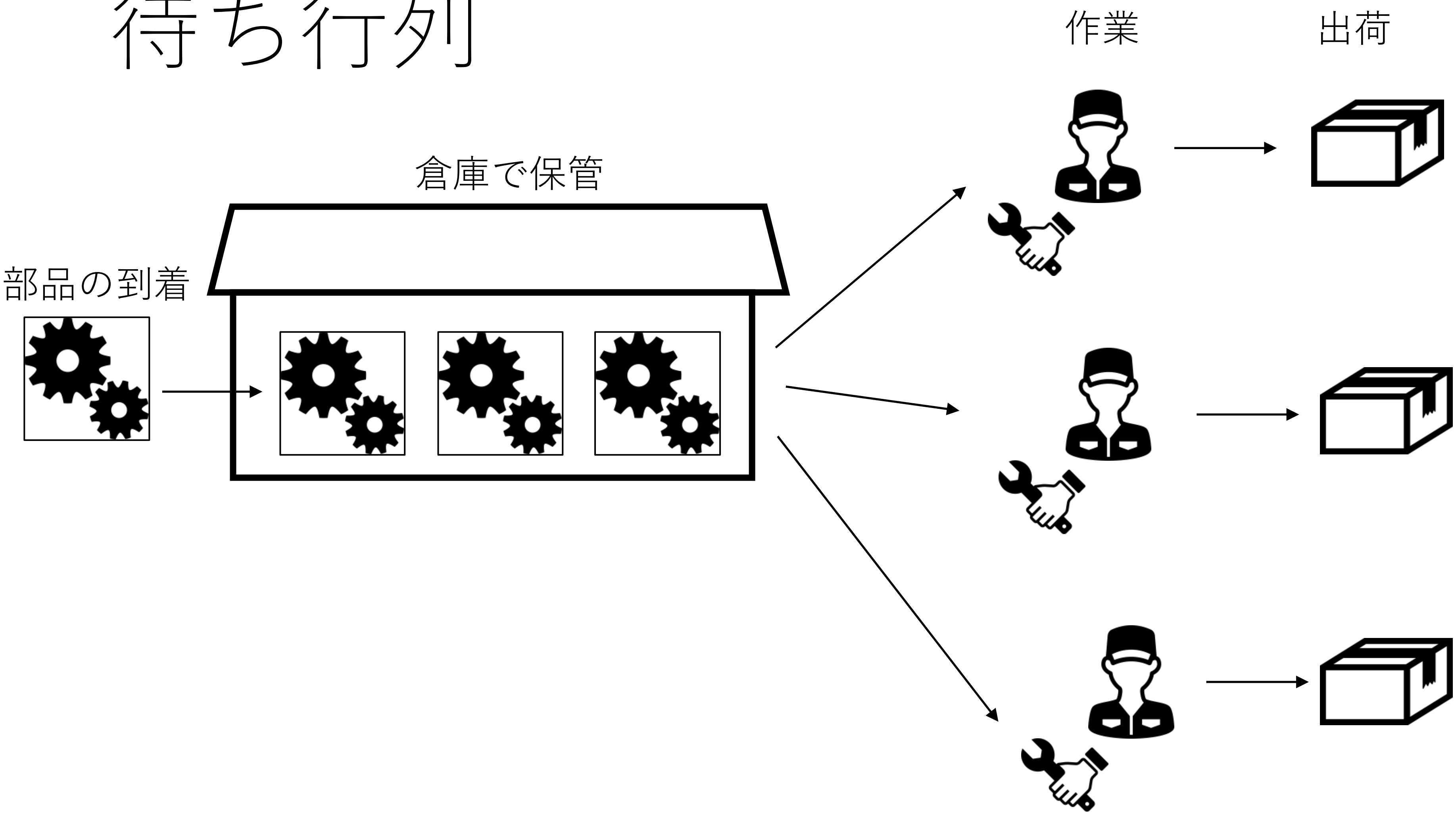
1回目に白、2回目も白の確率（同時確率）

$$P\{X_1 = 1, X_2 = 1\} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

1回目に白が出た前提のもと、2回目に白が出る確率（条件付き確率）

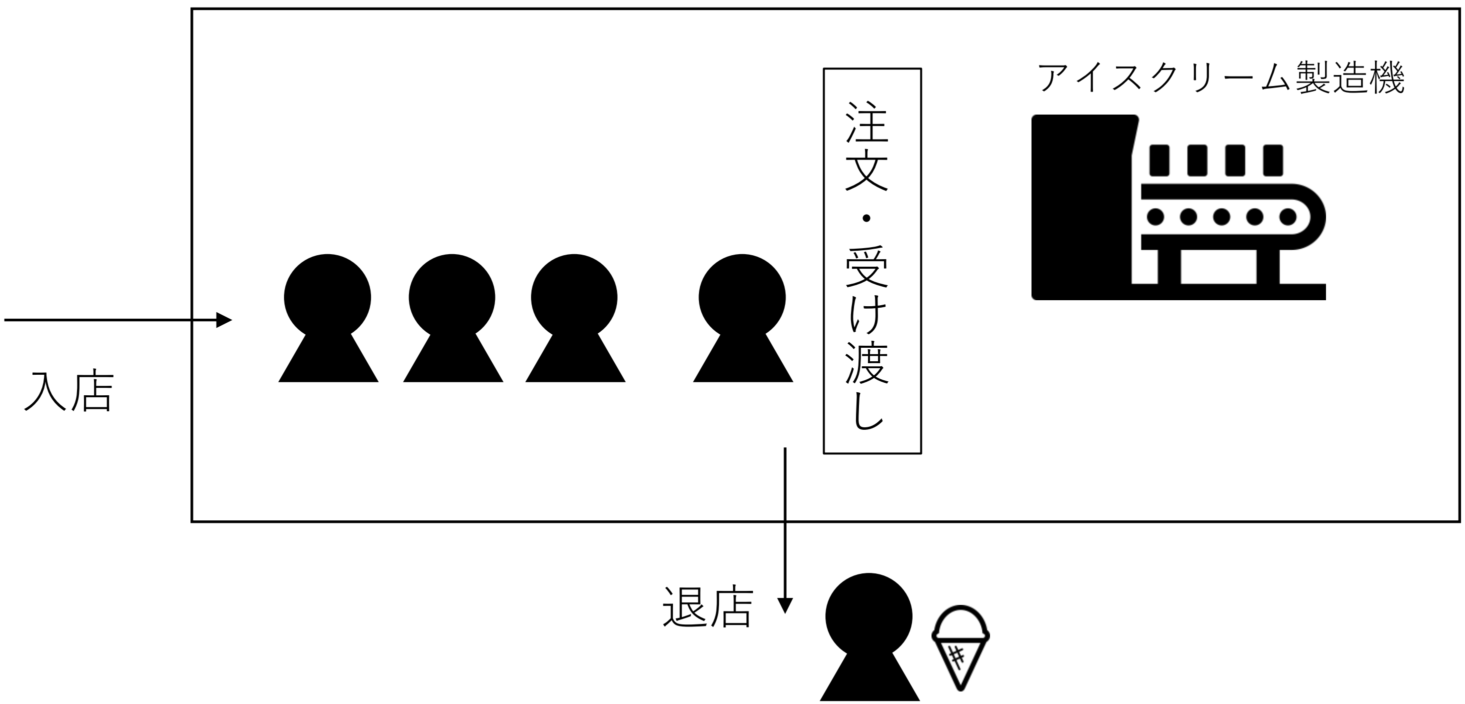
$$P\{X_2 = 1 | X_1 = 1\} = \frac{1}{5}$$

