複素関数論　講義ノート

複素関数論　講義　第1回目

第1章　複素数と指数関数

1.1　複素数と複素平面

記号　$\mathbb{R}$ … 実数全体の集合

$\mathbb{C} \equiv \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ … 複素数全体の集合

$\mathbb{R}^2 \equiv \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ … 平面

「$\equiv$」は「左を右で定義する」の意味で用いる.

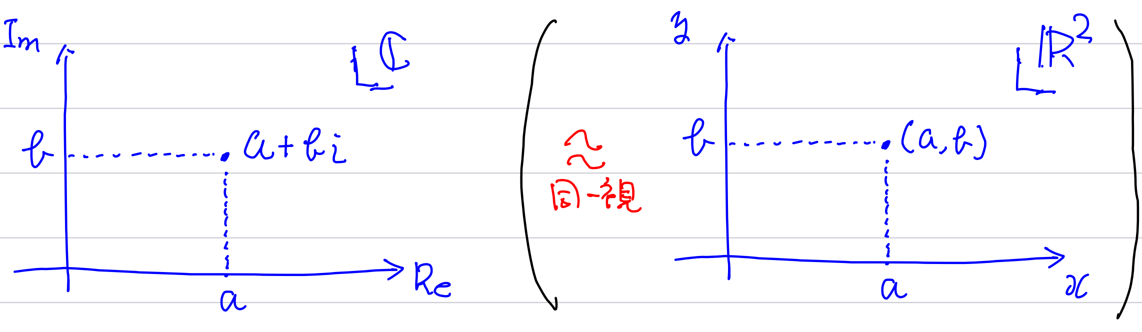
○ 複素数　$z = a+bi \quad (a, b \in \mathbb{R})$

に対して,

$a \equiv \mathrm{Im}\, z$ … zの実部

$b \equiv \mathrm{Re}\, z$ … zの虚部

複素平面上での表し方:



○ 複素数 $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ に対し

$$\bar{z} \equiv a-bi$$ … 共役複素数

$$|z| \equiv \sqrt{a^2+b^2}$$ …… 絶対値

公式（各自確認せよ）

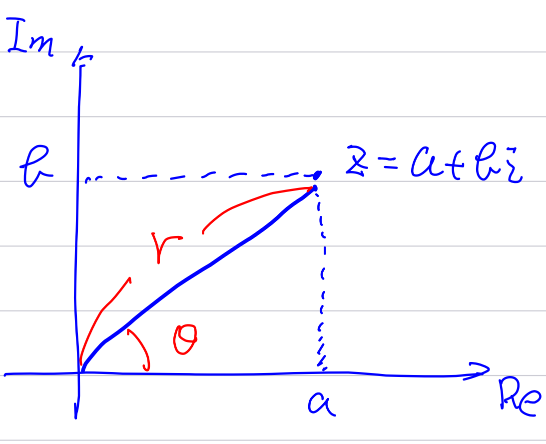
- ○ $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$　　○ $z\bar{z} = |z|^2$
- ○ $\mathrm{Re}\, z = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$　　○ $\mathrm{Im}\, z = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

極形式 複素数 $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ は

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

と極形式で表すことができる。ただし

r … 原点からの距離，θ … 実軸となす角



$$\begin{pmatrix} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{pmatrix}$$

このとき

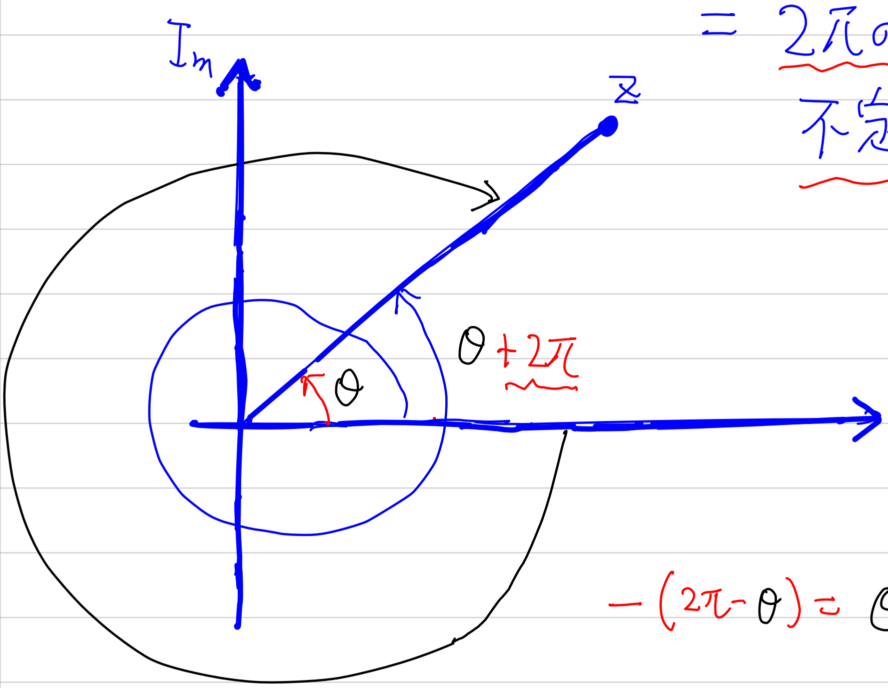
$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| \cdots \quad z\text{の絶対値}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} \equiv \arg z \cdots z\text{の偏角}$$

「≡」は「右を左で定義する」の意味で用いる.

注 $\arg z$ は z に対しひとととおりには定まらない

= 2πの整数倍の不定性がある



$-(2\pi - \theta) = \theta - 2\pi$

$\arg z$ の値は, 2πの整数倍ズレたものもすべて同一視する。

(⇒ cos と sin の周期性より すべて同じ z を表す。)

公式

$$\begin{cases} z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \\ z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \end{cases}$$ ：極形式

$\Rightarrow$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$$

つまり

- $|z_1 z_2| = r_1 r_2$
- $\arg z_1 z_2 \overset{※}{=} \arg z_1 + \arg z_2$

※ 2πの整数倍のズレは同一視!

三角関数の加法定理

$$\begin{cases} \cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 \\ \sin(\theta_1+\theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2 \end{cases}$$

による。各自確認せよ。

これより、特に

ド・モアブルの公式

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 極形式

n：整数

$\Rightarrow$

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

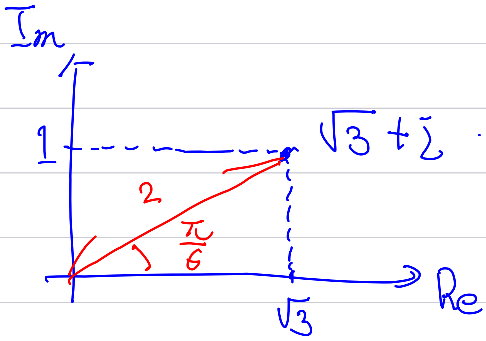
つまり

$$\boxed{|z^n| = |z|^n \ , \ \arg z^n = n \arg z}$$

例

$$z = \sqrt{3} + i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z| = 2 \\ \arg z = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} |z^{10}| = |z|^{10} = 2^{10} = 1024 \\ \arg z^{10} = 10 \arg z = 10 \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5}{3}\pi \\ \qquad = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi \\ \qquad = -\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

2πのズレは同一視!

$$\Rightarrow z^{10} = 1024\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 1024\left(\cos\frac{\pi}{3} - i \sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 1024\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$$

$$= 512\left(1 - \sqrt{3} i\right)$$

複素関数論　講義　第2回目

㊂ 指数関数：e^x
三角関数：$\sin x$, $\cos x$ } …… $x \in \mathbb{R}$
対数関数：$\log x$ …… $x > 0$
べき乗：x^a …… $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$

を 複素数 $x \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$ に対して定義するには
どのようにすればよいか？

? e^i, $\sin i$, $\cos i$, $\log i$, i^i, ……

・今後2回の講義ではこれについて説明する。
まずは指数関数から……。

1.2 オイラーの公式と指数関数

㊥ テイラー展開　$x \in \mathbb{R}$ に対して

$$
\begin{cases}
e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots\cdots \\
\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots\cdots \\
\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots\cdots
\end{cases}
$$

○ 複素数 x に対して、左辺 e^x, $\cos x$, $\sin x$ は意味をもたないが、右辺であれば代入して計算することができる!

⇒ その値により 左辺 の定義とすればよいのでは…

ためしに、純虚数 $x = i\theta$ ($\theta \in \mathbb{R}$) を **形式的**に代入してみると…

$$e^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \cdots$$

$$= \boxed{\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right)} = \cos\theta \text{ のテイラー展開}$$

$$+ i \boxed{\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right)} = \sin\theta \text{ のテイラー展開}$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta$$

これをふまえて、次のように定義する。

$\boxed{\text{定義}}$ (オイラーの公式) $\theta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\boxed{e^{i\theta} \underset{\text{def}}{=} \cos\theta + i\sin\theta}$$

さらに一般の複素数 $z=a+ib$ $(a,b\in\mathbb{R})$ に対しては次のように定義すればよい。

$\boxed{\text{定義}}$ $z=a+ib$ $(a,b\in\mathbb{R})$ に対して

$$\boxed{\begin{aligned} e^z &\equiv e^a\cdot e^{ib} \\ &= e^a(\cos b+i\sin b) \end{aligned}}$$

e^z を $\boxed{\exp z}$ と表記する事もある。

○このとき、次が成立する（各自確認せよ！）

$\boxed{\text{公式}}$ $z, w\in\mathbb{C}$ に対して

$$\boxed{e^{z+w}=e^z\cdot e^w, \quad \frac{1}{e^z}=e^{-z}}$$

特に整数 n に対して

$$\boxed{(e^z)^n = e^{nz}}$$

また、極形式は次のように表現できる：

$$\boxed{z=re^{i\theta}, \quad r=|z|,\ \theta=\arg z}$$

公式の応用として…

・ $w\in\mathbb{C}$ と自然数 N に対して

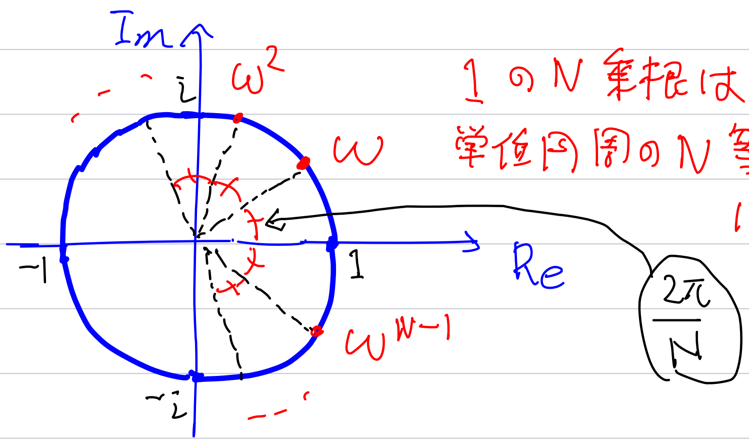
$z^N=w$ となる $z\in\mathbb{C}$ を w の N 乗根 という

$\boxed{\text{定理}}$ 自然数 N に対して、1の N 乗根は

$1,\ \omega,\ \omega^2,\ \cdots,\ \omega^{N-1}$ の N 個である。

ただし $\boxed{\omega=\exp\left(\dfrac{2\pi i}{N}\right)}$

図示すると



1の N 乗根は単位円周の N 等分点に位置している

証明 1の N 乗根 z を $z=re^{i\theta}$ $(r>0,\ \theta\in\mathbb{R})$

と極形式で表すとき、

$$\underset{r^N e^{iN\theta}}{\underset{\shortparallel}{z^N}}=\underset{r^0 e^{i0}}{\underset{\shortparallel}{1}} \quad (\text{極形式の比較}) \Longrightarrow \begin{cases} r^N=r^0\ (=1) \\ e^{iN\theta}=e^{i0}\ (=e^{2\pi k i}) \end{cases}$$

