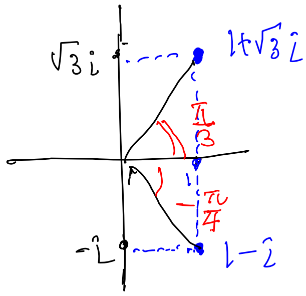
所属　　　学生番号：　　　　　　名前：

複素関数論　第 1 回講義　宿題

1. $(1+\sqrt{3}i)(1-i)$ を極形式で表せ.

2. $\dfrac{(1-i)^4}{(1+i)^6}$ を極形式で表せ.



1. $\cdot\ |1+\sqrt{3}i| = \sqrt{1+\sqrt{3}^2} = 2$, $\arg(1+\sqrt{3}i) = \dfrac{\pi}{3}$

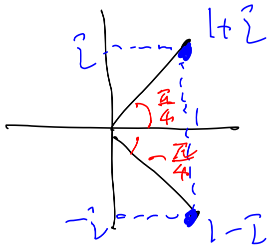
$\cdot\ |1-i| = \sqrt{1+(-1)^2} = \sqrt{2}$, $\arg(1-i) = -\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore |(1+\sqrt{3}i)(1-i)| = |1+\sqrt{3}i|\,|1-i| = 2\sqrt{2}$

$\arg(1+\sqrt{3}i)(1-i) = \arg(1+\sqrt{3}i) + \arg(1-i) = \dfrac{\pi}{12}$

$\therefore (1+\sqrt{3}i)(1-i) = \boxed{2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)}$

2. $|1\pm i| = \sqrt{1+(\pm 1)^2} = \sqrt{2}$, $\arg(1\pm i) = \pm\dfrac{\pi}{4}$



$\therefore \left|\dfrac{(1-i)^4}{(1+i)^6}\right| = \dfrac{|1-i|^4}{|1+i|^6} = \dfrac{\sqrt{2}^4}{\sqrt{2}^6} = \dfrac{1}{2}$

$$\arg\frac{(1-i)^4}{(1+i)^6} = 4\arg(1-i) - 6\arg(1+i)$$

$$= 4\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 6\cdot\frac{\pi}{4} = -\frac{5}{2}\pi$$

$$= -\frac{\pi}{2}\ \underbrace{-2\pi}_{}$$ 2πの整数倍

$$= -\frac{\pi}{2}$$ 同一視

$\therefore \dfrac{(1-i)^4}{(1+i)^6} = \boxed{\dfrac{1}{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)}$

所属　　　学生番号：　　　　　　名前：

複素関数論　第 2 回講義　宿題

1. 次の値を求めよ．　(i) $\exp(2 - \frac{\pi}{6}i)$　　(ii) $\exp(\log 3 + \pi i)$

2. $z^4 = -2 + 2\sqrt{3}\,i$ を満たす複素数 z をすべて求めよ．

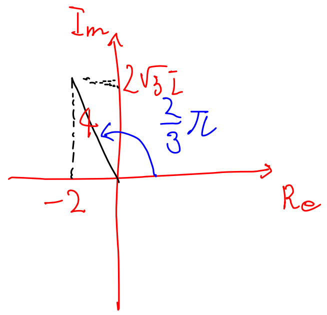
1.(i) $\exp(2-\frac{\pi}{6}i) = e^2 e^{-\frac{\pi}{6}i} = e^2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$$= \boxed{e^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)}$$

(ii) $\exp(\log 3 + \pi i) = e^{\log 3} e^{\pi i} = 3(\underbrace{\cos\pi}_{=-1} + i\underbrace{\sin\pi}_{=0})$

$$= \boxed{-3}$$

2. $-2+2\sqrt{3}i = 4\left(\underbrace{-\frac{1}{2}}_{=\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)} + \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{=\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)} i\right)$



$$= 4e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

$z = re^{i\theta}$ と極表示して，　$z^4 = r^4 e^{i4\theta}$　　$r > 0$

〜〜 どうしの極表示を比較して．

$r^4 = 4$，　　$4\theta = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$　　k は整数．