待ち行列

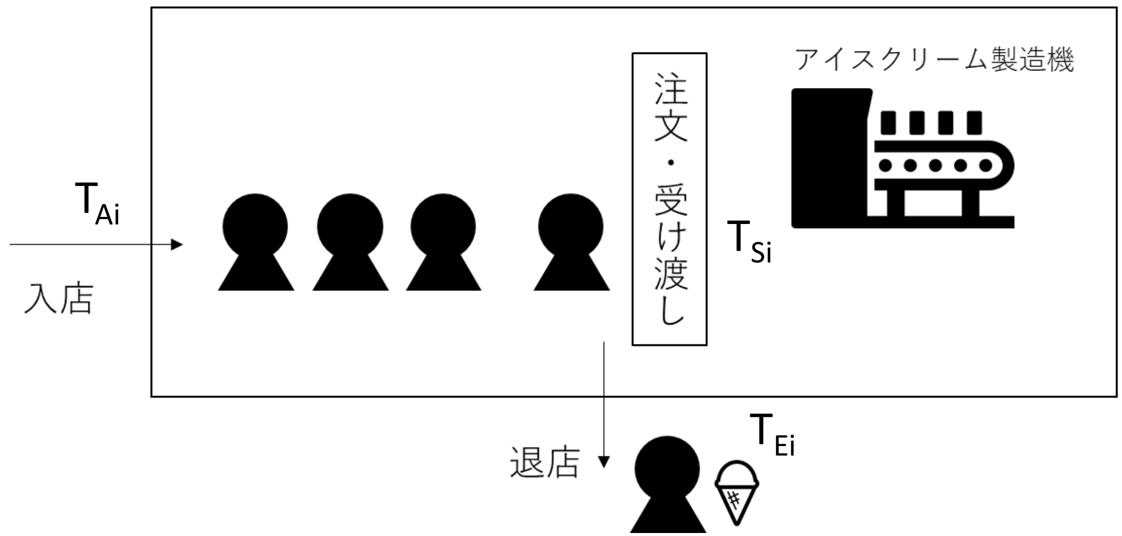


- 部品の到着タイミングがばらついている場合、倉庫にどれくらい余裕が必要？
- 作業員を増やしたり、速く作業させれば倉庫のスペースはどれくらい減る？

待ち行列の例：アイスクリーム屋の経営



単純化する：モデル化の第一歩

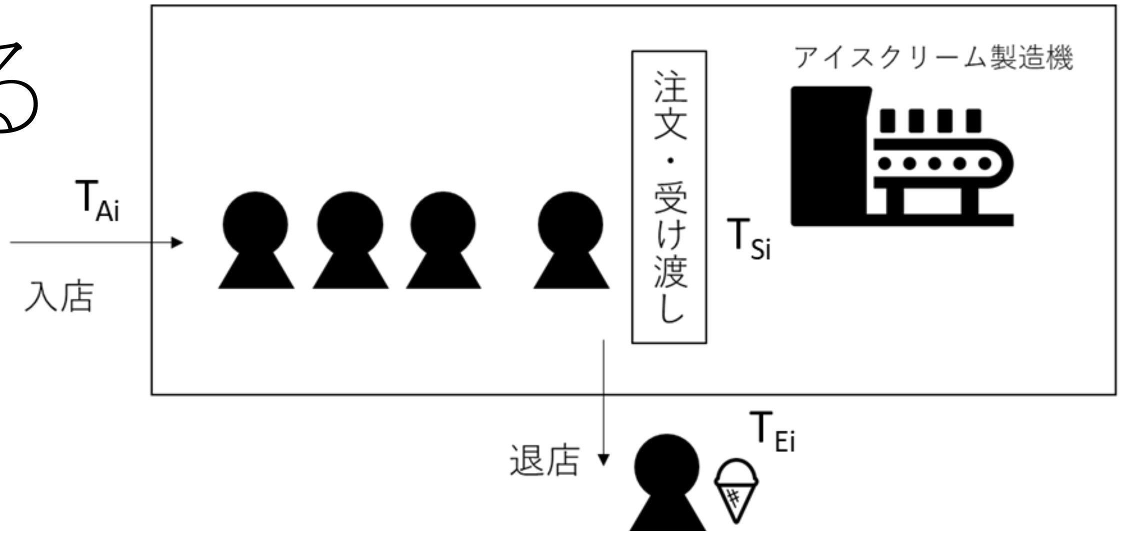


あるお客さんi さんに注目。この人が

1. 到着し、店内に並ぶ　時刻 T_{Ai} min
2. カウンターに客が到着して注文し、機械が製造開始する　時刻 T_{Si} min
3. アイスクリームを受け取り、退店する　時刻 T_{Ei} min

簡単のため、以下の仮定を置く
- 客1人あたり1個のアイスクリームを注文する
- 客のアイスクリームの製造が終わるまで、次の客の注文を受けられない
- アイスクリーム製造が終わって退店するまでの時間は無視できる