(k は整数)

$\Rightarrow$ $r=1$, $\underline{N\theta = 2\pi k}$

$\Downarrow$

$\theta = \dfrac{2\pi k}{N}$: zの偏角

$\Rightarrow$ $z = \exp\left(\dfrac{2\pi k}{N} i\right)$ $\left(= \omega^k\right)$

($z = re^{i\theta}$に代入)

ここで zの偏角 $\dfrac{2\pi k}{N}$ として

$0 \leq \dfrac{2\pi k}{N} < 2\pi$ となるもののみ考えると,

整数kとしては, $k = 0, 1, \cdots, N-1$

の N とおり。(それ以外の場合は,

これらのどれかと同一視される…同じzを表わす)

$\Rightarrow$ $z = \underset{k=0}{\omega^0 (=1)}, \underset{k=1}{\omega}, \underset{k=2}{\omega^2}, \cdots, \underset{k=N-1}{\omega^{N-1}}$ //

複素関数論　講義　第3回目

(復) 前回は複素数 $z\in\mathbb{C}$ に対して指数関数 e^z を定義した。今回はさらに対数関数 $\log z$、複素数べき a^z、三角関数 $\cos z$, $\sin z$ の定義を与える。

1.3 対数と複素数べき

(復) 正の実数 $x>0$ に対し、$e^y=x$ をみたす y を $\log x$ で表した。($\log x$ は e^x の逆関数)

同様に

定義 $z\in\mathbb{C}$ に対し、$e^w=z$ をみたす w を $\log z$ で表す

公式 $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対し

0を除く

$$\boxed{\log z=\log|z|+i\arg z}$$

これまでの正の実数に対する log

⑥ $\begin{cases} z = re^{i\theta} & (r=|z|>0,\ \theta = \arg z) \\ w = a+ib & (a,b\in\mathbb{R}) \end{cases}$

と表すとき,

$$e^w = z \iff e^a e^{ib} = re^{i\theta}$$

$$\iff e^a = r,\ e^{ib} = e^{i\theta}$$

極形式の比較

$$\iff \begin{cases} a = \log r = \log|z| \\ b = \theta + 2k\pi = \arg z \end{cases}$$

同一視

kは整数

⑦ 公式 $\log z = \log|z| + i\arg z$ において,

$\arg z$ は 2πの整数倍の不定性があるので

$\log z$ も同じ不定性をもつ。

⇒ $\arg z$ として, $-\pi < \arg z \leq \pi$ となるものに

限定すれば $\log z$の値はひとどおりに定まる。

⇒ この値を $\log z$の主値といい $\mathrm{Log}\, z$

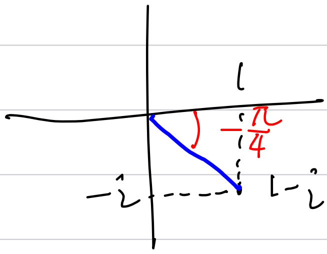
であらわす。

特に $\boxed{\mathrm{Log}\, a = \log a\ (a>0, \text{正の実数})}$

これまでの log

例 $\mathrm{Log}(1-i) = \log\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}i = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{\pi}{4}i$

$|1-i| = \sqrt{2}$, $\arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$



㊟ $a>0$, $x \in \mathbb{R}$ に対して $a^x = e^{x \cdot \log a}$ が成立している。(両辺 log をとって確認せよ)

$\Longrightarrow$ そこで、$w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $z \in \mathbb{C}$ に対しても

$$\boxed{w^z \underset{\Leftarrow}{=} e^{z \log w}}$$

と定義する。

(注) $\log w$ は 2π の整数倍の不定性があるので一般に w^z は多くの値をもつ

例 N が自然数のとき、$1^{\frac{1}{N}}$ は 1 の N 乗根と一致する。(従って N 個の値をもつ)

(i) 定義にしたがって確認してみる：

$$1^{\frac{1}{N}} = e^{\frac{1}{N}\log 1} = e^{\frac{1}{N}(\overbrace{\log|1|}^{=0} + i\arg 1)}$$

("複素数" 1 に対する log.)　(正の実数 |1| に対する これまでの log)　$2k\pi$　k は整数

$$= e^{\frac{2k\pi}{N}i} \quad (k\text{は整数})$$

$$= \omega^k \quad (\quad " \quad)$$

ただし $\omega = \exp\left(\frac{2\pi}{N}i\right)$

よって $1^{\frac{1}{N}}$ は $\underset{k=0}{\omega^0}, \underset{k=1}{\omega^1}, \cdots, \underset{k=N-1}{\omega^{N-1}}$ の N 個

それ以外の k に対しては、これのくり返し

1.4 三角関数

(ii) オイラーの公式：$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$\Rightarrow e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin(-\theta)$$
$$= \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \\ e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

これらの右辺は $\theta \in \mathbb{C}$ に対しても定義されるので、これにより、複素数 θ に対する $\cos\theta$, $\sin\theta$ の値と定義する：

定義 $z \in \mathbb{C}$ に対し、

$$\cos z \equiv \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z \equiv \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

公式（各自確認せよ）

- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
- $\sin z = \sin(z+2\pi)$, $\cos z = \cos(z+2\pi)$

複素関数論　講義　第4回目

第2章　複素関数の微分

◎これまでの関数　$D \subset \mathbb{R}$ を定義域として

$$
\begin{aligned}
f:\ & D \to \mathbb{R} \\
& x \mapsto f(x)
\end{aligned}
$$

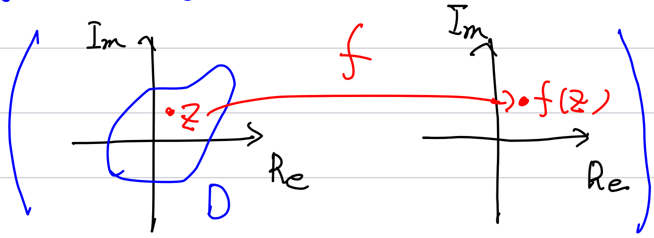
実数 x に実数 $f(x)$ が対応！

◎ここでは，$D \subset \mathbb{C}$ を定義域として，

複素数 z に複素数 $f(z)$ が対応する

複素関数について学習する：

$$
\boxed{
\begin{aligned}
f:\ & D \to \mathbb{C} \\
& z \mapsto f(z)
\end{aligned}
}
$$



例　$f(z) = z^2,\ e^z,\ \cos z,\ \sin z,\ \cdots\cdots$

2.1　複素平面内の集合

$\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}^2$ と同一視できるので，$\mathbb{R}^2$ での様々な

概念がそのまま $\mathbb{C}$ での概念となる：

・<u>円板</u> $D(\alpha, r) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-\alpha| < r \}$

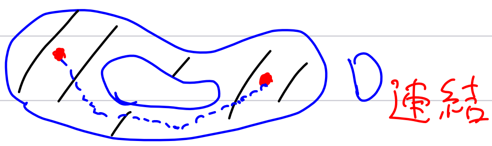
（中心 α，半径 r）

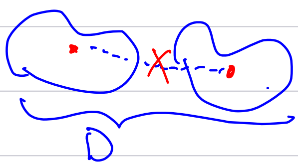
・$D \subset \mathbb{C}$ とする。

・D が <u>開集合</u> $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 「D 上のどの点 $\alpha \in D$ に対しても，ある $r>0$ により，$D(\alpha, r) \subset D$ とできる。」

D上のどの点も，そのまわりは D 内にある！

・D が <u>連結</u> $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 「D 上のどの 2点も D内にある折れ線で結ぶことができる」



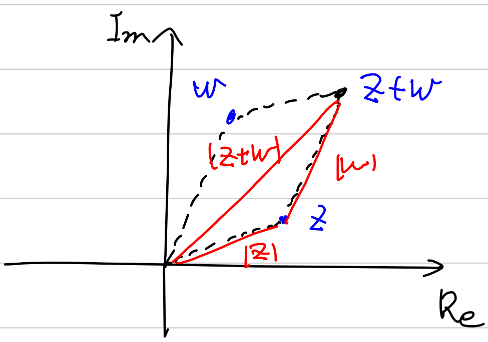


・<u>領域</u> $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 連結な開集合

・<u>三角不等式</u>

$$\boxed{|z+w| \leq |z| + |w| \quad (z, w \in \mathbb{C})}$$

（各自確認せよ！）



2.2 複素関数の極限

$$\begin{cases} \mathbb{C} \ni z = x+iy \underset{\text{同一視}}{\approx} (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{C} \ni \alpha = a+ib \underset{\text{同一視}}{\approx} (a,b) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

に対して，

$$\boxed{\begin{aligned} z \to \alpha &\iff (x,y) \to (a,b) \\ &\iff \begin{cases} x \to a \\ y \to b \end{cases} \\ &\iff |z-\alpha| \to 0 \end{aligned}}$$

に注意!

㊁ 複素関数 $f : D \to \mathbb{C}$ ($D \subset \mathbb{C}$), $z \mapsto f(z)$ ($z \in D$, $f(z) \in \mathbb{C}$) に対して，

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = A \quad (\alpha \in D,\ A \in \mathbb{C})$$

$\overset{\text{定義}}{\iff}$ $z \to \alpha$ ならば $f(z) \to A$

2.3 複素関数の連続性

例 $\alpha \in D \subset \mathbb{C}$ として、複素関数

$$f : D \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z)$$

が α で連続

$\overset{\text{定義}}{\iff}$ $\boxed{\lim_{z \to \alpha} f(z) = f(\alpha)}$

注
$\mathbb{C} \ni z = x + iy \underset{\text{同一視}}{\approx} (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\mathbb{C} \ni w = f(z) = u + iv \underset{\text{同一視}}{\approx} (u, v) \in \mathbb{R}^2$

と同一視することにより

$$\boxed{f(z) \underset{\text{同一視}}{\approx} (u(x,y), v(x,y))}$$

(複素関数 f ～ 2つの2変数関数)

このとき、

f が $\alpha = a + ib$ で連続
$\iff$
u, v が (a, b) で連続

複素関数論　講義　第5回目

㊀ 複素関数の"微分"について学習する。

(復) ○ 実数上の(1変数)関数の微分：

$f(x)$ が $x=a$ で微分可能

$\overset{\text{定義}}{\iff}$ 極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\alpha\in\mathbb{R}$ が存在

$\iff$ $\displaystyle\frac{f(x)-f(a)-\alpha(x-a)}{x-a}\to 0 \quad (x\to a)$ となる $\alpha\in\mathbb{R}$ が存在

（$\dfrac{|左-右|}{|x-a|}\to 0 \ (x\to a)$ の意味）

$\iff$ $y=f(x) \approx y=f(a)+\alpha(x-a)$ となる $\alpha\in\mathbb{R}$ が存在。

[$y=f(x)$ のグラフの $(a,f(a))$ での接線

○ 実平面上の(2変数)関数の微分：

$f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で微分可能

$\overset{\text{定義}}{\iff}$ $z=f(x,y) \approx z=f(a,b)+\alpha(x-a)+\beta(y-b)$ となる $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ が存在。

[$z=f(x,y)$ のグラフの $(a,b,f(a,b))$ での接平面。

（$\dfrac{左-右}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\to 0 \quad (x,y)\to(a,b)$ の意味）

2.4 複素関数の微分

◦ 複素関数の微分も 実数上の1変数関数と同様に定義する：

定義 $D \subset \mathbb{C}$: 領域　$\alpha \in D$ とする。

$$f : D \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z)$$ が $z = \alpha$ で微分可能

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 極限 $\boxed{\lim_{z \to \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} = A \in \mathbb{C}}$ が存在