$\Downarrow$ $(r>0)$　　　$\Downarrow$

$r = \sqrt{2}$　　$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k}{2}\pi \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{2}{3}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{5}{3}\pi$

($0 \leq \theta < 2\pi$ となるのは $k = 0, 1, 2, 3$)

$\therefore$ $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}, \sqrt{2}e^{i\frac{2}{3}\pi}, \sqrt{2}e^{i\frac{7}{6}\pi}, \sqrt{2}e^{i\frac{5}{3}\pi}$

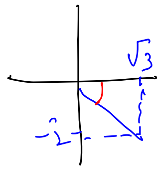
$$= \boxed{\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}},\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}},\ \frac{-\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}},\ \frac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}}}$$

所属　　　学生番号：　　　　　　　　名前：

複素関数論　第 3 回講義　宿題

1. 次の値を求めよ．　(i) $\mathrm{Log}(\sqrt{3}-i)$　　(ii) $(1+i)^i$　　(iii) $\cos(\pi - i)$

2. $\sin(\frac{\pi}{2}+i\theta) = 2$ を満たす実数 θ を求めよ．



1.(i) $|\sqrt{3}-i| = \sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2} = 2$,　$\arg(\sqrt{3}-i) = -\frac{\pi}{6}$

主値の場合は $-\pi < -\frac{\pi}{6} \leq \pi$ に取る!

$\therefore \mathrm{Log}(\sqrt{3}-i) = \log|\sqrt{3}-i| + i\arg(\sqrt{3}-i)$

$= \boxed{\log 2 - \frac{\pi}{6} i}$

(ii) $(1+i)^i = e^{i \underbrace{\log(1+i)}} = \boxed{e^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)} e^{\frac{i}{2}\log 2} \ (k\text{は整数})}$

$\left(\log|1+i| + i\arg(1+i) = \underbrace{\log\sqrt{2}}_{(\frac{1}{2}\log 2)} + i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right) \right)$

(iii) $\cos(\pi - i) = \dfrac{e^{i(\pi-i)} + e^{-i(\pi-i)}}{2}$

$= \dfrac{e\, e^{i\pi} + e^{-1} e^{-i\pi}}{2}$

$e^{-i\pi} = \cos(-\pi)+i\sin(-\pi) = -1$

$\cos\pi + i\sin\pi = -1$

$= \boxed{-\frac{1}{2}(e+e^{-1})}$

2. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+i\theta\right) = \dfrac{e^{i(\frac{\pi}{2}+i\theta)} - e^{-i(\frac{\pi}{2}+i\theta)}}{2i} = \dfrac{e^{-\theta} e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{\theta} e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2i}$

$\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

$-i$

$= \frac{1}{2}(e^{-\theta}+e^{\theta})$

$\therefore \sin\left(\frac{\pi}{2}+i\theta\right) = 2 \iff \frac{1}{2}(e^{-\theta}+e^{\theta}) = 2$.

$\iff (e^{\theta})^2 - 4e^{\theta} + 1 = 0$

$\iff e^{\theta} = 2 \pm \sqrt{3}$

$\iff \boxed{\theta = \log(2\pm\sqrt{3})}$

所属　　　学生番号：　　　　　　　名前：

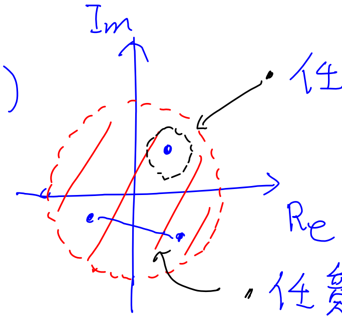
複素関数論　第 4 回講義　宿題

1. 次の集合は領域か？理由とともに答えよ．

   (i) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < |z| < 1\}$　　　(ii) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \neq 1\}$

2. 複素関数 $f(z) = z^n$ (n は自然数) に対して，$\displaystyle\lim_{z\to\alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha}$ を求めよ．