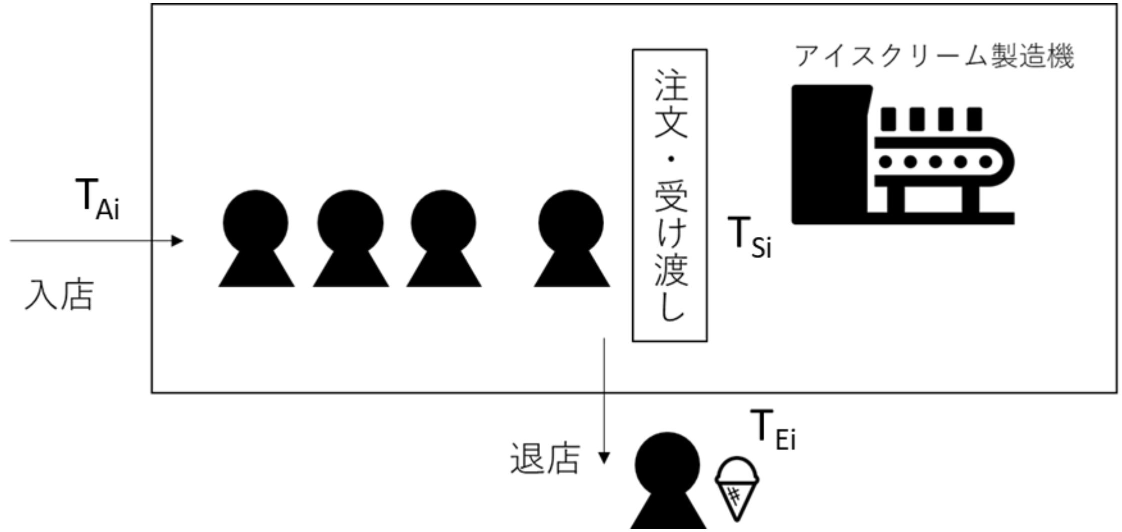
データを得る



客番号i	到着時刻T_{Ai} (min)	製造開始時刻 T_{si}(min)	製造完了時刻 T_{Ei} (min)
1	0	0	5
2	2	5	9
3	7	9	11
…	…	…	…

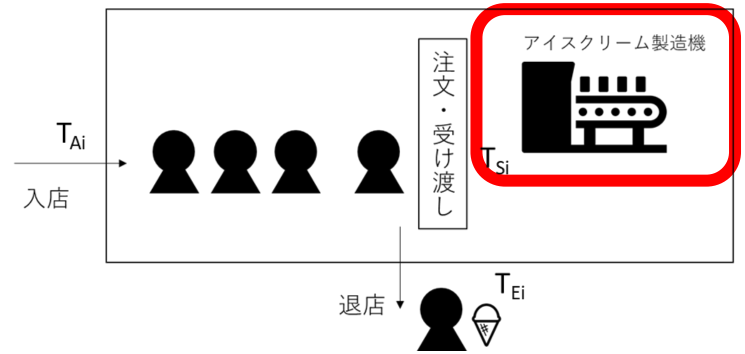
お客さんの入店タイミング、アイスクリームの製造にかかる時間にばらつきがある

データを解析する



				$= T_{Ei} - T_{Si}$	$= T_{Si} - T_{Ai}$	$= T_{Ei} - T_{Ai}$	$= T_{Ai} - T_{A(i-1)}$
客番号i	到着時刻 T_{Ai} (min)	製造開始時刻 T_{si}(min)	製造完了時刻 T_{Ei} (min)	製造時間 T_{pi} (min)	行列待ち時間 T_{wi} (min)	店内滞在時間 T_{Fi} (min)	客到着間隔 T_{Bi}(min)
1	0	0	5	5	0	5	-
2	2	5	9	4	3	7	2
3	7	9	11	2	2	4	5
…	…	…	…	…	…	…	…

アイスクリーム製造機の性能は？



素材番号 i	到着時刻 T_{Ai} (min)	製造開始時刻 T_{si}(min)	製造完了時刻 T_{Ei} (min)	製造時間 T_{pi} (min)	行列待ち時間 T_{wi} (min)	店内滞在時間 T_{Fi} (min)	客到着間隔 T_{Bi}(min)
1	0	0	5	5	0	5	-
2	2	5	9	4	3	7	2
3	7	9	11	2	2	4	5
…	…	…	…	…	…	.T	…

客n人分のアイスクリームを製造する総製造時間 T_{Pt} は

$$T_{Pt} = \sum_{i=1}^{n} T_{Pi} \qquad \text{(min)}$$

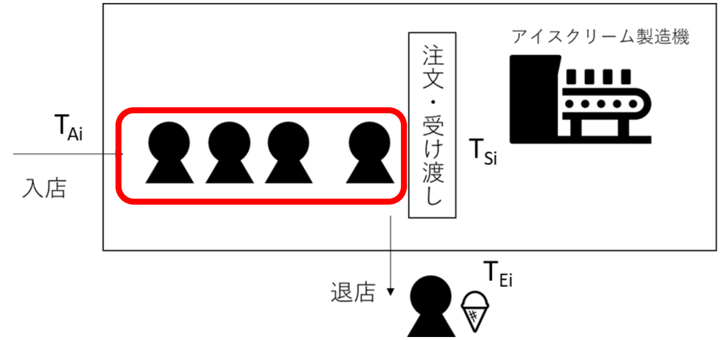
客１人あたりアイスクリームを製造する平均製造時間 $\bar{T}_P$ は

$$\bar{T}_P = \frac{T_{Pt}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_{Pi} \quad \text{(min)}$$

アイスクリーム製造機の製造能力M_cを以下のように定義

$$M_c = 1/\bar{T}_p$$ (1/min)、あるいは（個/min）

1）客一人当たりの待ち時間は？
2）平均何人が並んでいるか？



素材番号 i	到着時刻 T_{Ai} (min)	製造開始時刻 T_{si}(min)	製造完了時刻 T_{Ei} (min)		製造時間 T_{pi} (min)	行列待ち時間 T_{wi} (min)	店内滞在時間 T_{Fi} (min)	客到着間隔 T_{Bi}(min)
1	0	0	5		5	0	5	-
2	2	5	9		4	3	7	2
3	7	9	11		2	2	4	5
…	…	…	…		…	…	…	…

客n人分の延べ待ち時間T_{wT} $$T_{WT} = \sum_{i=1}^{n} T_{Wi} \quad \text{(min)}$$

時刻 t = 0 から t = T_{En}(min)までの平均滞在客数L_qは

$$L_q = T_{WT} / T_{En} \quad (人)$$

客1人あたりの待ち時間 $\bar{T}_W$ は

$$\bar{T}_W = T_{WT} / n \quad \text{(min)}$$

確率を使ったモデリング

素材番号 i	到着時刻 T_{Ai} (min)	製造開始時刻 T_{si}(min)	製造完了時刻 T_{Ei} (min)	製造時間 T_{pi} (min)	行列待ち時間 T_{wi} (min)	店内滞在時間 T_{Fi} (min)	客到着間隔 T_{Bi}(min)
1	0	0	5	5	0	5	-
2	2	5	9	4	3	7	2
3	7	9	11	2	2	4	5
…	…	…	…	…	…	…	…