（このAを $f'(\alpha)$ とあらわす）

・特にすべての $\alpha \in D$ で微分可能なとき、

f は D 上微分可能という。

このとき、$f' : D \to \mathbb{C}, \ z \mapsto f'(z)$ を f の導関数という。

(注) D は領域（したがって開集合）なので、$z \to \alpha$ のとき、z は定義域 D 内にある。
よって ※ において $f(z)$ は意味をもつ。

例1 $f(z) = z^n$ nは自然数
$\Rightarrow f'(z) = n z^{n-1}$ (証明は第4回講義宿題2)

公式 実数上の関数と同様に以下が成立する。
(証明も同様…各自で確認せよ。)

- $\{f(z)+g(z)\}' = f'(z)+g'(z)$
- $\{f(z)g(z)\}' = f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$
- $\{g(f(z))\}' = g'(f(z))f'(z)$

定理 複素関数 $f: D \to \mathbb{C}$ ($D \subset \mathbb{C}$ 領域) は
「微分可能 ⇒ 連続」

(証明) fが $z=\alpha$ で微分可能とする。

$$\Rightarrow |f(z)-f(\alpha)| = \left|\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\right| |z-\alpha|$$

$\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} \to f'(\alpha)$, $|z-\alpha| \to 0$

$$\to |f'(\alpha)| \cdot 0 = 0 \quad (z \to \alpha)$$

$\therefore \lim_{z\to\alpha} f(z) = f(\alpha)$; fは $z=\alpha$ で連続

2.5 正則関数

定義 複素関数 $f: D \to \mathbb{C}$ ($D \subset \mathbb{C}$: 領域)

が D 上 正則

$\Longleftrightarrow$ (定義)

- f は D 上微分可能 ⋯①
- (f' は D 上連続 ⋯②)

注 実は②は①から導かれることが知られている。
(もっと強く『微分可能 ⇒ 無限回微分可能』が言える) 従って定義において②は不用である!

・実数上の関数にはこの様な性質は無い!

例えば
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \cdots\ x \neq 0 \\ 0 & \cdots\ x = 0 \end{cases}$$
は $\mathbb{R}$ 上微分可能だが、$f'(x)$ は $x=0$ で不連続

複素関数の微分は実数上の関数と同様に定義したはずなのに、このような著しい違いはどこから生じているのであろうか?

(次週につづく…)

複素関数論　講義　第6回目

2.6 コーシー・リーマンの方程式

◎ 同一視

$$\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$$
$$\rotatebox{90}{$\in$} \qquad \rotatebox{90}{$\in$}$$
$$z = x + iy \simeq (x, y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

により，複素関数

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z = x + iy \longmapsto w = u + iv$$
$$\simeq (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \simeq (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

は 2つの実2変数関数

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

と同一視される。このとき

$$(*) \quad \boxed{f(z) = \underbrace{u(x, y)}_{\in \mathbb{R}} + i\underbrace{v(x, y)}_{\in \mathbb{R}} \quad (z = \underbrace{x}_{\in \mathbb{R}} + i\underbrace{y}_{\in \mathbb{R}})}$$

と表現される。

例

$$\begin{aligned} e^{z} &= e^{x+iy} \\ &= e^{x} e^{iy} \\ &= e^{x}(\cos y + i \sin y) \\ &= \underbrace{e^{x}\cos y}_{u(x,y)} + i\, \underbrace{e^{x}\sin y}_{v(x,y)} \end{aligned}$$

$z = \underset{\in \mathbb{R}}{x} + i\, \underset{\in \mathbb{R}}{y}$

(b) $\circledast$ において

f が $\underset{x+iy}{z} = \underset{a+ib \simeq (a,b) \in \mathbb{R}^2}{z_0}$ で微分可能

であることを, u , v を用いて表現しよう:

$A = \alpha + i\beta \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ として,

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - A = \frac{\boxed{f(z) - f(z_0) - A(z - z_0)}}{z - z_0}$$

$\boxed{\text{右辺の分子}} = \{u(x,y) + iv(x,y)\} - \{u(a,b) + iv(a,b)\}$
$\qquad - (\alpha + i\beta)\{(x-a) + i(y-b)\}$

展開して実部,虚部ごとにまとめる

$$= u(x,y) - u(a,b) - \alpha(x-a) + \beta(y-b)$$
$$+ i\{v(x,y) - v(a,b) - \beta(x-a) - \alpha(y-b)\}$$

$$\therefore \left| \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - A \right| = \frac{\left|\boxed{\text{右辺の分子}}\right|}{\boxed{|z-z_0|}}$$

$$|z-z_0| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

$$= \left| \frac{u(x,y)-u(a,b)-\alpha(x-a)+\beta(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} + i\,\frac{v(x,y)-v(a,b)-\beta(x-a)-\alpha(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} \right|$$

$$\therefore \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \to \underset{(\alpha,\beta)}{\underset{\shortparallel}{A}} \quad (\underset{(x,y)}{\underset{\shortparallel}{z}} \to \underset{(a,b)}{\underset{\shortparallel}{z_0}})$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{u(x,y)-u(a,b)-\alpha(x-a)+\beta(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} \to 0 \\[2ex] \dfrac{v(x,y)-v(a,b)-\beta(x-a)-\alpha(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} \to 0 \\[2ex] \qquad\qquad (x,y)\to(a,b) \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$ 注

$$\begin{cases} u \text{ は } (x,y)=(a,b) \text{ で微分可能で} \\ \quad u_x(a,b)=\alpha, \quad u_y(a,b)=-\beta \\ v \text{ は } (x,y)=(a,b) \text{ で微分可能で} \\ \quad v_x(a,b)=\beta, \quad v_y(a,b)=\alpha \end{cases}$$

注 について

講義第5回目で復習したように、一般に、

$u(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で微分可能

$\Longleftrightarrow$

定義 $$\frac{u(x,y)-u(a,b)-\alpha(x-a)-\beta(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} \to 0 \quad (x,y)\to(a,b)$$

となる α, β が存在

このとき、この式で $y=b$ とすれば

$$\left|\frac{u(x,b)-u(a,b)}{x-a}-\alpha\right| \to 0 \quad (x\to a)$$

となり $u_x(a,b)=\alpha$ がわかる

同様に $x=a$ とすれば $u_y(a,b)=\beta$ となる

このことより次が成立。

定理 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ $(z=x+iy,\ x,y\in\mathbb{R},\ u,v\in\mathbb{R})$

が $z=a+ib$ $(a,b\in\mathbb{R})$ で微分可能

$\Longleftrightarrow$ u, v が $(x,y)=(a,b)$ で微分可能

かつ
$$\boxed{\begin{cases} u_x(a,b)=v_y(a,b) \\ u_y(a,b)=-v_x(a,b) \end{cases}}$$

またこのとき、$f'(a+ib)=u_x(a,b)+iv_x(a,b)$

定理 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ $(z=x+iy,\ x,y\in\mathbb{R},\ u,v\in\mathbb{R})$

が 正則

$\Longleftrightarrow$ u, v が C^1級

かつ

$$\boxed{\begin{cases} u_x(x,y) = v_y(x,y) \\ u_y(x,y) = -v_x(x,y) \end{cases}}$$

またこのとき $f'(z) = u_x(x,y)+iv_x(x,y)$

注 定理に登場している関係式 $\boxed{u_x=v_y,\ u_y=-v_x}$ は、コーシー・リーマンの方程式とよばれている。

- この関係式をみたす u, v の組はかなり限定的であり、特にこのような u, v は無限回微分可能でなくてはならないことが知られている。このように複素関数の微分可能性は、(見かけの単純さとはうらはらに) かなり強いことを述べていることに注意しておく。

例 e^z は正則関数であり, $\boxed{(e^z)' = e^z}$

∵ 前の例でも示したように,

$$e^z = u(x,y) + i v(x,y)$$

$$\begin{cases} u(x,y) = e^x \cos y \\ v(x,y) = e^x \sin y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_x = e^x \cos y \ (= u), & u_y = -e^x \sin y \\ v_x = e^x \sin y \ (= v), & v_y = e^x \cos y \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$: コーシー・リーマン

かつ

$$(e^z)' = \underbrace{u_x}_{=u} + i \underbrace{v_x}_{=v} = e^z$$

これより, $\cos z$, $\sin z$ の正則関数であり

$\boxed{(\cos z)' = -\sin z}$, $\boxed{(\sin z)' = \cos z}$

∵ ・ $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$$\Rightarrow (\cos z)' = \frac{e^{iz}(iz)' + e^{-iz}(-iz)'}{2} = i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

$$= -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z$$

・ $(\sin z)'$ も同様 (各自確認)

複素関数論　講義　第7回目

第3章　複素線積分

ここからは複素関数の「積分」について学習していく。

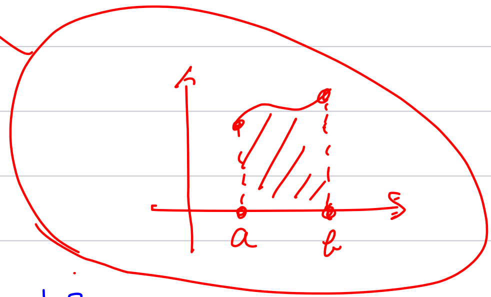
まずは実数上の関数の積分の復習から…

(復) 閉区間 $[a,b]$ 上の1実変数関数

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto f(t)$$

の積分 $\int_a^b f(t)\,dt$ は区分求積法により

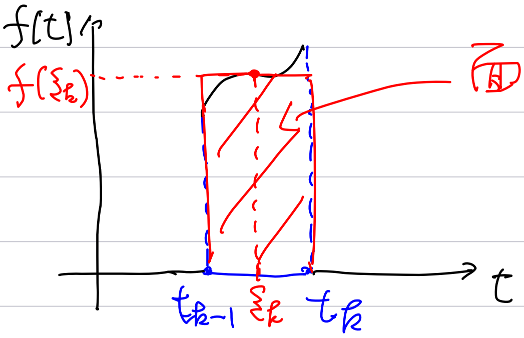
$y = f(t)$ のグラフの下の部分の面積として与えられる:



・区間 $[a,b]$ を分割する。

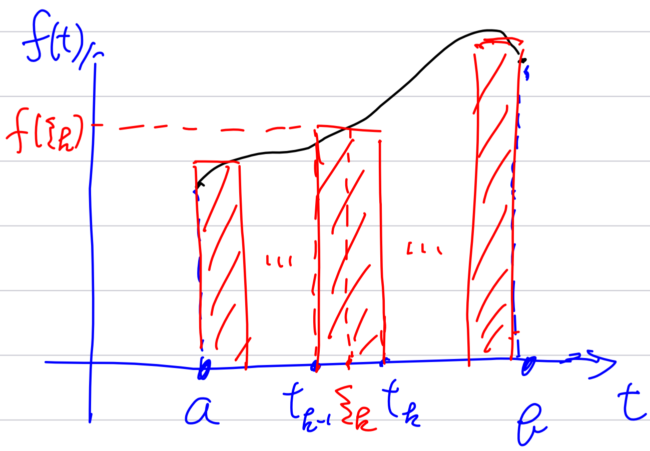
Δ : $a = t_0,\ t_1 \cdots t_{k-1}\ \xi_k\ t_k \cdots t_{N-1},\ b = t_N$

・各小区間 $[t_{k-1}, t_k]$ ($k=1,\cdots,N$) を底辺, $[t_{k-1}, t_k]$ 上の点 ξ_k での f の値 $f(\xi_k)$ を高さとする長方形を考える。



面積 $f(\xi_k)(t_k - t_{k-1})$

・各長方形の面積をたしあわせてグラフの下の面積の近似とする。



$$\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(t_k - t_{k-1})$$

・分割の幅 $|\Delta| = \max_{k=1,\cdots,N}(t_k - t_{k-1})$

を限りなく小さくする

$$\boxed{\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(t_k - t_{k-1}) \equiv \int_a^b f(t)\,dt}$$