1 (i)

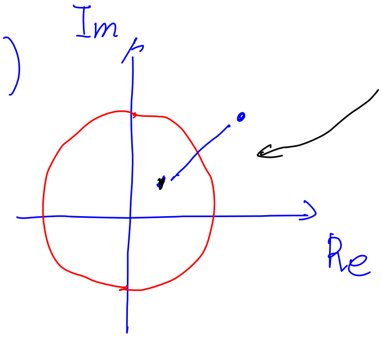


・任意の点はそのまわりも集合内に含まれる
⇒ 開集合

・任意の2点は集合内の線分で結べる ⇒ 連結

よって <u>領域である</u>

(ii)



・単位円の内の点と外の点を結ぶとき、かならず集合の外である単位円周と交わってしまう ⇒ 連結でない。

よって <u>領域ではない</u>

(iii)

$$\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} = \frac{z^n - \alpha^n}{z-\alpha} = \frac{\cancel{(z-\alpha)}(z^{n-1} + z^{n-2}\alpha + \cdots + \alpha^{n-1})}{\cancel{z-\alpha}}$$

$$= z^{n-1} + z^{n-2}\alpha + \cdots + \alpha^{n-1}$$

$$\xrightarrow[z\to\alpha]{} \underbrace{\alpha^{n-1} + \alpha^{n-1} + \cdots + \alpha^{n-1}}_{n\text{項}} = n\alpha^{n-1}$$

$$\therefore \boxed{\lim_{z\to\alpha} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} = n\alpha^{n-1}}$$

所属　　　学生番号：　　　　　　　　名前：

複素関数論　第 5 回講義　宿題

1. n を自然数とするとき，複素関数 $f(z) = \dfrac{(z^2+i)^n}{(z^2-i)^n}$ の導関数を求めよ．

2. 複素関数 $f(z) = \bar{z}$ の $z = 0$ での微分可能性を，その定義に基づいて調べよ．

1.
$$f'(z) = \underbrace{\{(z^2+i)^n\}'}_{= n(z^2+i)^{n-1}\cdot 2z} \frac{1}{(z^2-i)^n} + (z^2+i)^n \underbrace{\left\{\frac{1}{(z^2-i)^n}\right\}'}_{= -n(z^2-i)^{-n-1}\cdot 2z}$$

$$= 2nz \frac{(z^2+i)^{n-1}}{(z^2-i)^{n+1}} \underbrace{\{(\cancel{z^2}-i) - (\cancel{z^2}+i)\}}_{= -2i}$$

$$= -4nz \frac{(z^2+i)^{n-1}}{(z^2-i)^{n+1}} i$$

2. $z = x+iy \ (x, y \in \mathbb{R})$ とするとき，$\bar{z} = x - iy$

$$\therefore \quad \frac{f(z) - \overset{=0}{f(0)}}{z - 0} = \frac{x-iy}{x+iy} \underset{\text{分母・分子}\times(x-iy)}{=} \frac{(x-iy)^2}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - 2i\frac{xy}{x^2+y^2} = ☆$$

・実軸に沿って $z \to 0$ のとき，$(y=0,\ x \to 0)$　☆ $= 1 \to 1$

・虚軸　〃　$z \to 0$　〃　$(x=0,\ y \to 0)$　☆ $= -1 \to -1$

これらの極限値は異なるので極限は存在しない。

よって $\boxed{\text{微分可能ではない}}$。

所属　　　学生番号：　　　　　　　名前：

複素関数論　第 6 回講義　宿題

1. 複素関数 $\dfrac{1}{z^2}$ は $z \neq 0$ において正則関数であるか否かを理由と共に答えよ．

2. $z = x + iy$ (x, y は実数) の関数

$$f(z) = (e^y + e^{-y})\sin x + iv(x, y)$$

が $\mathbb{C}$ 上の正則関数となるような実数関数 $v(x, y)$ で，$v(0, 0) = 1$ を満たすものを求めよ．

1. $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ として.