客到着間隔 T_{bi} が時間 t (min)以下である確率は指数分布に従うとする

$$P(T_{Bi} \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

製造時間 T_{pi} が時間 t (min)以下である確率も指数分布に従うとする

$$P(T_{Pi} \leq t) = 1 - e^{-\mu t}$$

モデル式の導出

仮定：$P(T_{Bi} \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$　　(*)

素材番号 i	到着時刻 T_{Ai} (min)	製造開始時刻 T_{si}(min)	製造完了時刻 T_{Ei} (min)		製造時間 T_{pi} (min)	行列待ち時間 T_{wi} (min)	店内滞在時間 T_{Fi} (min)	客到着間隔 T_{Bi}(min)
1	0	0	5		5	0	5	-
2	2	5	9		4	3	7	2
3	7	9	11		2	2	4	5
…	…	…	…		…	…	…	…

客iの到着間隔が t から t + Δt である確率を、条件付き確率を使って表すと、

$$P(t < T_{Bi} \le t+\Delta t) = P(T_{Bi} \le t+\Delta t \mid T_{Bi} > t)P(T_{Bi} > t) \qquad (**)$$

変形して

$$P(T_{Bi} \le t+\Delta t \mid T_{Bi} > t) = \frac{P(t < T_{Bi} \le t+\Delta t)}{P(T_{Bi} > t)} = \frac{P(t < T_{Bi} \le t+\Delta t)}{1 - P(T_{Bi} \le t)} \qquad (***)$$

また、(**)の左辺は以下のように表すことも出来る

$$P(t < T_{Bi} \le t+\Delta t) = \underbrace{P(T_{Bi} \le t+\Delta t)}_{=1-e^{-\lambda(t+\Delta t)}} - \underbrace{P(T_{Bi} \le t)}_{=1-e^{-\lambda t}}$$

$$= \left(1 - e^{-\lambda(t+\Delta t)}\right) - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t} - \underbrace{e^{-\lambda(t+\Delta t)}}_{\approx e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t}\Delta t} \approx \lambda e^{-\lambda t}\Delta t \qquad (****)$$

(***)に(*)と(****)を代入

$$P(T_{Bi} \le t+\Delta t \mid T_{Bi} > t) = \frac{\overbrace{P(t < T_{Bi} \le t+\Delta t)}^{=\lambda e^{-\lambda t}\Delta t \ (****)}}{1 - \underbrace{P(T_{Bi} \le t)}_{=1-e^{-\lambda t} \ (*)}} \approx \frac{\lambda e^{-\lambda t}\Delta t}{1-(1-e^{-\lambda t})} = \lambda \Delta t$$

モデル式の導出

素材番号 i	到着時刻 T_{Ai} (min)	製造開始時刻 T_{si}(min)	製造完了時刻 T_{Ei} (min)	製造時間 T_{pi} (min)	行列待ち時間 T_{wi} (min)	店内滞在時間 T_{Fi} (min)	客到着間隔 T_{Bi}(min)
1	0	0	5	5	0	5	-
2	2	5	9	4	3	7	2
3	7	9	11	2	2	4	5
…	…	…	…	…	…	…	…

導いた式は条件つき確率

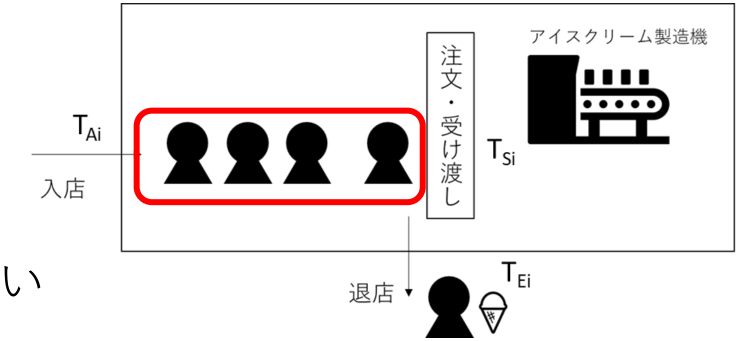
$$P(T_{Bi} \leq t+\Delta t \mid T_{Bi} > t) \approx \lambda \Delta t$$

これは時刻tまでに客 i-1 が既に到着した前提で、時刻 t+Δt の間に客 i が到着する確率

同様に、製造時間　T_{pi}　についても同じ導出を行うと

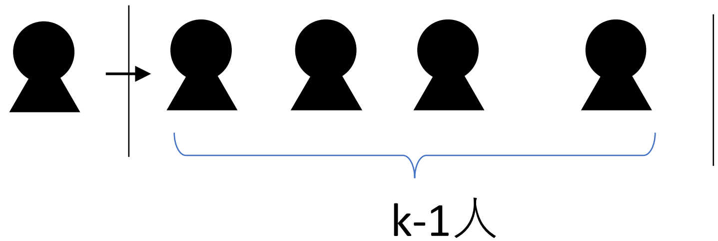
$$P(T_{Pi} \leq t+\Delta t \mid T_{Pi} > t) \approx \mu \Delta t$$

客は何人並んでいるか？

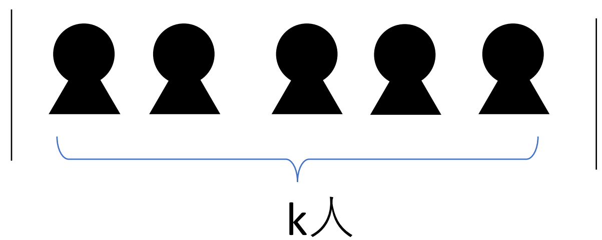


時刻 t + Δt において、客がk人並んでいる確率を求めたい

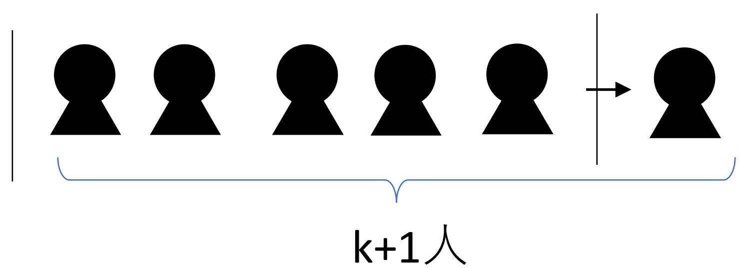
ケース１：時刻 tにおいてk-1人並んでいて、時間 Δtの間に1人来店。退店なし