④ 実数上の複素数値関数

(*) $\boxed{f(t) = \mathrm{Re}\,f(t) + i\,\mathrm{Im}\,f(t) \quad (t \in \mathbb{R})}$

の微分・積分は、実部 $\mathrm{Re}\,f(t)$ と虚部 $\mathrm{Im}\,f(t)$ のそれぞれの微分・積分の和として定義！

定義

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt \equiv \int_a^b \mathrm{Re}\,f(t)\,dt + i\int_a^b \mathrm{Im}\,f(t)\,dt}$$

$$\boxed{f'(t) \equiv (\mathrm{Re}\,f)'(t) + i(\mathrm{Im}\,f)'(t)}$$

公式

$F(z)$: 正則関数 に (*) を合成した関数 $F(f(t))$ に対して 次が成立:

$$\boxed{\{F(f(t))\}' = F'(f(t))\,f'(t)}$$

証明は、f が実数上の実数値関数の場合の証明と同様である。
(各自確認せよ。)

公式

$f : [a,b] \to \mathbb{C}$, $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ が $F'(t) = f(t)$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

証明

$$F' = f \iff \begin{cases} (\mathrm{Re}\,F)' = \mathrm{Re}\,f \\ (\mathrm{Im}\,F)' = \mathrm{Im}\,f \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}\,f(t)\,dt + i\int_a^b \mathrm{Im}\,f(t)\,dt$$

$$= \Big[\mathrm{Re}\,F(t)\Big]_a^b + i\Big[\mathrm{Im}\,F(t)\Big]_a^b$$

$$= \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

例

$$\int_a^b (t+i)^3\,dt = \left[\frac{1}{4}(t+i)^4\right]_a^b$$

$$F(z) = z^4 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}(t+i)^4 = \frac{1}{4}F(t+i) \\ F'(z) = 4z^3 \end{cases}$$

$$\therefore \left\{\frac{1}{4}(t+i)^4\right\}' = \underbrace{\frac{1}{4}F'(t+i)}_{\substack{\shortparallel \\ (t+i)^3}}\underbrace{(t+i)'}_{\substack{\shortparallel \\ 1}} = (t+i)^3$$

$$= \frac{(b+i)^4 - (a+i)^4}{4}$$

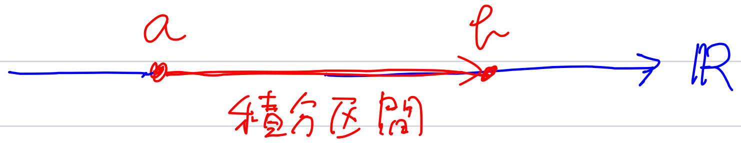
複素関数論　講義　第8回目

今週は複素関数の定義と計算方法について学習する。

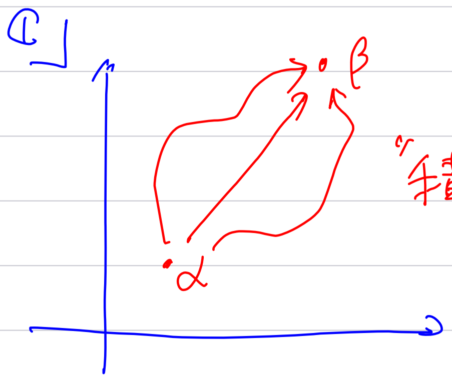
3.1 複素関数の積分

Q 実数上の関数 $f(t)$ の積分と同様に、複素関数 $f(z)$ の積分を定義したい!

- 実数上の関数 $f(t)$ の a から b までの積分 $\int_a^b f(t)\,dt$ は区分求積法により定義した。
（前回の講義で復習した。）

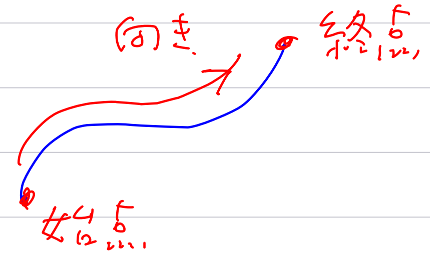


- 複素関数 $f(z)$ の α から β までの積分を考えたいが"積分区間"はいろいろ考えられる。



"積分区間"：一般に、複素平面 ℂ 上の（向きをもった）曲線となる。

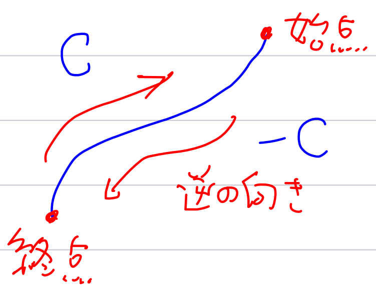
◎ 向きをもった曲線 … 始点から終点へ向かう向きが定められた曲線

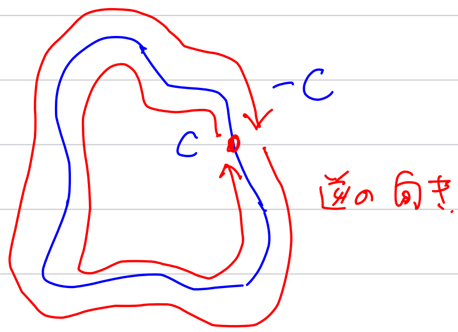


・ C：向きをもった曲線

ならば、逆の向きを与えた曲線を考えることができる。

それを $\boxed{-C}$ であらわす

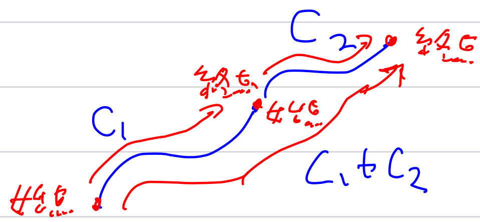




・ C_1, C_2：向きをもった曲線で

「C_1 の終点＝C_2 の始点」

ならば、C_1 と C_2 をつないで、もうひとつの向きをもった曲線をつくることができる。



それを $\boxed{C_1+C_2}$ であらわす。

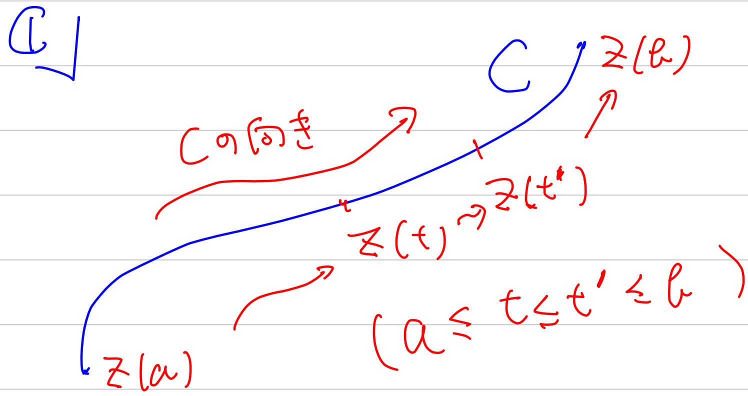
・ C: 向きをもった曲線

に対し、C 上の点が実数上の関数

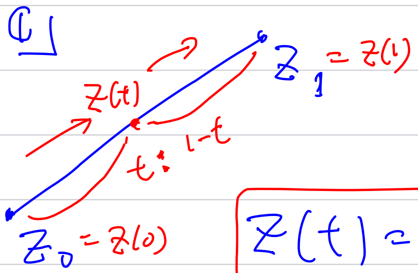
$$z : [a, b] \longrightarrow C \subset \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto z(t) \left(= \overbrace{x(t)}^{\mathbb{R}} + i\,\overbrace{y(t)}^{\mathbb{R}} \right)$$

によりあらわされ、t が増加するにつれて $z(t)$ が C 上を与えられた向きに沿って移動するとき、

$\boxed{z(t),\ (a \leq t \leq b)}$ を <u>C のパラメータ表示</u>という。



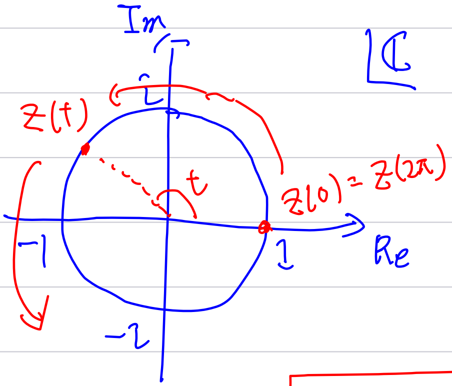
<u>例</u>



z_0 から z_1 へ向かう向きをもった線分のパラメータ表示は、

$$\boxed{z(t) = (1-t)z_0 + t z_1,\ (0 \leq t \leq 1)}$$

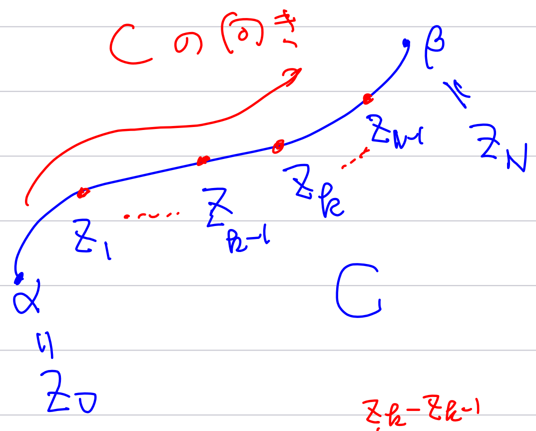
例



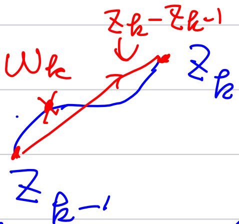
単位円周に反時計回りの向きをいれた曲線のパラメータ表示は

$$\boxed{z(t)=e^{it}\ ;\ (0\le t\le 2\pi)}$$

④ f(z): 複素関数、C: 向きをもった曲線 に対して、f の C 上での積分を"区分求積法"により次のように定義:

- 

  Cを向きの順番に沿って細かく分割

- 各分割 

上の点 w_k での f の値

$f(w_k)$ を"高さ"、各分割の線分による近似

$z_k - z_{k-1}$ を"底辺"とする"長方形の面積"

$\boxed{f(w_k)(z_k - z_{k-1})}$ を考える

・これらをたしあわせて、分割の幅

$$|\Delta| = \max_{k=1,\cdots,N} |z_k - z_{k-1}|$$

を限りなく小さくする：

$$\boxed{\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{k=1}^{N} f(w_k)(z_k - z_{k-1}) \equiv \int_C f(z)dz}$$

$\boxed{\text{公式}}$ 積分の定義より次は明らか（各自確認せよ）

・ $\boxed{\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz}$

・ $\boxed{\int_{C_1+C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz}$

$\boxed{\text{定理}}$ $|f(z)| \leq M \quad z \in C$

$$\Rightarrow \left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq M \times (C\text{の長さ})$$

