第13回

▷ 前回のまとめ

(1) ガリレイ変換 $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t$ $\quad m\dfrac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \vec{F}$

物理法則はすべての慣性系で等価

(2) 慣性力

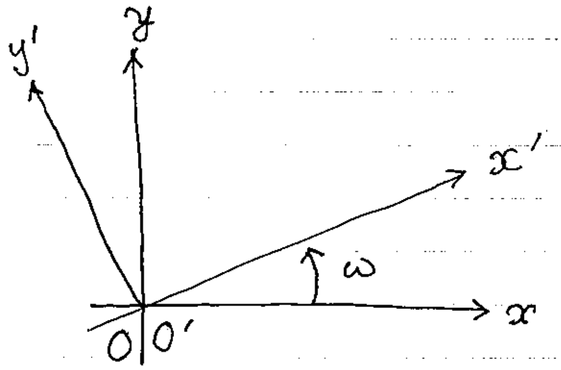
加速度をもつ系 $O'-x'y'z'$ $\quad \vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0$ ← O'の位置

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} + m\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} = \vec{F}$$

$$m\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \vec{F} \underbrace{- m\vec{a}_0}_{\text{慣性力（見かけの力）}} \qquad \vec{a}_0 = \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2}$$

▷ 回転座標上の運動方程式

一定角速度 $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ で回転する



座標系 OとO'は一致

時刻tで xとx'軸のなす角 ωt

θ だけ回転した座標は (第10回と同じ)

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

$\theta = \omega t$ を代入 $\quad x' = x'(t) \quad y' = y'(t)$ を考えて

速度 $\quad \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx'}{dt}\cos\omega t - x'\omega\sin\omega t - \dfrac{dy'}{dt}\sin\omega t - y'\omega\cos\omega t$

加速度

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2}\cos\omega t - \frac{dx'}{dt}\omega\sin\omega t - \frac{dx'}{dt}\omega\sin\omega t - x'\omega^2\cos\omega t$$

$$- \frac{d^2y'}{dt^2}\sin\omega t - \frac{dy'}{dt}\omega\cos\omega t - \frac{dy'}{dt}\omega\cos\omega t + y'\omega^2\sin\omega t$$

$$= \left[\frac{d^2x'}{dt^2} - 2\omega\frac{dy'}{dt} - \omega^2 x'\right]\cos\omega t$$

$$- \left[\frac{d^2y'}{dt^2} + 2\omega\frac{dx'}{dt} - \omega^2 y'\right]\sin\omega t$$

$\cos\omega t$の係数が $\vec{e}_{x'}$方向　$-\sin\omega t$ が $\vec{e}_{y'}$方向の加速度

$$m\vec{a} = m\left(a_{x'}\vec{e}_{x'} + a_{y'}\vec{e}_{y'}\right) = \vec{F} = F_{x'}\vec{e}_{x'} + F_{y'}\vec{e}_{y'}$$

$$\begin{cases} m a_{x'} = F_{x'} \\ m a_{y'} = F_{y'} \end{cases}$$

x, yに戻すと

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x'}{dt^2} - 2m\omega\dfrac{dy'}{dt} - m\omega^2 x' = F_{x'} \\ m\dfrac{d^2y'}{dt^2} + 2m\omega\dfrac{dx'}{dt} - m\omega^2 y' = F_{y'} \end{cases}$$

慣性力を右辺にうつして

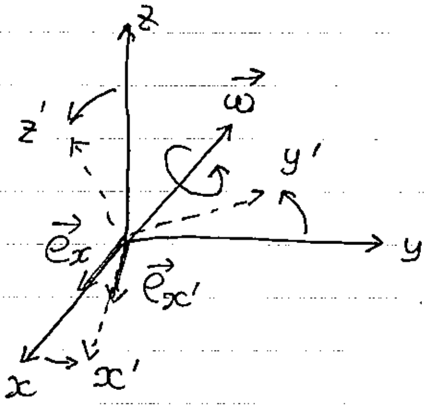
$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x'}{dt^2} = F_{x'} + 2m\omega\dfrac{dy'}{dt} + m\omega^2 x' \\ m\dfrac{d^2y'}{dt^2} = F_{y'} \underbrace{- 2m\omega\dfrac{dx'}{dt}}_{\text{コリオリ力}} + \underbrace{m\omega^2 y'}_{\text{遠心力}} \end{cases}$$

$\vec{\omega} = (0, 0, z)$ とすると $\vec{v}' = \left(\frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, 0\right)$

$$-2m\vec{\omega}\times\vec{v}' = \left(2m\omega\frac{dy'}{dt},\ 2m\omega\frac{dx'}{dt},\ 0\right)$$