ケース２：時刻 tにおいて既にk人並んでいて、時間 Δtの間に入店も来店もない。



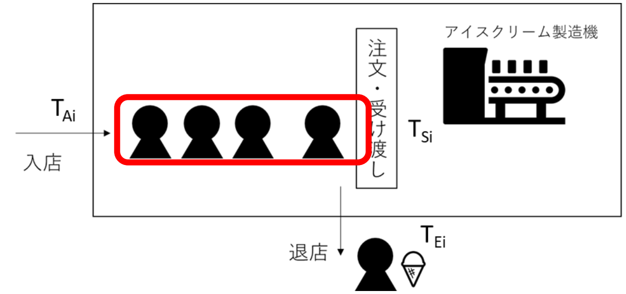
ケース３：時刻 tにおいてk+1人並んでいて、時間 Δtの間に1人が退店。入店なし。



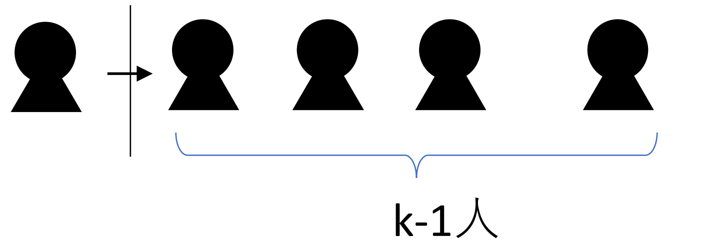
他のケースは宿題！

ケース１

素材番号 i	到着時刻 T_{Ai} (min)	製造開始時刻 T_{Si}(min)	製造完了時刻 T_{Ei} (min)	製造時間 T_{pi} (min)	行列待ち時間 T_{wi} (min)	店内滞在時間 T_{Fi} (min)	客到着間隔 T_{Bi}(min)
1	0	0	5	5	0	5	-
2	2	5	9	4	3	7	2
3	7	9	11	2	2	4	5
…	…	…	…	…	…	…	…



時刻 tにおいてk-1人並んでいて、時間 Δtの間に1人来店。退店なし



時刻 t においてk-1 人が並んでいる確率：　$p_{k-1}(t)$　（定義）

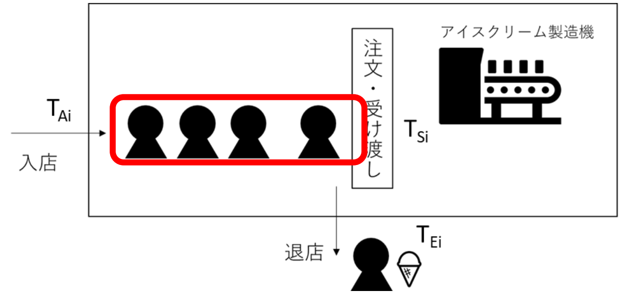
時間 Δtの間に1人来店する確率：　$P(T_{Bi} \le t + \Delta t \mid T_{Bi} > t) \approx \lambda \Delta t$

時間 Δtの間に退店しない確率（Δt の間に製造が完了しない確率）：　$1 - P(T_{Pi} \le t + \Delta t \mid T_{Pi} > t) \approx 1 - \mu \Delta t$

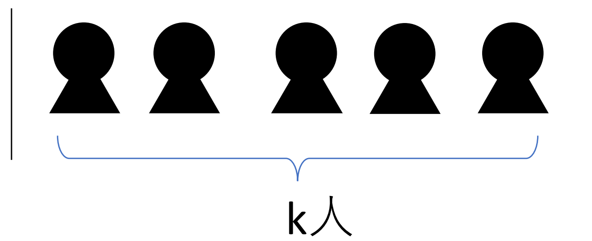
ケース１が成立するのは、上の3つの確率の積　$p_{k-1}(t)\lambda \Delta t(1 - \mu \Delta t)$

ケース２

素材番号 i	到着時刻 T_{Ai} (min)	製造開始時刻 T_{si}(min)	製造完了時刻 T_{Ei} (min)	製造時間 T_{pi} (min)	行列待ち時間 T_{wi} (min)	店内滞在時間 T_{Fi} (min)	客到着間隔 T_{Bi}(min)
1	0	0	5	5	0	5	-
2	2	5	9	4	3	7	2
3	7	9	11	2	2	4	5
…	…	…	…	…	…	…	…



時刻 tにおいて既にk人並んでいて、時間 Δtの間に入店も来店もない。



時刻 t においてk人が並んでいる確率：　$p_k(t)$　（定義）

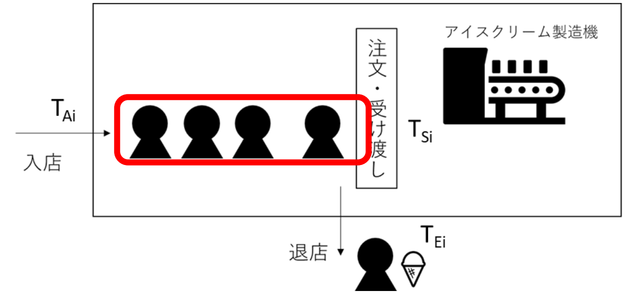
時間 Δtの間に入店しない確率：　$1-P(T_{Bi} \le t+\Delta t \mid T_{Bi} > t) \approx 1-\lambda \Delta t$

時間 Δtの間に退店しない確率
（Δt の間に製造が完了しない確率）：　$1-P(T_{Pi} \le t+\Delta t \mid T_{Pi} > t) \approx 1-\mu \Delta t$

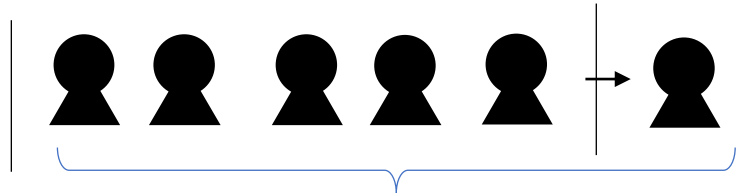
ケース１が成立するのは、上の3つの確率の積　$p_k(t)(1-\lambda \Delta t)(1-\mu \Delta t)$

ケース３

素材番号 i	到着時刻 T_{Ai} (min)	製造開始時刻 T_{Si}(min)	製造完了時刻 T_{Ei} (min)	製造時間 T_{pi} (min)	行列待ち時間 T_{wi} (min)	店内滞在時間 T_{Fi} (min)	客到着間隔 T_{Bi}(min)
1	0	0	5	5	0	5	-
2	2	5	9	4	3	7	2
3	7	9	11	2	2	4	5
…	…	…	…	…	…	…	…