$$\frac{1}{z^2} = \frac{\bar{z}^2}{\bar{z}^2 z^2} = \frac{\bar{z}^2}{|z|^4} = \underbrace{\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}}_{\eqqcolon u} + i\underbrace{\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}}_{\eqqcolon v}$$

$$\Rightarrow u_x = \frac{2x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3},\ u_y = \frac{2y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3},\ v_x = \frac{2y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3},\ v_y = \frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

コーシー・リーマンの方程式を確認してみる;

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \iff \begin{cases} x(3y^2-x^2) = 0 \cdots ① \\ y(y^2-3x^2) = 0 \cdots ② \end{cases} \overset{※}{\iff} (x, y) = (0, 0) \iff z = 0$$

よって $z \neq 0$ で $\boxed{\text{正則ではない。}}$

※について $(\Leftarrow)$ は明らか。$(\Rightarrow)$: ① $\Rightarrow$ $x = 0$ または $x^2 = 3y^2$

$x=0$ $\Downarrow$ ②に代入 $y = 0$; $x^2 = 3y^2$ $\Downarrow$ ②に代入 $y = 0$; 代入 $(\Rightarrow x = 0)$

2. $u(x, y) \coloneqq (e^y + e^{-y})\sin x$ とおくとき，コーシー・リーマン方程式から

$$u_x = (e^y + e^{-y})\cos x = v_y,\quad u_y = (e^y - e^{-y})\sin x = -v_x$$

$\Downarrow$ 両辺 y で積分

$$v = (e^y - e^{-y})\cos x + \underbrace{C(x)}_{y\text{に関する定数}}$$

代入

$$-v_x = (e^y - e^{-y})\sin x - C'(x)$$

$\therefore$ $C'(x) = 0$

$\therefore$ $C(x) = C$ (定数)

$\Rightarrow$ $v = (e^y - e^{-y})\cos x + C$ ，$v(0, 0) = 1$ より $C = 1$

$\therefore$ $\boxed{v = (e^y - e^{-y})\cos x + 1}$

所属　　　学生番号：　　　　　　　名前：

複素関数論　第 7 回講義　宿題

1. 次の積分値を求めよ．　(i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{it}\,dt$　　(ii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^2}{(t^3+i)^3}\,dt$

(i) $e^{it} = (-ie^{it})'$

$\therefore \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{it}dt = \Big[-ie^{it}\Big]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{4}} = -i\Big(\underbrace{e^{\frac{\pi}{4}i}}_{=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}} - 1\Big)$

$= -\dfrac{i}{\sqrt{2}}\left(1-\sqrt{2}+i\right) = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)i}$

(ii) $\dfrac{t^2}{(t^3+i)^3} = \left(\dfrac{-1}{6(t^3+i)^2}\right)'$

$\therefore \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^3}{(t^3+i)^3}dt = \left[\frac{-1}{6(t^3+i)^2}\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{6}\Big(\frac{1}{\underbrace{(1+i)^2}_{=2i}} - \frac{1}{\underbrace{(-1+i)^2}_{=-2i}}\Big)$

$= -\dfrac{1}{6}\,\dfrac{1}{i} = \boxed{\dfrac{i}{6}}$

所属　　　学生番号：　　　　　　名前：

複素関数論　第 8 回講義　宿題

1. 次の複素積分の値を求めよ．

(i) $\displaystyle\int_C z^3\,dz$,　C は点 $\alpha\in\mathbb{C}$ から点 $\beta\in\mathbb{C}$ へ向かう線分．

(ii) $\displaystyle\int_C (z^2+iz-1)\,dz$,　C は 曲線 $z(t)=2e^{it}$ $(0\le t\le\pi)$.