∵

$$\underbrace{\left|\sum_{k=1}^{N} f(w_k)(z_k - z_{k-1})\right|}_{} \leq \sum_{k=1}^{N} \overbrace{|f(w_k)|}^{\leq M} |z_k - z_{k-1}|$$

$$\leq M \underbrace{\sum_{k=1}^{N} |z_k - z_{k-1}|}_{}$$

$|\Delta|\to 0$ 　　Cの折線近似の長さ

$$\left|\int f(z)dz\right|$$

$|\Delta|\to 0$ 　Cの長さ

3.2 複素線積分の計算

① 向きをもった曲線 C のパラメータ表示が

$$\boxed{z(t),\ (a \le t \le b)}$$

で与えられているときは，複素関数 $f(z)$ の C 上の積分は次のように，実数上の複素数値関数の積分の計算に帰着される：

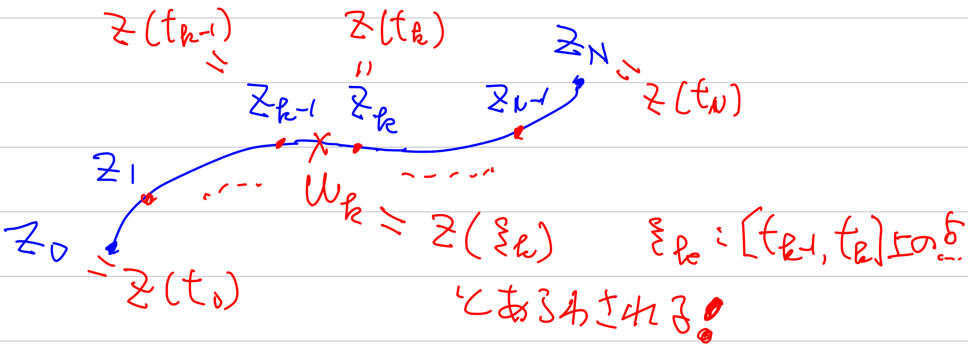
公式

$$\boxed{\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,\dot{z}(t)\,dt}$$

・区間 $[a, b]$ を分割する！

$$\underset{\shortparallel}{t_0} < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k < \cdots < \underset{\shortparallel}{t_N}$$
$$t_0 = a,\quad t_N = b$$

・$z_k = z(t_k)$ とおく。



この時

$$\int_C f(z)\,dz$$

$z(\xi_k)$ $\quad (\xi_k \in [t_{k-1}, t_k])$

$$= \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{k=1}^{N} f(w_k)(z_k - z_{k-1})$$

$|\Delta| \to 0$ のとき、ξ_k と s_k は十分近い。

$$z(t_k) - z(t_{k-1})$$

// (平均値の定理)

$$\dot z(s_k)(t_k - t_{k-1}) \quad (s_k \in [t_{k-1}, t_k])$$

≒ (極限 $|\Delta| \to 0$ をとれば一致)

$$\dot z(\xi_k)(t_k - t_{k-1})$$

$$= \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{k=1}^{N} \underbrace{f(z(\xi_k))\,\dot z(\xi_k)}_{g(\xi_k)}(t_k - t_{k-1})$$

$g(\xi_k)$; $g(t) \equiv f(z(t))\,\dot z(t)$

$$= \int_a^b f(z(t))\,\dot z(t)\,dt \quad //$$

例
$$\begin{cases} C: z=0 \text{ から } z=1+i \text{ へ向かう線分} \\ f(z) = z^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ C のパラメータ表示は $z(t) = t(1+i)$, $(0 \le t \le 1)$

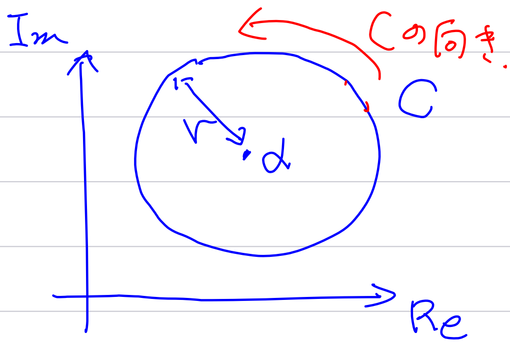
$\Rightarrow \dot z(t) = 1+i$

$$\therefore \int_C f(z)\,dz = \int_0^1 f(z(t))\,\dot z(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 \{t(1+i)\}^2 (1+i)\,dt = (1+i)^3 \int_0^1 t^2\,dt$$

$$= \frac{1}{3}(1+i)^3$$

例 C : $\alpha \in \mathbb{C}$ を中心とした半径 r の円周に反時計まわりの向きを入れたもの



パラメタ表示は

$$z(t) = \alpha + r e^{it}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\left(\Rightarrow \dot{z}(t) = i r e^{it} \right)$$

$\Rightarrow$ 自然数 m に対して,

$$\boxed{\int_C \frac{dz}{(z-\alpha)^m} = \begin{cases} 2\pi i & \cdots\ m=1 \\ 0 & \cdots\ m=2,3,\cdots\cdots \end{cases}}$$

$\because$

$$\text{左辺} = \int_0^{2\pi} \frac{\overbrace{\dot{z}(t)}^{= i r e^{it}}}{(\underbrace{z(t)-\alpha}_{= r e^{it}})^m}\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{i r e^{it}}{r^m e^{imt}}\, dt$$

$$= \frac{i}{r^{m-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-m)t}\, dt$$

$$= \frac{i}{r^{m-1}} \times \begin{cases} 2\pi & \cdots\ m=1 \\ \underbrace{\left[\dfrac{e^{i(1-m)t}}{i(1-m)} \right]_{t=0}^{t=2\pi}}_{=0} & \cdots\ m=2,3,\cdots \end{cases}$$

$$= \text{右辺}$$

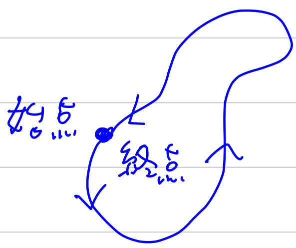
複素関数論　講義　第9回目

複素関数の積分は，微分と同様に，
見かけの単純さからは想像もつかない深い
性質をもつ。今週（と来週）はこのことに
ついて学習する。

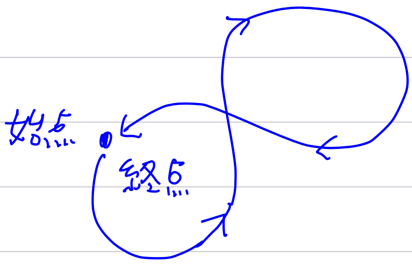
3.3 コーシーの積分定理

閉曲線：始点と終点が一致する曲線

単純閉曲線：自己交差しない閉曲線

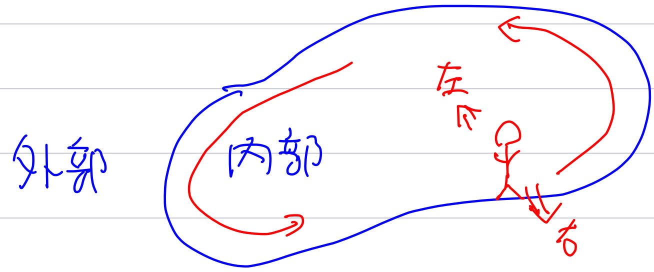


単純閉曲線



単純でない閉曲線

@ 単純閉曲線には通常，内部を左手に見る
向きをとれる：



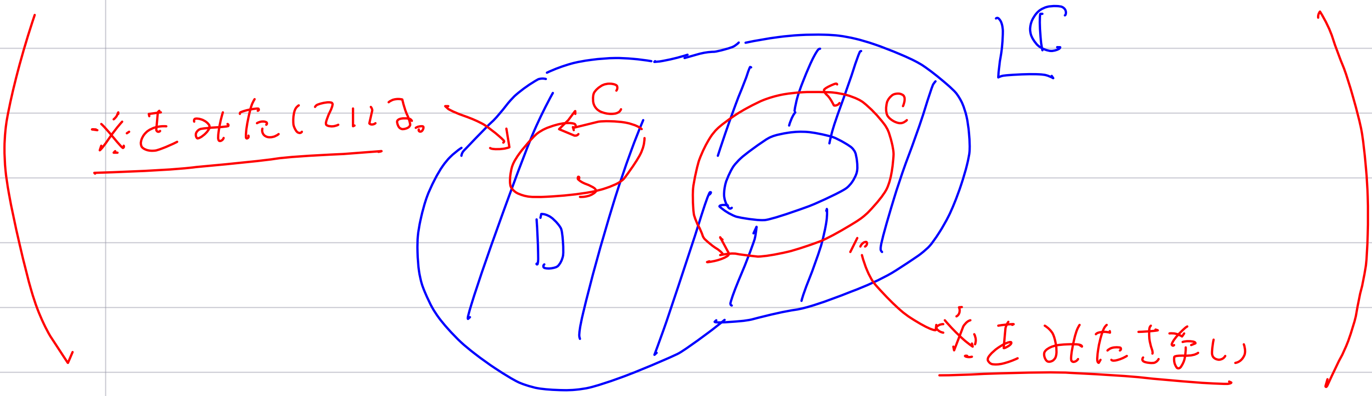
コーシーの積分定理

D：$\mathbb{C}$上の領域、$f: D \to \mathbb{C}$ 正則関数

C：D内の単純閉曲線で Cの内部は※すべてD上にある。

$\Longrightarrow$

$$\boxed{\int_C f(z)\,dz = 0}$$



この定理は単純閉曲線Cの内部にDの穴がなければ、D上の正則関数をCに沿って1周積分した値は必ず0であることを述べている。

かなり不思議！ ⟸ 正則関数のもつ著しい性質

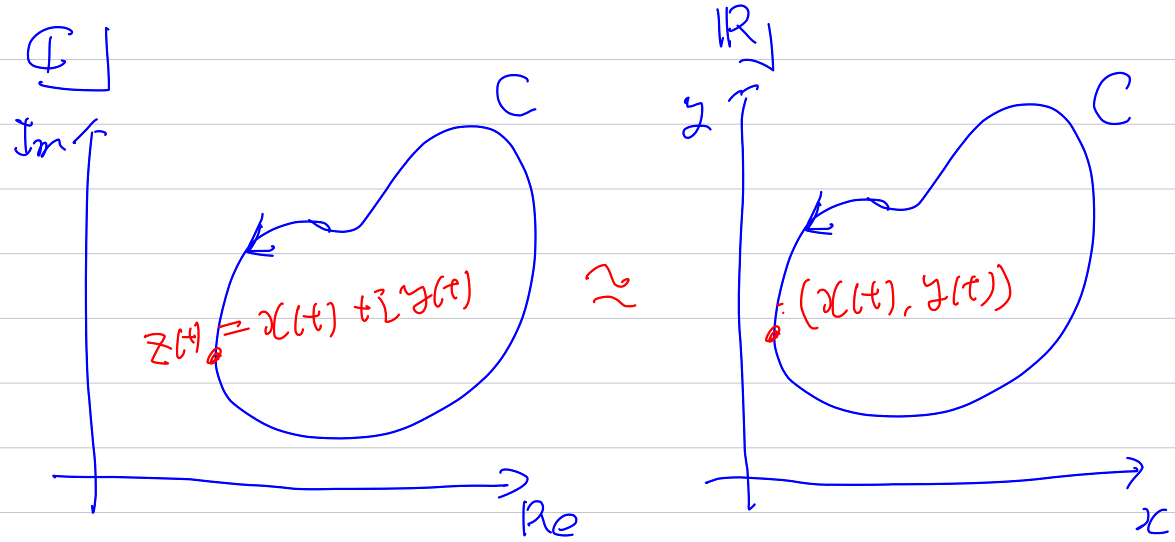
$\boxed{\text{証明}}$ この不思議な性質は、複素線積分のもつ見かけ以上の深い構造に由来している。

実際 $z(t), (a \leq t \leq b)$ を C のパラメータ表示として

$$
\begin{cases}
z(t) = \underbrace{x(t)}_{\mathbb{R}} + i \underbrace{y(t)}_{\mathbb{R}} \quad \left(\simeq (x(t), y(t)) \right) \\
f(z) = \underbrace{u(x,y)}_{\mathbb{R}} + i \underbrace{v(x,y)}_{\mathbb{R}}, \quad z = \underbrace{x}_{\mathbb{R}} + i \underbrace{y}_{\mathbb{R}}
\end{cases}
$$