ケース３：時刻 tにおいてk+1人並んでいて、時間 Δtの間に1人が退店。入店なし。



k+1人

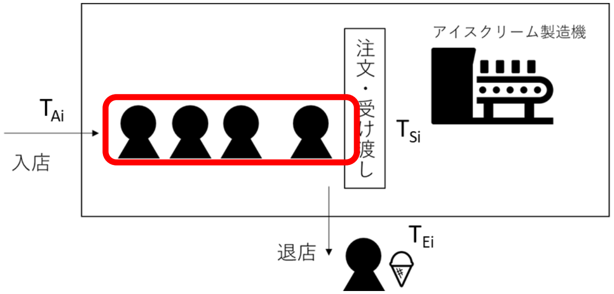
時刻 t においてk+1 人が並んでいる確率：　$p_{k+1}(t)$　（定義）

時間 Δtの間に入店しない確率：　$1-P(T_{Bi}\le t+\Delta t\,|\,T_{Bi}>t)\approx 1-\lambda\Delta t$

時間 Δtの間に退店する確率
（Δt の間に製造が完了する確率）：　$P(T_{Pi}\le t+\Delta t\,|\,T_{Pi}>t)\approx \mu\Delta t$

ケース１が成立するのは、上の3つの確率の積　$p_{k+1}(t)\mu\Delta t(1-\lambda\Delta t)$

モデル式の導出



時刻 t + Δt において、客がk人並んでいる確率 $p_k(t+\Delta t)$ は

$$p_k(t+\Delta t) = p_{k-1}(t)\lambda\Delta t(1-\mu\Delta t) + p_k(t)(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t) + p_{k+1}(t)\mu\Delta t(1-\lambda\Delta t)$$

右辺を展開すると

$$p_k(t+\Delta t) = \lambda\Delta t p_{k-1}(t) - \lambda\mu\Delta t^2 p_{k-1}(t) + \underbrace{p_k(t)}_{\text{左辺に移項}} - (\lambda+\mu)\Delta t p_k(t)$$

$$+\mu\lambda\Delta t^2 p_k(t) + \mu\Delta t p_{k+1}(t) - \mu\lambda\Delta t^2 p_{k+1}(t)$$

右辺にある $p_k(t)$ を左辺に移項し、両辺をΔt で割ると

$$\frac{p_k(t+\Delta t) - p_k(t)}{\Delta t} = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda+\mu) p_k(t) + \mu p_{k+1}(t) + \Delta t\left(-\lambda\mu p_{k-1}(t) + \mu\lambda p_k(t) - \mu\lambda p_{k+1}(t)\right)$$

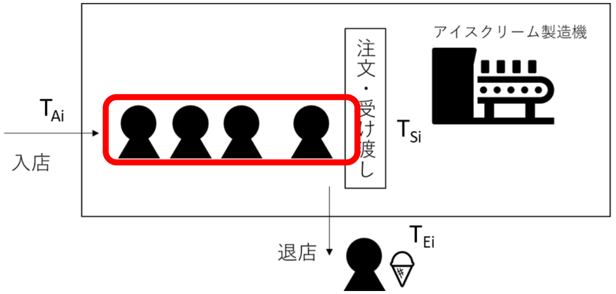
ここで、Δt → 0 の極限を考えると

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_k(t+\Delta t) - p_k(t)}{\Delta t} = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda+\mu) p_k(t) + \mu p_{k+1}(t)$$

つまり

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda+\mu) p_k(t) + \mu p_{k+1}(t)$$

モデル式の解釈



時刻 t 、客がk人並んでいる確率は、以下の連立微分方程式を解けば得られる。

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + \mu) p_k(t) + \mu p_{k+1}(t) \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

