第14回

▶ 前回までのまとめ

(1) 慣性力　$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0$　　$m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$

$$m\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \vec{F} \underbrace{- m\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2}}_{\text{慣性力}}$$

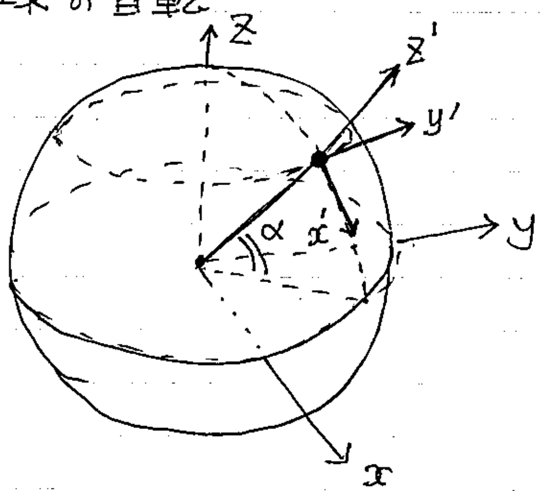
(2) 回転座標系

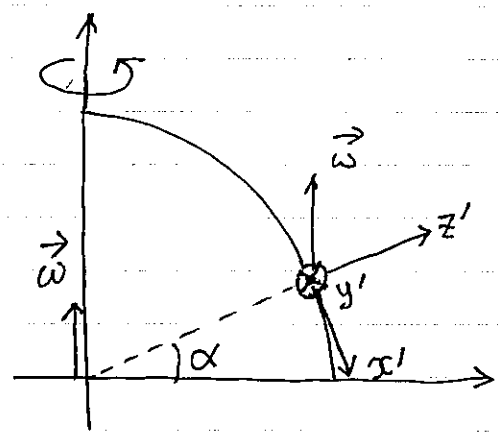
$$\vec{a}' = a_{x'}\vec{e}_{x'} + a_{y'}\vec{e}_{y'} + a_{z'}\vec{e}_{z'}$$

$$\vec{v}' = v_{x'}\vec{e}_{x'} + v_{y'}\vec{e}_{y'} + v_{z'}\vec{e}_{z'}$$

$$m\vec{a}' = \vec{F} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}' - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

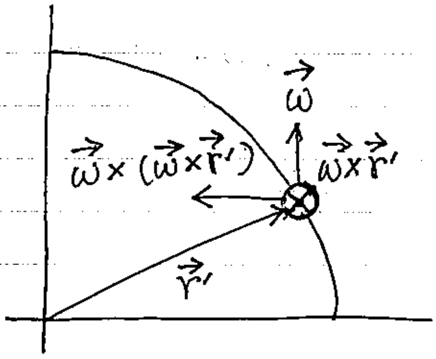
▶ 地球の自転





x'軸　N→S を正　　　$\vec{\omega}$ は南極→北極
y'軸　W→E を正
z'軸　鉛直上向き、　　観測地点は赤道から角度α（緯度）

$$\vec{\omega} = (-\omega\cos\alpha,\ 0,\ \omega\sin\alpha)$$



重力加速度は緯度でちがう

$$\vec{g}_{eff} = \vec{g} - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

実行的な重力
加速度

$$\omega = \frac{2\pi}{86400\,s} \qquad r' = R = 6400\,km$$

$$r'\omega = 460\ m/s \qquad r'\omega^2 = 0.03\ m/s^2$$ g の $1/100$ 以下

以下では ω^2 の項（遠心力）をムシする

$$m\vec{a}' = \vec{F} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$$

$$\vec{\omega}\times\vec{v}' = \begin{pmatrix} -\omega\cos\alpha \\ 0 \\ \omega\sin\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \\ v_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_{y'}\,\omega\sin\alpha \\ v_{x'}\,\omega\sin\alpha + v_{z'}\,\omega\cos\alpha \\ -v_{y'}\,\omega\cos\alpha \end{pmatrix}$$

▶ ナイルの放物線

高さ h の塔から質量 m の質点を自由落下

$x'(0) = y'(0) = 0$, $z'(0) = h$

$v_{x'}(0) = v_{y'}(0) = v_{z'}(0) = 0$

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x'}{dt^2} = 2m\omega\sin\alpha\dfrac{dy'}{dt} \\ m\dfrac{d^2y'}{dt^2} = -2m\omega\sin\alpha\dfrac{dx'}{dt} - 2m\omega\cos\alpha\dfrac{dz'}{dt} \\ m\dfrac{d^2z'}{dt^2} = -mg + 2m\omega\cos\alpha\dfrac{dy'}{dt} \end{cases}$$

厳密には解けない。センスが必要

自由落下なので $\dfrac{dz'}{dt}$ はほとんど gt で増加　$\dfrac{dx'}{dt}, \dfrac{dy'}{dt}$ はゼロ

コリオリ力がなければ

方程式は
$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x'}{dt^2} \fallingdotseq 0 & ① \\ m\dfrac{d^2y'}{dt^2} \fallingdotseq -2m\omega\cos\alpha\dfrac{dz'}{dt} & ② \\ m\dfrac{d^2z'}{dt^2} \fallingdotseq -mg & ③ \end{cases}$$