と実部と虚部ごとに表記し、

C を $(x(t), y(t)), (a \leq t \leq b)$ をパラメータ表示とする $\mathbb{R}^2$ 上の曲線と同一視すると…



$$\boxed{\int_C f(z)\,dz} = \int_a^b \underbrace{f(z(t))}_{u(x(t),y(t))+iv(x(t),y(t))} \underbrace{\dot{z}(t)}_{\dot{x}(t)+i\dot{y}(t)}\,dt$$

$$= \int_a^b \left[u(x(t),y(t))\dot{x}(t) - v(x(t),y(t))\dot{y}(t)\right]dt$$

$$+ i\int_a^b \left[v(x(t),y(t))\dot{x}(t) + u(x(t),y(t))\dot{y}(t)\right]dt$$

$$= \boxed{\int_C u\,dx - v\,dy}_{①} + i\boxed{\int_C v\,dx + u\,dy}_{②}$$

が成立。

注 一般に、

$$\int_C P\,dx + Q\,dy$$

$$= \int_a^b P(x(t),y(t))\dot{x}(t)\,dt + Q(x(t),y(t))\dot{y}(t)\,dt$$

と表記する。このとき、Ω をCの内部として

$$\boxed{\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_\Omega (-P_y + Q_x)\,dx\,dy}$$

(グリーンの公式 (証明は教科書92〜93P参照))

が成立。

グリーンの公式を用いて計算をすすめると…

$$\underbrace{\boxed{\int_C u\,dx - v\,dy}}_{①} = \iint_\Omega \underbrace{(-u_y - v_x)}_{=0}\,dx\,dy = 0$$

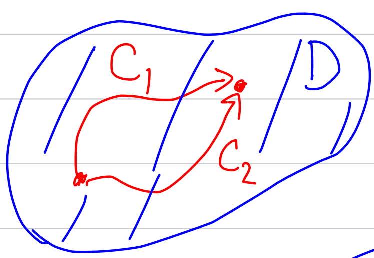
∵ コーシー・リーマンの方程式

$$\underbrace{\boxed{\int_C v\,dx + u\,dy}}_{②} = \iint_\Omega \overbrace{(-v_y + u_x)}^{=0}\,dx\,dy = 0$$

$$\therefore \int_C f(x)\,dx = \boxed{}_{①} + \boxed{}_{②} = 0 \quad //$$

(2) コーシーの積分定理の応用することにより、積分路を変形することができる。

f：下図の領域D上で正則とする

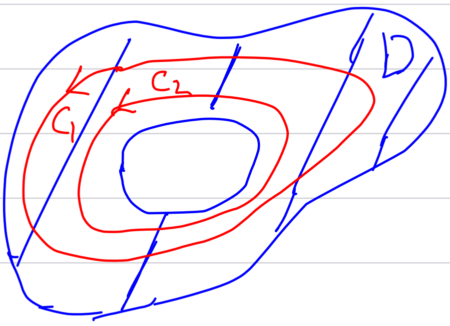


$$\Rightarrow \boxed{\int_{C_1} f\,dz = \int_{C_2} f\,dz}$$

∵ コーシーの積分定理より

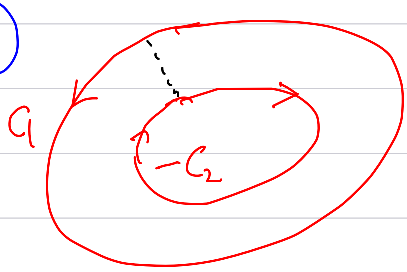
$$\underbrace{\int_{C_1+(-C_2)}}_{=\int_{C_1} + \int_{-C_2} = \int_{C_1} - \int_{C_2}} f(z)\,dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$

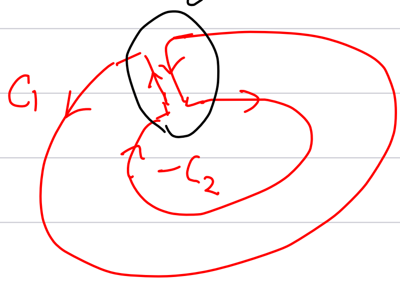


$$\Rightarrow \boxed{\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz}$$

∵



$=$



ここの積分は打ち消しあう。

∴コーシーの積分公式より

$$\underbrace{\int_{C_1+(-C_2)}}_{\int_{C_1} - \int_{C_2}} f(z)\,dz = 0$$

$$\therefore \int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$

複素関数論　講義　第10回目

今回は複素積分に関するもうひとつの重要な公式(コーシーの積分公式)について学習する。

3.4 コーシーの積分公式

正則関数 $f(z)$ の $z=\alpha$ での値は

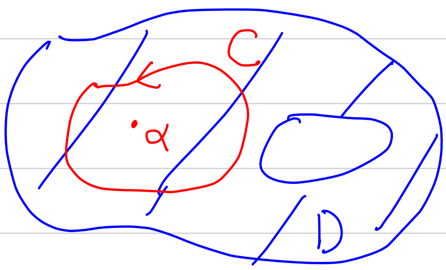
α を内部にもつ単純閉曲線上の $f(z)$ の値から定まる (これもかなり不思議!):

コーシーの積分公式

D: $\mathbb{C}$ 上の領域, $f: D \to \mathbb{C}$ 正則関数

C: D 内の単純閉曲線で C の内部はすべて D 上にある。 (コーシーの積分定理と同じ仮定!)

α: C の内部の点



$\Rightarrow$

$$\boxed{f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz}$$

(右辺は f の C 上での値のみから定まる!)

◎ コーシーの積分公式の右辺の被積分関数

$\dfrac{f(z)}{z-\alpha}$ は α に関して何度でも微分可能！

$$\frac{\partial^n}{\partial \alpha^n}\left(\frac{f(z)}{z-\alpha}\right) = n!\,\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}$$

これより，次がわかる：

公式

$$\boxed{f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}\,dz}$$

n階導関数の積分公式

定理　正則関数は無限回微分可能

例　C：原点を内部にもつ単純閉曲線

⇒

・$\displaystyle\int_C \frac{\underbrace{e^z}_{=f(z)}}{z}\,dz = \int \frac{f(z)}{z-0}\,dz \underset{\text{コーシーの積分公式}}{=} 2\pi i \overbrace{f(0)}^{=1} = 2\pi i$

・$\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!}\underbrace{f^{(n)}(0)}_{=1} = \frac{2\pi i}{n!}$

(コーシーの積分公式の証明)

C_r: αを中心, rを半径とする円周に反時計回りの向きを入れたもの

として, rを十分小にとって, C_r が C の内部にあるようにする:

このとき, 第9回目講義の最終ページ の積分路の変更により

$$\int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz = \int_{C_r}\frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz \quad ①$$

さらに $f(z) = f(\alpha) + (f(z)-f(\alpha))$ なので

$$\int_{C_r}\frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz = f(\alpha)\underbrace{\int_{C_r}\frac{dz}{z-\alpha}}_{=\,2\pi i} + \underbrace{\int_{C_r}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\,dz}_{=\,☆_r} \quad ②$$

(第8回目講義の最終ページ) →

よって ①, ② より

$$\int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz = 2\pi i f(\alpha) + ☆_r$$

さらに

$$\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} = \left[\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} - f'(\alpha)\right] + f'(\alpha)$$

なので

$$☆_r = \int_{C_r}\left[\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} - f'(\alpha)\right]dz + f'(\alpha)\int_{C_r} 1\,dz$$

C_r 長さ → 0 $(r \to 0)$

$(r\to 0) \to 0$

∵ $z \in C_r \Rightarrow |z-\alpha| \leq r$

$(\because r\to 0 \Rightarrow z \to \alpha)$

$\int_{C_r} 1\,dz = 0$ ∵ コーシーの積分定理

$$\to 0 \quad (r \to 0)$$

$$\therefore \int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz = 2\pi i f(\alpha)$$

$$\therefore f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz$$

//

複素関数論　講義　第11回目

第4章　留数定理

ここからは、正則関数の積分値を、積分を実行することなく求める強力な手段について学習する。

- まずは、正則関数は各点のまわりで必ず「べき級数」で一意的に表わされることを学ぶ。

4.1 テイラー展開

① 複素数列の収束

$$\begin{cases} z_n = x_n + i y_n & (x_n, y_n \in \mathbb{R}) \\ A = a + ib & (a, b \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

に対し、

- $\lim_{n\to\infty} z_n = A \overset{\text{定義}}{\iff} |z_n - A| \to 0 \quad (n\to\infty)$

$$\iff \begin{cases} x_n \to a \\ y_n \to b \end{cases} \quad (n\to\infty)$$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n \equiv \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} z_n$

例 $|z|<1$ に対し $\boxed{\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n}$

(∵)
$$S_N = 1 + z + \cdots + z^N$$
⇒
$$-\big)\ zS_N = z + \cdots + z^N + z^{N+1}$$
$$(1-z)S_N = 1 - z^{N+1}$$
$$\therefore\ S_N = \frac{1 - z^{N+1}}{1-z}$$
$z^{N+1} \to 0\ (N\to\infty)$

(∵) $|z^{N+1}| = |z|^{N+1} \to 0$

(∵) $|z|<1$

$$\therefore\ \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{N\to\infty} S_N = \frac{1}{1-z}$$

◎ この例の右辺のように、一般に、

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n, \quad (\alpha, c_n \in \mathbb{C})}$$

とあらわされる級数を べき級数 とよぶ。

・次の定理は、正則関数 $f(z)$ は

各点 $z=\alpha$ のまわりで、べき級数により

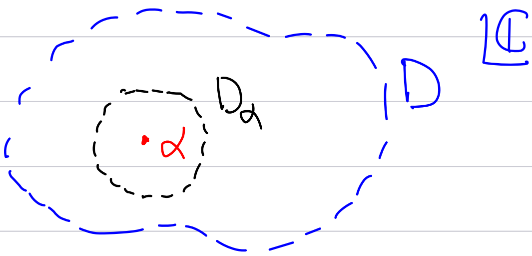
一意的にあらわされることを述べている。

定理 $D \subset \mathbb{C}$ 領域、 $f: D \to \mathbb{C}$ 正則 とする。

$\alpha \in D$ に対し、αを中心とする円板

$$D_\alpha \equiv \{ z \mid |z-\alpha| < R \}$$

を D の内部にとる。

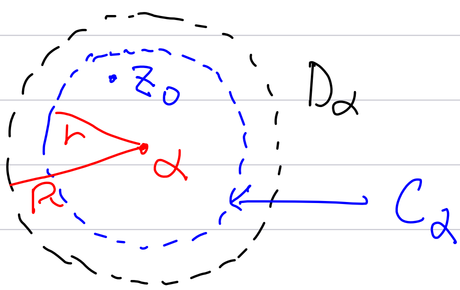


このとき、fは D_α 上で

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-\alpha)^n, \quad (C_n \in \mathbb{C})}$$

とべき級数で表される。ここで $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ はひととおりに定まり $\boxed{C_n = \dfrac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}}$ で与えられる。

証明 D_α 上の任意の点 z_0 に対し、αを中心とする円周 $C_\alpha \equiv \{ z \mid |z-\alpha| = r \}$ を図のようにとる。



このとき，コーシーの積分公式より

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\alpha} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\alpha} \frac{\frac{f(z)}{z-\alpha}}{} \boxed{\frac{1}{\frac{z-z_0}{z-\alpha}}}\,dz$$

$$\boxed{} = \frac{1}{\frac{z-\alpha-(z_0-\alpha)}{z-\alpha}} = \frac{1}{1-\frac{z_0-\alpha}{z-\alpha}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z_0-\alpha}{z-\alpha}\right)^n$$

例

$$\left|\frac{z_0-\alpha}{z-\alpha}\right| = \frac{r}{R} < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\alpha}\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}\,dz}\,(z_0-\alpha)^n$$