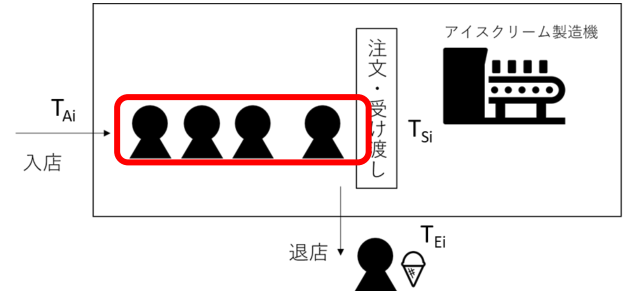
k = 0の場合は別に導出しなければならない（宿題）

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$

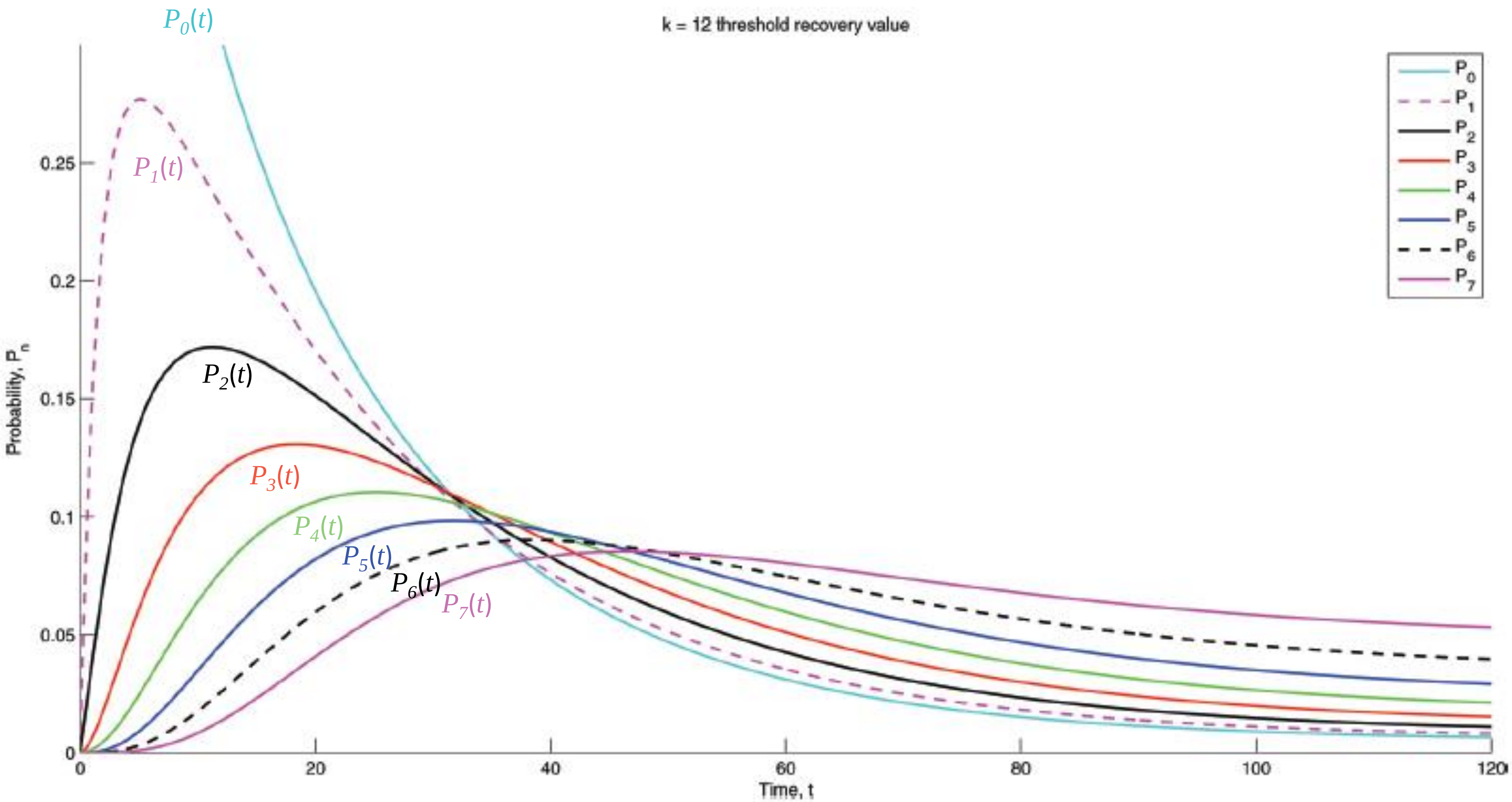
この連立微分方程式は解析的（手と紙と鉛筆を使って）解けない。

シミュレーション

コンピュータを使ったモデル式の数値解（近似解）



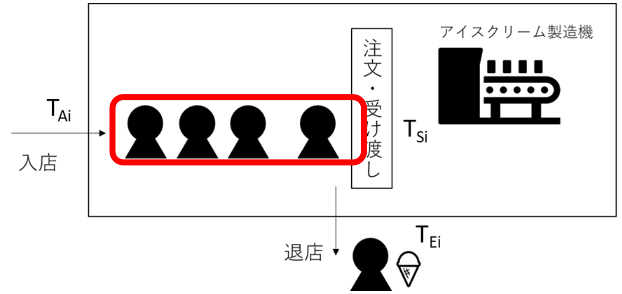
$\lambda = 0.35$, $\mu = 0.5$ のとき

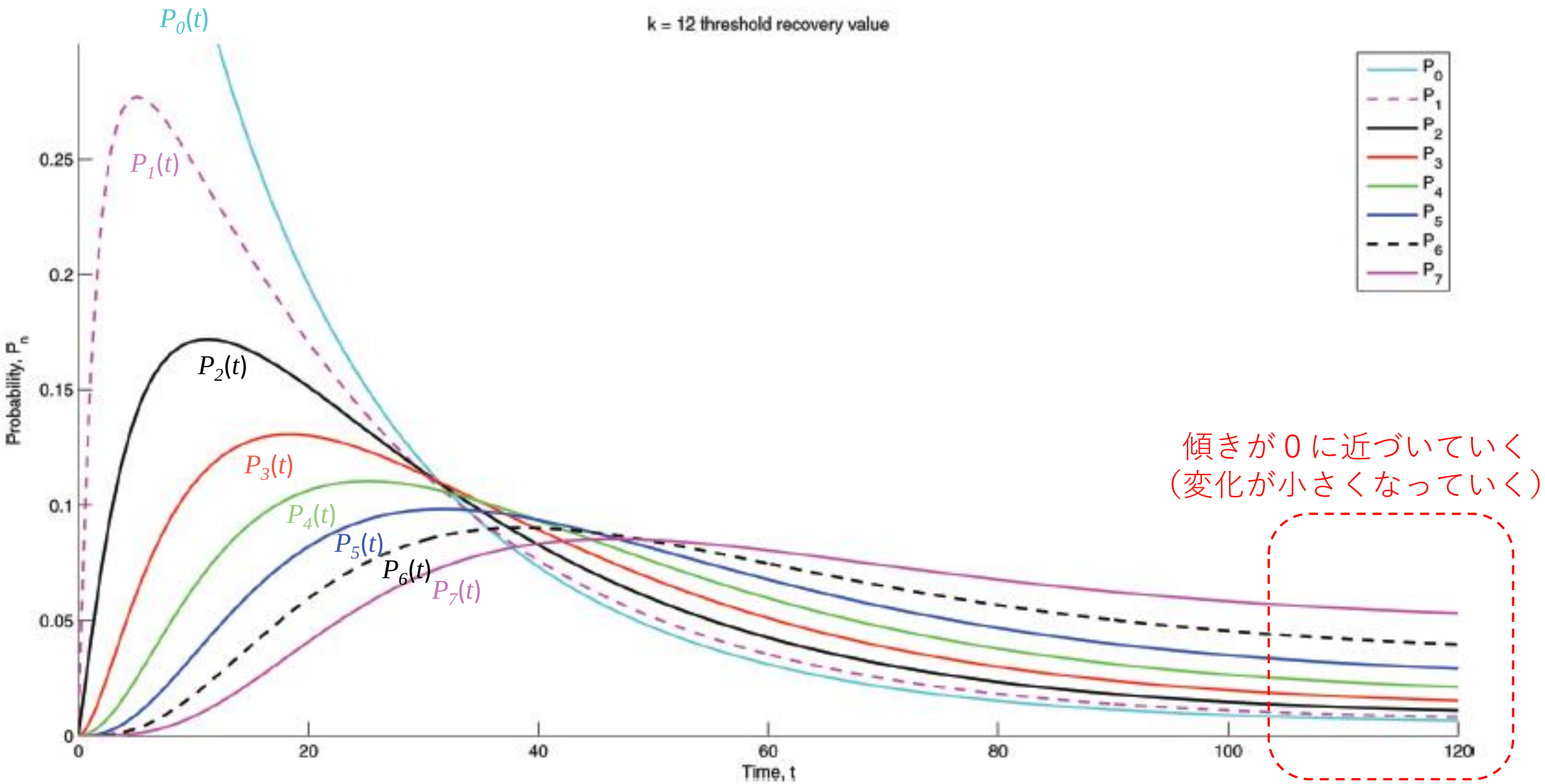


Ezeagu et al., Global Journal of Pure and Applied Mathematics, 8 (2018), pp. 1049–1065