1 (i)　C のパラメータ表示は　$z(t)=(1-t)\alpha+t\beta$, $(0\le t\le 1)$

$$=(\beta-\alpha)t+\alpha$$

$$\therefore \int_C z^3dz=\int_0^1 z(t)^3\underbrace{\dot z(t)}_{=\beta-\alpha}dt=\int_0^1\{(\beta-\alpha)t+\alpha\}^3(\beta-\alpha)dt$$

$$=\cancel{(\beta-\alpha)}\left[\frac{\{(\beta-\alpha)t+\alpha\}^4}{4\cancel{(\beta-\alpha)}}\right]_{t=0}^{t=1}=\boxed{\frac{\beta^4-\alpha^4}{4}}$$

(ii) $$\int_C(z^2+iz-1)dz=\int_0^\pi(z(t)^2+iz(t)-1)\underbrace{\dot z(t)}_{=2ie^{it}}dt$$

$$=2i\int_0^\pi\underbrace{(4e^{2it}+2ie^{it}-1)e^{it}}_{=4e^{3it}+2ie^{2it}-e^{it}}dt$$

$$=2i\left[\frac{4}{3i}e^{3it}+e^{2it}-\frac{1}{i}e^{it}\right]_0^\pi \qquad \left(\begin{aligned}e^{3\pi i}&=e^{\pi i}=-1,\\ e^{2\pi i}&=e^0=1\end{aligned}\right)$$

$$=2\cancel{i}\left[\frac{4}{3\cancel{i}}(-1-1)-\cancel{0}-\frac{1}{\cancel{i}}(-1-1)\right]$$

$$=2\left(-\frac{8}{3}+2\right)=\boxed{-\frac{4}{3}}$$

所属　　　学生番号：　　　　　　　名前：

複素関数論　第 9 回講義　宿題

1. (i) C が点 $1+i$ から点 $-i$ へ向かう曲線であるとき，複素積分

$$\int_C z^2\,dz$$

の値を求めよ．

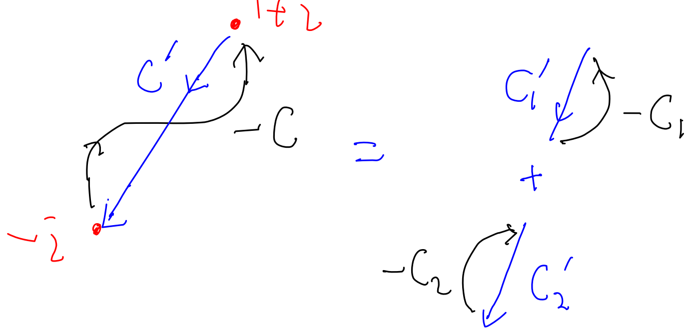
(ii) C が原点をその内部に含む単純閉曲線であるとき，複素積分

$$\int_C \frac{1}{z}\,dz$$

の値を求めよ．

1 (i)

・$1+i$ から $-i$ へ向かう線分を C' とする



$$\begin{pmatrix} C = C_1 + C_2 \\ C' = C_1' + C_2' \end{pmatrix}$$

コーシーの積分定理より $\underbrace{\int_{C_1'-C_1}}_{\int_{C_1'}-\int_{C_1}} z^2\,dz = \underbrace{\int_{C_2'-C_2}}_{\int_{C_2'}-\int_{C_2}} z^2\,dz = 0$

$\therefore \int_{C_1} z^2\,dz = \int_{C_1'} z^2\,dz, \quad \int_{C_2} z^2\,dz = \int_{C_2'} z^2\,dz$

$\therefore \int_C z^2\,dz = \int_{C_1} z^2\,dz + \int_{C_2} z^2\,dz = \int_{C_1'} z^2\,dz + \int_{C_2'} z^2\,dz$