第10回講義の公式

$$\parallel$$

$$\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$$

よって，z_0 を z とかくことにして，

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n$$

とべき級数により表現される

さらに、

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-\alpha)^k$$

と表現されるならば、この両辺をn回微分して

$$f^{(n)}(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k \underbrace{\left\{(z-\alpha)^k\right\}^{(n)}}_{=}$$

$$\begin{cases} 0 & \cdots\ k \leq n-1 \\ n! & \cdots\ k=n \\ k(k-1)\cdots(k-(n-1))\underbrace{(z-\alpha)^{k-n}}_{z=\alpha\text{で}0} & \cdots\ k \geq n+1 \end{cases}$$

$$\therefore f^{(n)}(\alpha)=c_n n!$$

$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\right.$ のうち、$k \neq n$ の値はすべて$\left.0\right)$

$$\therefore c_n=\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$$ でなくてはならない。

例 ・ $f(z) = e^z$

$$\Rightarrow \quad f^{(n)}(z) = e^z \qquad \therefore f^{(n)}(0) = 1$$

$$\therefore f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

・ $f(z) = \dfrac{e^z}{1-z}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$= \Big(1 + \cdots + \underbrace{z^{n-k}} + \cdots\cdots\Big)\Big(1 + \cdots + \underbrace{\frac{z^k}{k!}} + \cdots\Big)$$

$$\frac{1}{k!} z^n \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right) z^n$$

(ただし $|z| \leq 1$)

複素関数論　講義　第12回目

- 前回は、正則関数 $f(z)$ が各点 $z=\alpha$ のまわりで、べき級数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n$$

の形に、一意的にあらわされることを学んだが、

$z=\alpha$ で正則でない場合であっても

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n$$ ←「負のべき」があらわれる。

と一意的にあらわされることを学ぶ。

4.2 ローラン展開

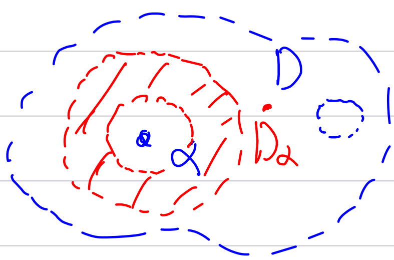
定理 $D\subset\mathbb{C}$ 領域、$\alpha\in D$ として

$f: D\setminus\{\alpha\}\longrightarrow\mathbb{C}$ 正則 とする。
←(D から α を除いた領域)

α を中心とする円環領域

$$\dot{D}_\alpha=\{z\in\mathbb{C}\mid r_1<|z-\alpha|<r_2\}\quad(0<r_1<r_2)$$

を $D\setminus\{\alpha\}$ の内部にとる。



このとき、f は $\dot{D}_\alpha$ 上で

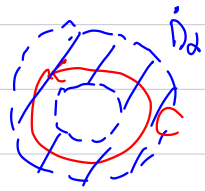
$$\boxed{f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n, \quad (c_n\in\mathbb{C})}$$

とあらわされる。(これを f の α を中心とするローラン展開という) ここで $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ はひととおりに定まり、

$$\boxed{c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}\,dz}$$

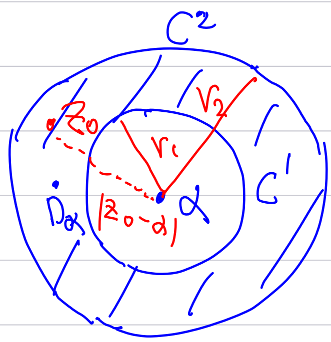
(C は中心を α とする $\dot{D}_\alpha$ 内の円周)

で与えられる。



証明 $\dot{D}_\alpha$ の境界は次の2つの円周からなる:

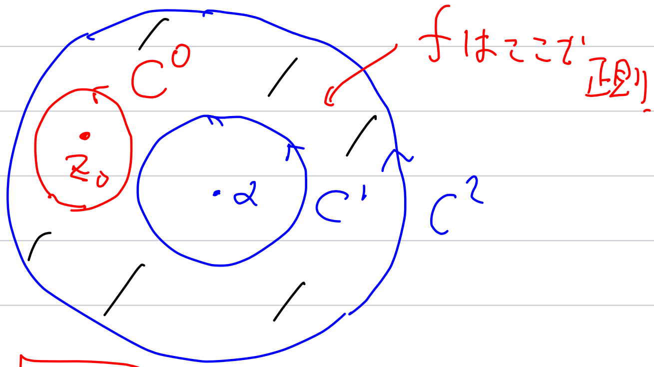
$$C^1=\{z \mid |z-\alpha|=r_1\}$$
$$C^2=\{z \mid |z-\alpha|=r_2\}$$



このとき、$z_0\in\dot{D}_\alpha$ に対して、

$$\boxed{r_1 < |z_0 - \alpha| < r_2}$$ ※

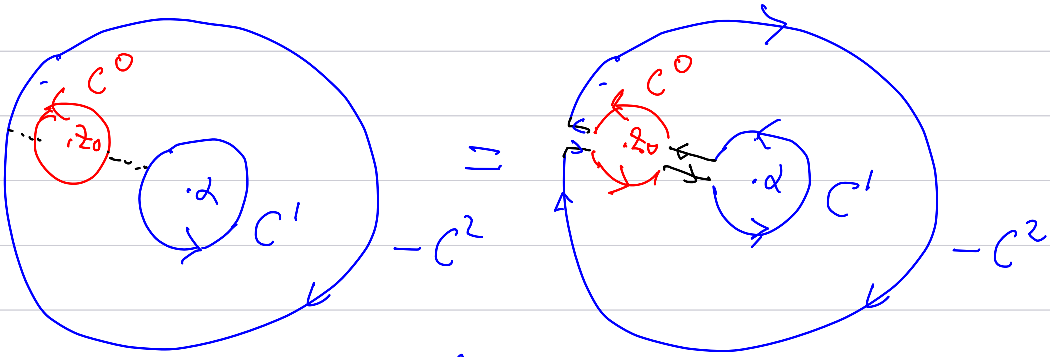
がなりたつ。さらに、z_0を中心とする円周 C^0 を図のようにとる。



⇒ コーシーの積分公式より、

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^0} \boxed{\frac{f(z)}{z-z_0}}\,dz \quad \text{— ①}$$

一方



（□ が正則である領域内の単純閉曲線）

より、コーシーの積分定理から

$$\underbrace{\int_{C^0+C^1-C^2}}_{=\int_{C^0}+\int_{C^1}-\int_{C^2}} \boxed{\frac{f(z)}{z-z_0}}\,dz = 0 \quad \text{— ②}$$

① と ③ より,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^2} \boxed{\frac{f(z)}{z-z_0}}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{C^1} \boxed{\frac{f(z)}{z-z_0}}\,dz$$

$$\frac{f(z)}{z-z_0} = \frac{f(z)}{z-\alpha-(z_0-\alpha)} = \frac{f(z)}{z-\alpha}\times\boxed{\frac{1}{1-\frac{z_0-\alpha}{z-\alpha}}}$$

$$\boxed{\frac{1}{1-\frac{z_0-\alpha}{z-\alpha}}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z_0-\alpha}{z-\alpha}\right)^n$$

$$\because \left|\frac{z_0-\alpha}{z-\alpha}\right| = \frac{|z_0-\alpha|}{r_2} < 1 \quad ※$$

$$-\frac{f(z)}{z-z_0} = \frac{f(z)}{z_0-\alpha-(z-\alpha)} = \frac{f(z)}{z_0-\alpha}\times\boxed{\frac{1}{1-\frac{z-\alpha}{z_0-\alpha}}}$$

$$\boxed{\frac{1}{1-\frac{z-\alpha}{z_0-\alpha}}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\alpha}{z_0-\alpha}\right)^n$$

$$\because \left|\frac{z-\alpha}{z_0-\alpha}\right| = \frac{r_1}{|z_0-\alpha|} < 1 \quad ※$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C^2}\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}\,dz\cdot(z_0-\alpha)^n$$

$$+ \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C^1} f(z)(z-\alpha)^n\,dz\cdot(z_0-\alpha)^{-(n+1)}}$$

$\|$ $m = -(n+1)$ とおく,

$$\sum_{m=-\infty}^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{C^1}\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{m+1}}\,dz\cdot(z_0-\alpha)^m$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \boxed{\int_{C^2} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz} \cdot (z_0-\alpha)^n$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{2\pi i} \boxed{\int_{C^1} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz} \cdot (z_0-\alpha)^n$$

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz$$

コーシーの積分定理を用いた積分路の変更…第9回講義

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \boxed{\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz} (z_0-\alpha)^n$$

とローラン展開で表わされる。

$\{C_n\}$の一意性について

D'_α 上 $\underbrace{f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z-\alpha)^k}$

と表わされているとき、

代入

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\boxed{f(z)}}{(z-\alpha)^{n+1}} dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \boxed{\int_C \frac{dz}{(z-\alpha)^{n+1-k}}} C_k$$

$k=n$

$$\begin{cases} 2\pi i \cdots n+1-k=1 \\ 0 \cdots n+1-k \neq 1 \end{cases}$$

(8回目講義の例)

$$= C_n$$

つまり C_nは $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz$ でなくてはならない //

例　$f(z) = \dfrac{1}{z-2}$ の $z=0$ のまわりでのローラン展開を求めてみる。

$|z|<2 \Rightarrow f(z) = \dfrac{1}{z-2} = -\dfrac{1}{1-\frac{z}{2}}$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n \qquad \because \left|\frac{z}{2}\right|<1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{2^n} z^n$$

$|z|>2 \Rightarrow f(z) = \dfrac{1}{z-2} = \dfrac{1}{z}\dfrac{1}{1-\frac{2}{z}}$

$$\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{-1}\frac{z^m}{2^{m+1}} \qquad \because \left|\frac{2}{z}\right|<1$$

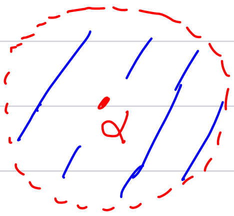
$m = -(n+1)$

複素関数論　講義　第13回目

- 正則でない点を内部に含む単純閉曲線での複素積分の値を代数的な計算で求める方法を学ぶ。

4.3 留数定理

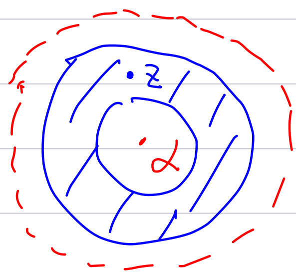
(定) $f(z)$ が $z=\alpha$ のまわりで、α を除いたところで正則であるとき、α を f の孤立特異点という。



(例　$f(z)=\frac{1}{z}$,　$z=0$ は孤立特異点)

前回の講義より孤立特異点を中心とするローラン展開を考えることができる：

$$\boxed{f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-\alpha)^n}$$



このローラン展開において

$c_n \neq 0$ となる負の自然数 n が有限個

しかない場合は

$$\boxed{f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-\alpha)^k} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n \quad (c_{-k} \neq 0)}$$

とかけるが、このとき、α は k位の極

であるという（$k=0$ のときは除去可能な特異点という）

そうではない場合、α は真性特異点という。

例1　$\varphi(z)$ が $z=\alpha$ のまわりで正則で $\varphi(\alpha) \neq 0$

$\Rightarrow$

$f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-\alpha)^k}$ は α を k位の極にもつ。

$\because$ $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n$ とべき級数で表わされるので

$$f(z) = \frac{c_0}{(z-\alpha)^k} + \frac{c_1}{(z-\alpha)^{k-1}} + \cdots + \frac{c_{k-1}}{z-\alpha} + \cdots$$

また、$\varphi(\alpha) = c_0 \neq 0$

② αをfの孤立特異点とし、それを中心とする

ローラン展開を

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-\alpha)^n$$

とするとき、C_{-1}をfのαにおける留数（りゅうすう）

といい、$\boxed{\mathrm{Res}(f,\alpha)}$であらわす。

$\boxed{\text{公式}}$ αがfのk位の極

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Res}(f,\alpha)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to\alpha}\left\{\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\{(z-\alpha)^k f(z)\}\right\}}$$