$k = 1, 2, \ldots, 12$　（12人並ぶ可能性まで考慮し、それ以下は無視）

時間が十分経つとどうなる？

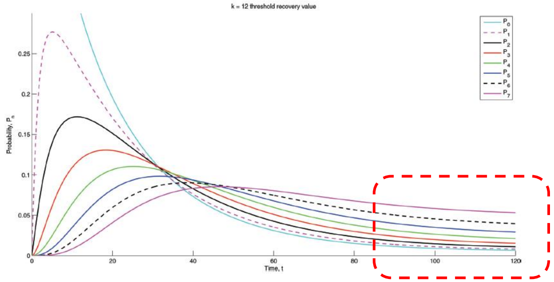




Ezeagu et al., Global Journal of Pure and Applied Mathematics, 8 (2018), pp. 1049–1065

定常状態

時間が十分経って、一定になった状態



Ezeagu et al., Global Journal of Pure and Applied Mathematics 8 (2018), pp. 1049–1065

時間が十分経ったときの確率（定常解）を定義

$$\lim_{t\to\infty} p_k(t) = p_k \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

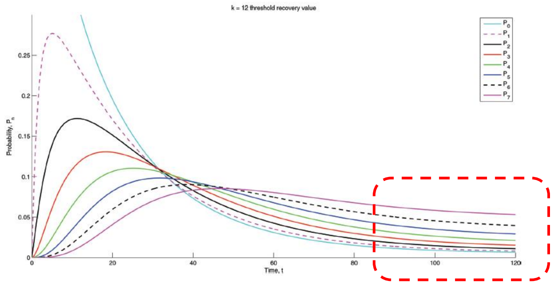
定常解は一定であり時間 t の関数ではないので、時間微分は以下のようにすべて0

$$\lim_{t\to\infty} \frac{dp_k(t)}{dt} = \lim_{t\to\infty} \frac{dp_k}{dt} = 0,\ \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

これをモデル式に代入してみる

$$\begin{cases} \underbrace{\dfrac{dp_k(t)}{dt}}_{=0} = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda+\mu) p_k(t) + \mu p_{k+1}(t),\ \ k = 1, 2, 3, \ldots \\ \underbrace{\dfrac{dp_0(t)}{dt}}_{=0} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \end{cases}$$

定常状態（続き）



Ezeagu et al., Global Journal of Pure and Applied Mathematics 8 (2018), pp. 1049–1065

定常状態でのモデル式は

$$
\begin{cases}
\lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + \mu) p_k(t) + \mu p_{k+1}(t) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \\
-\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) = 0
\end{cases}
$$

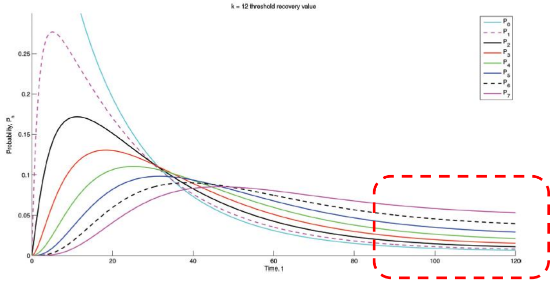
この漸化式を解くと（宿題）

$$
\boldsymbol{p}_k = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \boldsymbol{p}_0 \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots
$$

更に変形して（宿題）

$$
\boldsymbol{p}_k = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \left\{ 1 - \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \right\} \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots
$$

定常状態の解析



Ezeagu et al., Global Journal of Pure and Applied Mathematics 8 (2018), pp. 1049–1065

定常状態で ***k*** 人が並んでいる確率 $\boldsymbol{p_k}$ を
以下のように導いた

$$p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left\{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\right\}$$

思い出すと…

λ：客の到着間隔

μ：アイスクリームの製造間隔

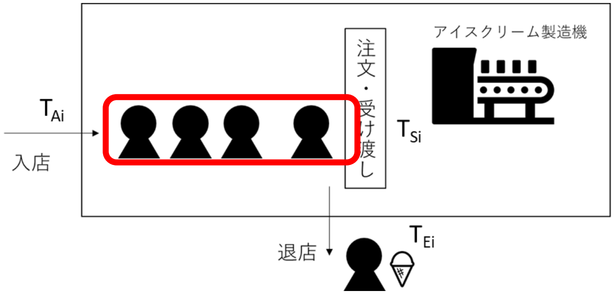
ここで、

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

を定義（利用率）して以下のように書き換える

$$p_k = \rho^k (1 - \rho)$$

平均滞留人数



定常状態では、平均で何人が並んでいるだろうか？

平均滞留人数 L を定義

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k$$

平均（期待値）の定義、3章データの統計的解析を参照

定義した利用率 ρ を使って書き換えると（宿題）

$$L = \frac{\rho}{1-\rho}$$

平均滞留人数の解釈

平均滞留人数 L をプロットしてみる

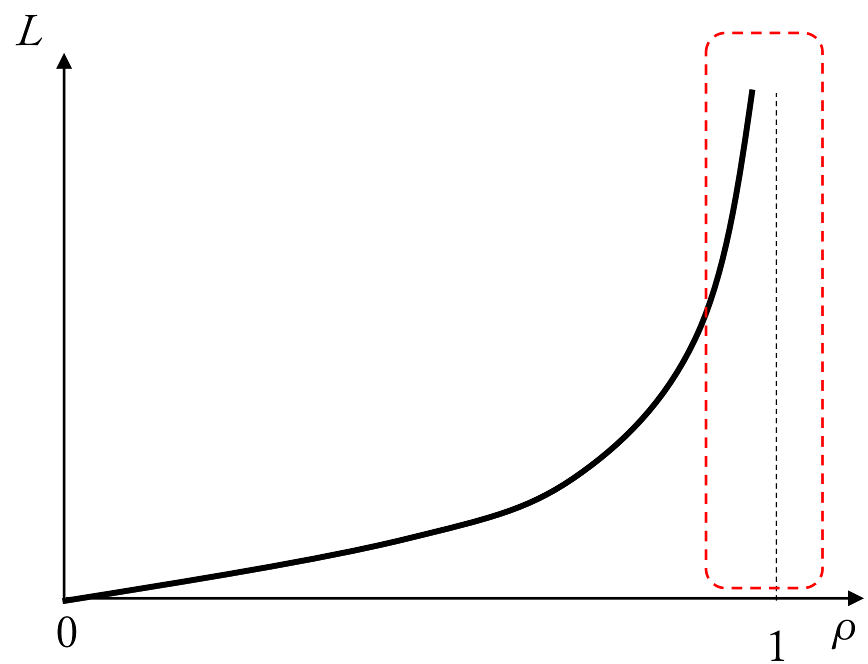
$$L = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

思い出すと…

λ：客の到着間隔

μ：アイスクリームの製造間隔



客の到着間隔がアイスクリーム製造間隔に近づくと、製造が追いつかなくなる