$= \int_{C'} z^2\,dz$

一方，C' のパラメータ表示は $z(t) = (1-t)(1+i) - it \quad (0 \leq t \leq 1)$

$= -(1+2i)t + 1 + i$

$\dot{z}(t) = -(1+2i)$

$$\therefore \int_C z^2 dz = \int_{C'} z^2 dz$$

$$= \int_0^1 z(t)^2 \dot{z}(t)\,dt$$

$$= -(1+2i)\int_0^1 \{(1+2i)t-(1+i)\}^2\,dt$$

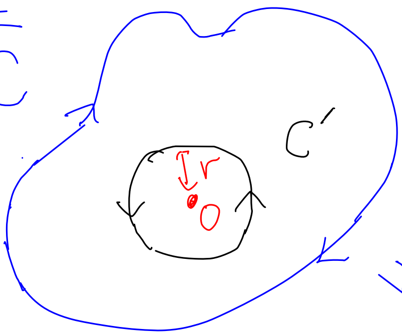
$$= -\cancel{(1+2i)}\left[\frac{\{(1+2i)t-(1+i)\}^3}{3\cancel{(1+2i)}}\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\underbrace{i^3}_{\substack{\shortparallel \\ -i}} - \underbrace{\{-(1+i)\}^3}_{\substack{\shortparallel \\ 2-2i}}\right]$$

$$= \boxed{\frac{2-i}{3}}$$

1 (ii)

$-C$



・$r>0$ を小さく選んで原点中心の半径 r の円周 C' をCの内部にとる。

$\shortparallel$

$-C$

打ち消しあう

(ここで $\frac{1}{z}$ は正則)

コーシーの積分定理より

$$\underbrace{\int_{C'-C}}_{\substack{\shortparallel \\ \int_{C'} - \int_C}} \frac{dz}{z} = 0$$

$$\therefore \int_C \frac{dz}{z} = \int_{C'} \frac{dz}{z}$$

一方 C' のパラメータ表示は $z(t) = re^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$

$$\dot{z}(t) = ire^{it}$$

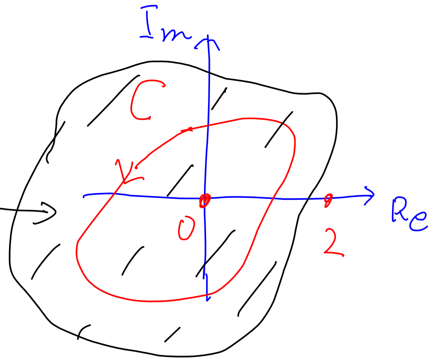
$$\therefore \int_C \frac{dz}{z} = \int_{C'} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{\dot{z}(t)}{z(t)}\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{i\cancel{r}\cancel{e^{it}}}{\cancel{r}\cancel{e^{it}}} = \boxed{2\pi i}$$

複素関数論　第 10 回講義　宿題

1. C は単純閉曲線であり，$z=0$ はその内部，$z=2$ はその外部にあるものとする．このとき，コーシーの積分公式を用いて次の複素積分の値を求めよ．

(i) $\displaystyle\int_C \frac{z+1}{z(z-2)}\,dz$　　(ii) $\displaystyle\int_C \frac{z+1}{z^3(z-2)}\,dz$

1 (i) $f(z) = \dfrac{z+1}{z-2}$ はここで正則。



よって コーシーの積分公式より

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-0}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z+1}{z(z-2)}\,dz$$

∴ 与式 $= 2\pi i \underbrace{f(0)}_{=-\frac{1}{2}} = \boxed{-\pi i}$

(ii) さらに 2階導関数の積分公式より,

$$f''(0) = \frac{\cancel{2!}}{\cancel{2}\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-0)^3}\,dz$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_C \frac{z+1}{z^3(z-2)}\,dz$$

∴ 与式 $= \pi i f''(0) = \boxed{-\frac{3}{4}\pi i}$

$$\left(\begin{array}{l} f'(z) = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{z+1}{(z-2)^2} = -\dfrac{3}{(z-2)^2} \\ f''(z) = \dfrac{6}{(z-2)^3} \qquad \therefore\ f''(0) = -\dfrac{3}{4} \end{array} \right)$$

所属　　　学生番号：　　　　　　　　名前：

複素関数論　第 11 回講義　宿題

1. $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z-2)}$ を $z=0$ のまわりでべき級数により表現せよ．