▷ 3次元の回転

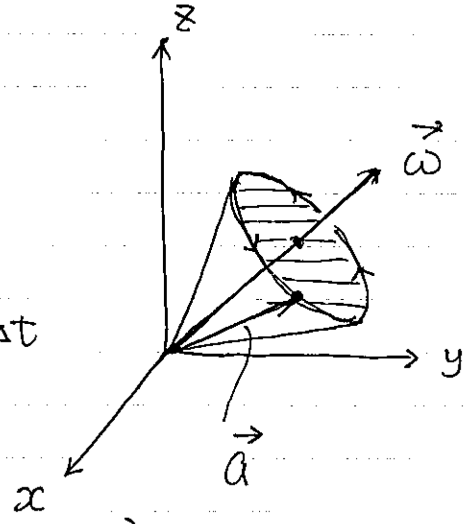
$\vec{\omega}$ ベクトル　向き　右ネジ方向を正として 回転面の法線
大きさ　角速度の大きさ



原点を共通にして 静止座標 O-xyz
$\vec{\omega}$ で回転する座標 O-x'y'z'

$$\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$$
$$= A_{x'} \vec{e}_{x'} + A_{y'} \vec{e}_{y'} + A_{z'} \vec{e}_{z'}$$

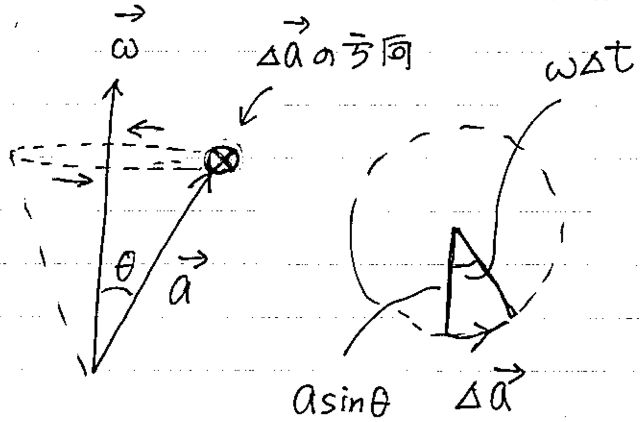
O-x'y'z' とともに動く大きさ一定のベクトル $\vec{a}$　（$\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}$ を想定）
が O-xyz でどう動くか調べる



Δtの間に $\vec{a}$ は $\Delta\vec{a}$ 動くとする

$\Delta\vec{a}$ の大きさは
$$a\sin\theta \cdot \omega\Delta t = |\vec{\omega}\times\vec{a}|\Delta t$$
向きは $\vec{\omega}$ と $\vec{a}$ に垂直
$\rightarrow$ $\vec{\omega}\times\vec{a}$ に平行

よって $\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t} = \boxed{\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{a}}$



$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{e}_{x'}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{e}_{x'} \\ \dfrac{d\vec{e}_{y'}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{e}_{y'} \\ \dfrac{d\vec{e}_{z'}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{e}_{z'} \end{cases}$$

▷ 3次元の回転

速度 $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(x'\vec{e}_{x'} + y'\vec{e}_{y'} + z'\vec{e}_{z'}\right)$

$$= \frac{dx'}{dt}\vec{e}_{x'} + x'\vec{\omega}\times\vec{e}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{e}_{y'} + y'\vec{\omega}\times\vec{e}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\vec{e}_{z'} + z'\vec{\omega}\times\vec{e}_{z'}$$

$$= \left(\frac{dx'}{dt}\vec{e}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{e}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\vec{e}_{z'}\right) + \vec{\omega}\times\left(x'\vec{e}_{x'} + y'\vec{e}_{y'} + z'\vec{e}_{z'}\right)$$

$$= \vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}'$$

加速度 $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx'}{dt}\vec{e}_{x'} + \dfrac{dy'}{dt}\vec{e}_{y'} + \dfrac{dz'}{dt}\vec{e}_{z'}\right)$

$$+ \frac{d}{dt}\vec{\omega}\times\left(x'\vec{e}_{x'} + y'\vec{e}_{y'} + z'\vec{e}_{z'}\right)$$

$$= \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{e}_{x} + \frac{dx'}{dt}\vec{\omega}\times\vec{e}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{e}_{y'} + \frac{dy'}{dt}\vec{\omega}\times\vec{e}_{y'}$$

$$+ \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{e}_{z'} + \frac{dz'}{dt}\vec{\omega}\times\vec{e}_{y'} + \vec{\omega}\times\left(\vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}'\right)$$

$$= \vec{a}' + \vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

$$= \vec{a}' + 2\vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

運動方程式 $m\vec{a} = \vec{F}$

$$m\left(\vec{a}' + 2\vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')\right) = \vec{F}$$

慣性力を右辺にうつすと

$$m\vec{a}' = \vec{F} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}' - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

コリオリ力　　遠心力