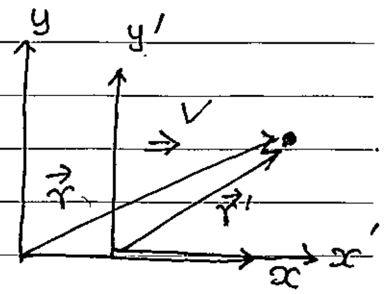
第12回

▷ ガリレイの相対原理

すべての慣性系で物理法則は等しい。

一つの慣性系に対して一定速度で運動する系は別の慣性系

▷ ガリレイ変換



ある慣性系 O−xyz に対して
一定速度Vで運動する座標系 O'−x'y'z'

V を x 方向にとって t=0 で O と O' を一致させる

$$\begin{cases} \vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \\ \vec{r}' = x'\vec{e}_{x'} + y'\vec{e}_{y'} + z'\vec{e}_{z'} \end{cases}$$

$\vec{e}_x = \vec{e}_{x'}$ $\vec{e}_y = \vec{e}_{y'}$ $\vec{e}_z = \vec{e}_{z'}$

O と O' の関係から $\vec{r} = \vec{r}' + Vt'\vec{e}_{x'}$

$$\begin{cases} x = x' + Vt' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

時間については $t = t'$

$$x' = x - Vt \leftrightarrow x = x' + Vt$$

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - V$$

一般の座標では $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{V}$$

運動量保存則

m_1, m_2 が衝突した。衝突前と後でエネルギーは

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2 + \Delta E \quad \text{—①}$$

衝突で失われたエネルギーをΔEとする.

一定速度$\vec{V}$で動く別の慣性系では

$$\vec{v}_1{}' = \vec{v}_1 - \vec{V} \quad \vec{v}_2{}' = \vec{v}_2 - \vec{V} \quad \vec{u}_1{}' = \vec{u}_1 - \vec{V} \quad \vec{u}_2{}' = \vec{u}_2 - \vec{V}$$

エネルギーは $\frac{1}{2}m_1(v_1')^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2')^2 = \frac{1}{2}m_1(u_1')^2 + \frac{1}{2}m_2(u_2')^2 + \Delta E$ 不変!

$$\frac{1}{2}m_1|\vec{v}_1 - \vec{V}|^2 + \frac{1}{2}m_2|\vec{v}_2 - \vec{V}|^2 = \frac{1}{2}m_1|\vec{u}_1 - \vec{V}|^2 + \frac{1}{2}m_2|\vec{u}_2 - \vec{V}|^2 + \Delta E$$

$$\frac{1}{2}m_1(v_1^2 - 2\vec{v}_1\cdot\vec{V} + V^2) + \frac{1}{2}m_2(v_2^2 - 2\vec{v}_2\cdot\vec{V} + V^2)$$

$$= \frac{1}{2}m_1(u_1^2 - 2\vec{u}_1\cdot\vec{V} + V^2) + \frac{1}{2}m_2(u_2^2 - 2\vec{u}_2\cdot\vec{V} + V^2) + \Delta E$$

①式を使うと $-m_1\vec{v}_1\cdot\vec{V} - m_2\vec{v}_2\cdot\vec{V} = -m_1\vec{u}_1\cdot\vec{V} - m_2\vec{u}_2\cdot\vec{V}$

$$(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)\cdot\vec{V} = (m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2)\cdot\vec{V}$$

$\vec{V}$は任意にとってよいので

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$$

作用.反作用の法則なしに運動量の保存則が導けた

運動方程式の不変性

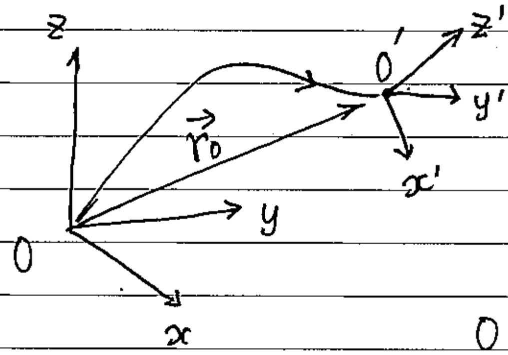
$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

ガリレイ変換 $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t$ $\quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{V} \quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}$

$$\therefore m\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \vec{F}$$ ガリレイ変換に対して不変

非慣性系

慣性系 O-xyz に対して 加速度をもつ座標 O′-x′y′z′



↑ ビブンではないことに注意

Oから測ったO′の位置 $\vec{r_0}$

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r_0}$$

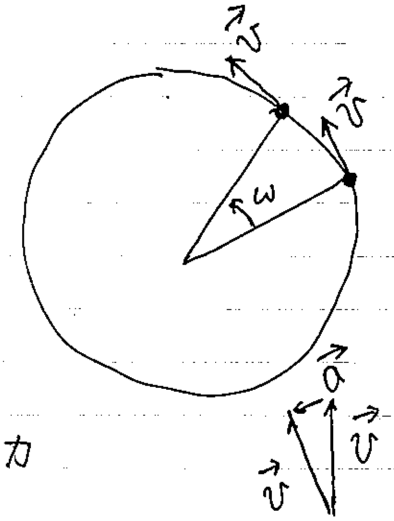
$$m\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}' + \vec{r_0}) = \vec{F}$$

$$m\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \vec{F} - m\frac{d^2\vec{r_0}}{dt^2} = \vec{F} \underline{- m\vec{a_0}}$$

加速度 $\vec{a_0}$ をもつ座標系では $-m\vec{a_0}$ の力が働くようにみえる。
$-m\vec{a_0}$ を慣性力（見かけの力）という

慣性力の例

◎ 等速円運動する質点の上の観測者



角速度 $\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = \mathrm{const.}$

半径 $r = \mathrm{const.}$ $\qquad v = v_\theta = r\omega$

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -r\omega^2 = -\frac{v^2}{r}$$

静止系 $\quad a_r \vec{e}_r = -\dfrac{v^2}{r}\vec{e}_r \quad$ 向心力

質点上の観測者

$$-\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} = -a_r\vec{e}_r = \frac{v^2}{r}\vec{e}_r \qquad \text{遠心力}$$

大谷投手が 160 km/h で球を投げると $r = 1\,\mathrm{m}$ として

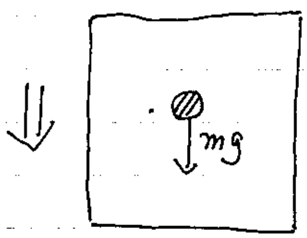
$$\frac{160\times 1000}{3600} = 44\ \mathrm{m/s}$$

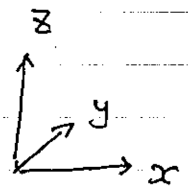
重力加速度

遠心力による指先の加速度 $\quad (44\,\mathrm{m/s})^2/1\,\mathrm{m} \doteqdot 1900\ \mathrm{m/s^2} \doteqdot 200g\,!$

◎ 自由落下するエレベータ

$$\vec{r}_0 = -\frac{1}{2}gt^2\,\vec{e}_z$$





エレベータの外

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -mg\,\vec{e}_z$$

エレベータの内

$$m\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = -mg\,\vec{e}_z - m\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} = -mg\,\vec{e}_z + mg\,\vec{e}_z = 0$$

無重力