$|z| < 1$ に対して,

$$\cdot\ \frac{1}{z+1} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \quad (\because\ |-z| = |z| < 1)$$

$$\cdot\ \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n \quad (\because\ \left|\frac{z}{2}\right| < \frac{1}{2} < 1)$$

$$\therefore\ \frac{1}{(z+1)(z-2)} = -\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}z^n\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{1}{2^k}\right)z^n$$

(展開して, z^n の項ごとにまとめた!)

$$\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{1}{2^k} = (-1)^n\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}\left\{(-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right\}\right)$$

$$= \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\left\{(-1)^{n+1} - \frac{1}{2^{n+1}}\right\}z^n}$$

所属　　　学生番号：　　　　　　　名前：

複素関数論　第 12 回講義　宿題

1. 以下のそれぞれの場合において，$f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ の $z = 0$ を中心とするローラン展開を求めよ．

(i)　$0 < |z| < 1$，　　(ii)　$1 < |z| < 2$

◎ $|z|<1$ のとき $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ である事を用いる!

1 (i) $\dfrac{1}{z-1} = -\dfrac{1}{1-z} = -\underline{\sum_{n=0}^{\infty} z^n}$ ∵ $|z|<1$

$$\therefore f(z) = \frac{1}{z}\left(-\underline{\sum_{n=0}^{\infty} z^n}\right) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1}$$

$$\underset{n-1 \mapsto n}{=} \boxed{-\sum_{n=-1}^{\infty} z^n}$$

$1<|z|$

⇓

(ii) $\dfrac{1}{z-1} = \dfrac{1}{z}\underline{\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{z}\right)^n$ ∵ $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$

$$\therefore f(z) = \frac{1}{z}\,\frac{1}{z}\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+2}}$$

$$\underset{-(n+2) \mapsto n}{=} \boxed{\sum_{n=-\infty}^{-2} z^n}$$

複素関数論　第 13 回講義　宿題

1. C を反時計回り向きをもつ円周 $|z-1+i|=2$ とするとき，複素積分

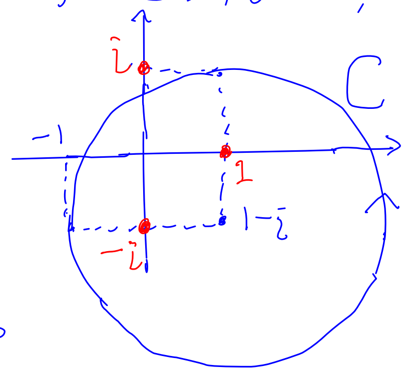
$$\int_C \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}\,dz$$

の値を求めよ．

$$f(z) \equiv \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)} = \frac{1}{(z-1)^2(z+i)(z-i)}$$

$z=1, \pm i$ を除いたところでは f は正則なので，これらは孤立特異点。そのうち，C の内部にあるのは

$z=1,\ z=-i$ の2点のみ。



• $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-1)^2}$; $\varphi(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ ← $z=1$ のまわりで正則 $\varphi(1) \neq 0$

よって $z=1$ は f の2位の極。（講義の例!）

$$\therefore \operatorname{Res}(f,1) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to1}\frac{d}{dz}\{\underbrace{(z-1)^2 f(z)}_{=\varphi(z)}\} = \lim_{z\to1}\frac{-2z}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{2}$$

• $f(z) = \dfrac{\psi(z)}{z+i}$; $\psi(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z-i)}$ ← $z=-i$ のまわりで正則

$$\therefore \operatorname{Res}(f,-i) = \frac{1}{\underset{1=}{0!}}\lim_{z\to -i}\{\underbrace{(z+i)f(z)}_{=\psi(z)}\} = \frac{1}{(i+1)^2(-2i)} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \int_C f(z)\,dz = 2\pi i\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = \boxed{-\frac{\pi i}{2}}$$