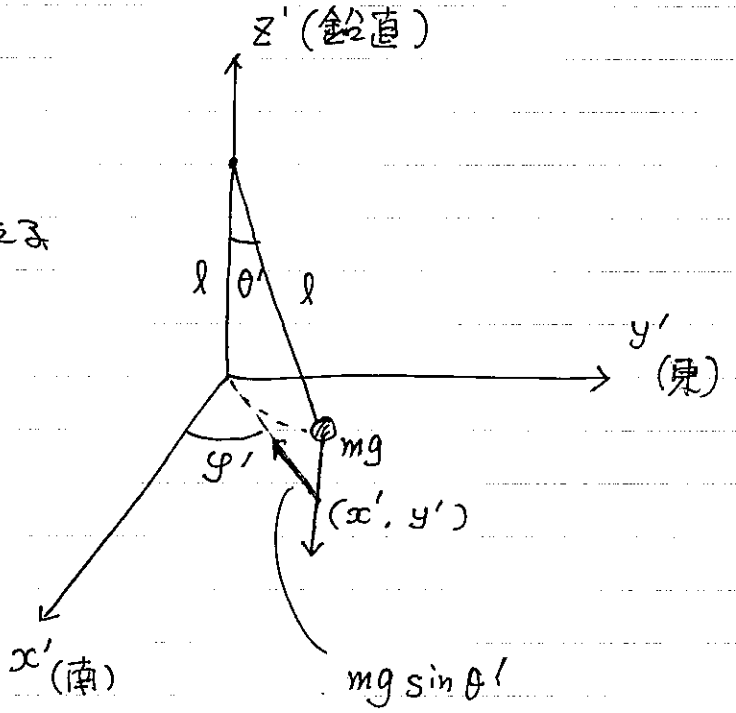
①, ③ はすぐとけて　$x' = 0$　$z' = h - \frac{1}{2}gt^2$

② に z' を代入して　$\dfrac{d^2y'}{dt^2} = +2\omega\cos\alpha\cdot(gt)$

t で 2 回積分　$y'(0) = 0$　$v_{y'}(0) = 0$ で　$y' = \frac{2}{3}(\omega g\cos\alpha)t^3$

y' 軸は W → E を正にとったので 質点は東にズレて落ちる.

スカイツリーから落とすと 15cm くらいズレる…はず



フーコーの振子

θは十分小さくとる.

運動は $x'y'$ 面でおきていると考える

$F_{x'} = -mg\sin\theta'\cos\varphi'$

$F_{y'} = -mg\sin\theta'\sin\varphi'$

$x' = l\sin\theta'\cos\varphi'$

$y' = l\sin\theta'\sin\varphi'$

$F_{x'} = -mg\dfrac{x'}{l}$　$F_{y'} = -mg\dfrac{y'}{l}$ とかいていい.

運動方程式は
$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x'}{dt^2} = -mg\dfrac{x'}{l} + 2m\omega\sin\alpha\dfrac{dy'}{dt} \\ m\dfrac{d^2y'}{dt^2} = -mg\dfrac{y'}{l} - 2m\omega\sin\alpha\dfrac{dx'}{dt} \end{cases}$$

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ $\omega_{z'} = \omega \sin\alpha$ とおくと

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x'}{dt^2} = -\omega_0^2 x' + 2\omega_{z'}\dfrac{dy'}{dt} & (A) \\ \dfrac{d^2y'}{dt^2} = -\omega_0^2 y' - 2\omega_{z'}\dfrac{dx'}{dt} & (B) \end{cases}$$

▷ 振子は回る

(A)(B)から ω_0^2 の項を消去 $-y'\times(A) + x'\times(B)$

$(fg)' = fg' + f'g$

$f'g = (fg)' - fg'$

$$左辺 = -y'\frac{d^2x'}{dt^2} + x'\frac{d^2y'}{dt^2}$$

$$= \frac{dy'}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{d}{dt}\left(-y'\frac{dx'}{dt}\right) - \frac{dx'}{dt}\frac{dy'}{dt} + \frac{d}{dt}\left(x'\frac{dy'}{dt}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right)$$

$$右辺 = -2\omega_{z'}y'\frac{dy'}{dt} - 2\omega_{z'}x'\frac{dx'}{dt}$$

$$= -\omega_{z'}\frac{d}{dt}\left((y')^2 + (x')^2\right)$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}\left[x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt} - \omega_{z'}\left((x')^2 + (y')^2\right)\right] = 0$$

$t=0$ で $x'(0) = y'(0) = 0$ ととると（もちろん $v_{x'} \neq 0$ $v_{y'} \neq 0$）

$$x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt} - \omega_{z'}\left((x')^2 + (y')^2\right) = 0$$

$x' = r'\cos\varphi'$ $y' = r'\sin\varphi'$ $(r' = l\sin\theta')$

とおくと、

$$r'\cos\varphi'\left(\frac{dr'}{dt}\sin\varphi' + r'\cos\varphi'\frac{d\varphi'}{dt}\right)$$

$$- r'\sin\varphi'\left(\frac{dr'}{dt}\cos\varphi' - r'\sin\varphi'\frac{d\varphi'}{dt}\right) + \omega_{z'}(r')^2 = 0$$

$$\cancel{(r')^2}\frac{d\varphi'}{dt} = -\omega_{z'}\cancel{(r')^2} \qquad \therefore \frac{d\varphi'}{dt} = -\omega_{z'}$$

$$\boxed{\varphi' = -\omega_{z'}t = -(\omega\sin\alpha)t}$$

振子は角速度 $\omega\sin\alpha$ で時計回りに回る