$\because$

$$f(z)=\frac{C_{-k}}{(z-\alpha)^k}+\cdots+\frac{C_{-1}}{z-\alpha}+C_0+\cdots$$

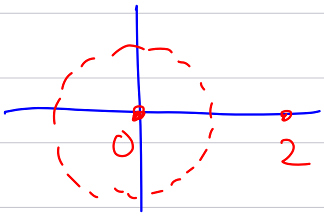
$$\Rightarrow (z-\alpha)^k f(z)=\underbrace{C_{-k}+\cdots}_{k-1\text{回微分は消える}}+C_{-1}(z-\alpha)^{k-1}+C_0(z-\alpha)^k+\cdots$$

$$\Rightarrow \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\{(z-\alpha)^k f(z)\}=(k-1)!\,C_{-1}+\underbrace{k!\,C_0(z-\alpha)+\cdots}_{z\to\alpha\text{とすると消える}}$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to\alpha}\left\{\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\{(z-\alpha)^k f(z)\}\right\}=(k-1)!\,C_{-1}$$

$C_{-1}=\mathrm{Res}(f,\alpha)$

例 $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z-2)}$　$z=0$ は孤立特異点



また、

$$\varphi(z)=\frac{1}{z-2}$$

は $z=0$ のまわりで正則であり、

$\varphi(0)=-\dfrac{1}{2}\neq 0$ であるので

前の例より、$z=0$ は f の2位の極である

また、留数は公式より

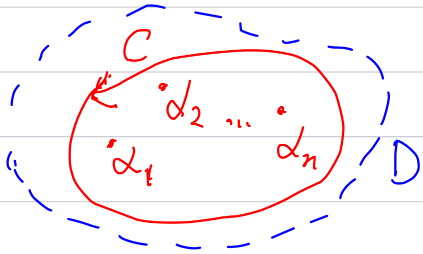
$$\mathrm{Res}(f,0)=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\{\underbrace{z^2 f(z)}_{=\varphi(z)=\frac{1}{z-2}}\}$$

$$=\lim_{z\to 0}\left\{-\frac{1}{(z-2)^2}\right\}$$

$$=-\frac{1}{4}$$

注 孤立特異点を内部に含む単純閉曲線上の積分は(実際に積分計算することなく)留数により求めることができる

定理（留数定理）

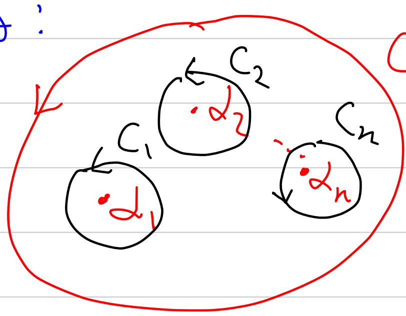


$$\begin{cases} D \subset \mathbb{C} \quad 領域 \\ f : D \setminus \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \to \mathbb{C} \quad 正則 \\ C : \alpha_1, \cdots, \alpha_n を内部にもつ D 内の単純閉曲線 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$

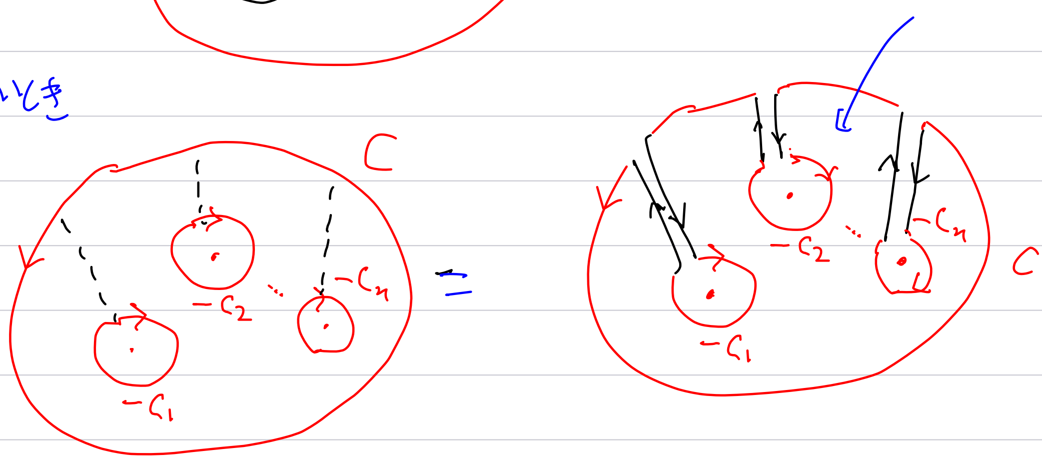
$$\boxed{\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, \alpha_k)}$$

証明　各 α_k を中心とする円周 C_k を図のようにとる：



（fはここで正則！）

このとき



コーシーの積分公式より

$$\underbrace{\int_{C-C_1-C_2\cdots-C_n}}_{\int_C-\int_{C_1}-\int_{C_2}-\cdots-\int_{C_n}} f(z)\,dz = 0$$

$$\therefore \int_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \boxed{\int_{C_k} f(z)\,dz}$$

さらに $z=\alpha_k$ を中心とした f のローラン展開を

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-\alpha_k)^n$$

とするとき、

$$\boxed{\int_{C_k} f(z)\,dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{C_k} (z-\alpha_k)^n\,dz}_{\begin{cases} 2\pi i & \cdots\ n=-1 \\ 0 & \cdots\ n\neq -1 \end{cases}}$$

$\left(\begin{array}{l} n\geq 0:\text{コーシーの積分定理} \\ n\leq -1:\text{8回目の講義の例} \end{array}\right)$

$$= 2\pi i\, a_{-1} = \mathrm{Res}(f, \alpha_k)$$

$$\therefore \int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, \alpha_k)$$

複素関数論　講義　第14回目

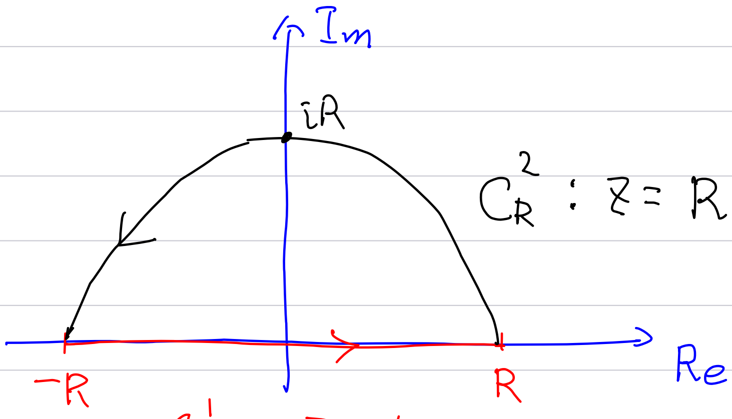
・最終回の今回は、留数定理を用いて(実関数の)積分の値を求める方法を学習します。ここまでの講義の集大成になります。

4.4 実関数の積分への応用

例　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$ の値を求めよう。

$f(z) = \dfrac{z^2}{1+z^4}$ とおき、図のような経路上の複素積分を考える：

$C_R = C_R^1 + C_R^2$　$(R>0$：十分大$)$



$C_R^2 : z = Re^{it}$　$(0 \leq t \leq \pi)$ 半径 R の半円周

$C_R^1 : z = t$　$(-R \leq t \leq R)$ 実軸上の区間 $[-R, R]$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{C_R} f(z)\,dz = \int_{C_R^1} f(z)\,dz + \int_{C_R^2} f(z)\,dz \equiv \mathrm{I}_R + \mathrm{II}_R} \quad \text{—①}$$

ここで

・ $\mathrm{I}_R = \int_{-R}^{R} f(t)\,dt \xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$ —②

($z=t \Rightarrow \dot{t}=1$)

: 求めたい積分

・ C_R^2 上

$$|f(z)| = |f(Re^{it})| = \left|\frac{(Re^{it})^2}{1+(Re^{it})^4}\right|$$

$$= \frac{|R^2 e^{2it}|}{|1+R^4 e^{4it}|}$$

(分母に対して三角不等式 $|a+b| \geq |a|-|b|$ を用いた!)

$$\leq \frac{|R^2 e^{2it}|}{|R^4 e^{4it}|-1} = \frac{R^2}{R^4-1}$$

$$\therefore |\mathrm{II}_R| \leq \frac{R^2}{R^4-1} \times \underbrace{(C_R^2 \text{の長さ})}_{\pi R}$$

8回目講義の定理

$$= \pi \frac{R^3}{R^4-1} \to 0 \quad (R\to\infty)$$

$$\therefore \mathrm{II}_R \to 0 \quad (R\to\infty) \quad \text{—③}$$

①②③ $\Rightarrow$ $$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz} \quad ☆$$

さらに $\int_{C_R} f(z)dz$ は留数定理により求められる：

$$1+z^4 = \underbrace{(z^2-i)}_{=(z-\alpha)(z+\alpha)}\underbrace{(z^2+i)}_{=z^2-(-i)=(z-\beta)(z+\beta)}$$

$(z-\alpha)(z+\alpha)$, $\boxed{\alpha = e^{\frac{\pi}{4}i}}$ $(\alpha^2 = i)$

$z^2-(-i) = (z-\beta)(z+\beta)$, $\beta = e^{-\frac{\pi}{4}i} = \overline{\alpha}$ $(\beta^2 = -i)$

$$= (z-\alpha)(z+\alpha)(z-\overline{\alpha})(z+\overline{\alpha})$$

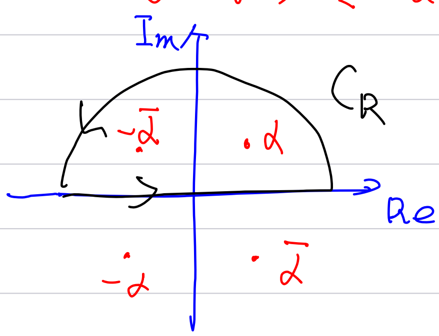
これより $f(z) = \dfrac{z^2}{1+z^4}$ は

$z = \pm\alpha, \pm\overline{\alpha}$ に1位の極を持つ。

(たとえば $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{z-\alpha}$, $\varphi(z) = \dfrac{z^2}{(z+\alpha)(z^2+i)}$

$z=\alpha$ のまわりで正則かつ $\varphi(\alpha) \neq 0$

より $z=\alpha$ は1位の極)



C_R 内にあるのは、(R:十分大)

$\alpha = e^{\frac{\pi}{4}i}$, $-\overline{\alpha} = e^{\frac{3}{4}\pi i}$

の2点。

$$\mathrm{Res}(f, \alpha) = \lim_{z \to \alpha} \{ \underbrace{(z-\alpha) f(z)}_{\parallel} \}$$

$$\frac{z^2}{(z+\alpha)(z-\bar{\alpha})(z+\bar{\alpha})}$$

$$= \frac{\alpha^{\cancel{2}}}{2\cancel{\alpha} \cdot 2i\,\mathrm{Im}\,\alpha \cdot 2\,\mathrm{Re}\,\alpha}$$

$$= \frac{\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}}{8i \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1-i}{4\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{Res}(f, -\bar{\alpha}) = \lim_{z \to -\bar{\alpha}} \{ \underbrace{(z+\bar{\alpha}) f(z)}_{\parallel} \}$$

$$\frac{z^2}{(z-\alpha)(z+\alpha)(z-\bar{\alpha})}$$

$$= \frac{\bar{\alpha}^{\cancel{2}}}{\cancel{-}2\,\mathrm{Re}\,\alpha \cdot 2i\,\mathrm{Im}\,\alpha \cdot (\cancel{-}2\cancel{\bar{\alpha}})}$$

$$= \frac{\cos\frac{\pi}{4} - i \sin\frac{\pi}{4}}{8i \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\frac{1+i}{4\sqrt{2}}$$

$$\therefore \int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\frac{1-i}{4\sqrt{2}} - \frac{1+i}{4\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \text{☆ より} \quad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}}$$