留数定理

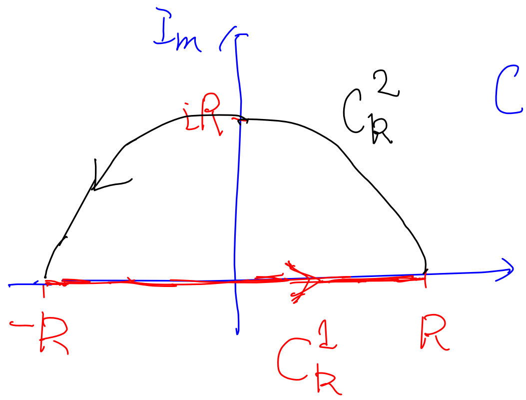
所属　　学生番号：　　　　　　　名前：

複素関数論　第 14 回講義　宿題（期末試験）

1. 留数定理を用いて，次の積分の値を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$$

$f(z) := \dfrac{z^2}{(z^2+2z+2)^2}$ とおく。図のような積分路を考える：



$C_R = C_R^1 + C_R^2$

$$\begin{cases} C_R^1 : z^1(t) = t & (-R \le t \le R) \\ C_R^2 : z^2(t) = Re^{it} & (0 \le t \le \pi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{C_R} f(z)\,dz = \int_{C_R^1} f(z)\,dz + \int_{C_R^2} f(z)\,dz$$

$$=: I_R + II_R$$

○ $I_R = \displaystyle\int_{-R}^{R} f(z^1(t))\, \underbrace{z^{1\prime}(t)}_{1}\, dt = \int_{-R}^{R} f(t)\,dt$

$\xrightarrow[R\to\infty]{} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$ ：求めたい積分の値

○ C_R^2 上　$|f(z)| \le \dfrac{|z|^2}{|z^2+2z+2|^2}$

C_R^2 上, $|z| = R$

$|z^2+2z+2| \ge |z^2| - |2z+2|$

$\ge |z|^2 - 2|z| - 2$

（三角不等式!）

$$\le \frac{|z|^2}{(|z|^2-2|z|-2)^2} = \frac{R^2}{(R^2-2R-2)^2}$$

$$\therefore\ |I_R| \le \frac{R^2}{(R^2-2R-2)^2} \times \underbrace{(C_R^2\text{の長さ})}_{=\pi R}$$

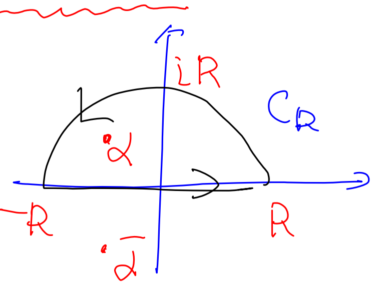
$$= \frac{\pi R^3}{(R^2-2R-2)^2} = \frac{\pi}{\Big(\underbrace{R^{\frac{1}{2}}}_{\to\infty} - \underbrace{\frac{2}{R^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{R^{\frac{3}{2}}}}_{\to 0\ (R\to\infty)}\Big)^2}$$

$$\to 0 \quad (R\to\infty)$$

以上より求めたい積分の値 $= \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz$ …☆

一方　$z^2+2z+2 = (z-\alpha)(z-\bar{\alpha})$　$\alpha = -1+i$

$$\therefore\ f(z) = \frac{z^2}{(z-\alpha)^2(z-\bar{\alpha})^2}$$



よって（Rが十分大のとき）fは

C_R内に孤立特異点αをもち、これは2位の極である。

(∵) $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-\alpha)^2}$, $\varphi(z) = \dfrac{z^2}{(z-\bar{\alpha})^2}$ は

$z=\alpha$のまわりで正則かつ $\varphi(\alpha)\neq 0$

$$\therefore\ \mathrm{Res}(f,\alpha) = \lim_{z\to\alpha}\frac{d}{dz}\{\overbrace{(z-\alpha)^2 f(z)}^{=\varphi(z)}\} = \underset{\text{略}}{\cdots} = -\frac{i}{2}$$

∴留数定理より $\displaystyle\int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,\alpha) = \pi$

よって☆より求める積分の値は $\boxed{\pi}$