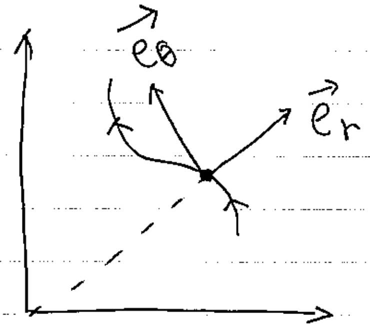
第11回

前回のまとめ



○ 2次元極座標　$x = r\cos\theta$
　　　　　　　　$y = r\sin\theta$

速度 $\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta$

$= \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta$

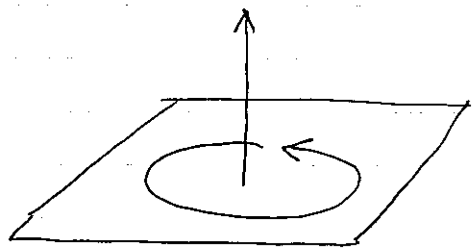
$\vec{a} = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\vec{e}_r + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - r^2\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\vec{e}_\theta$

○ 中心力　$\vec{F} = f(\vec{r})\frac{\vec{r}}{r} = f(\vec{r})\vec{e}_r$

○ 面積速度一定　　中心力の運動方程式 $m a_\theta = 0$ 〃

$a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0$　　$\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \text{const.}$

回転の表現



向き … 回転面の法線
大きさ … 回転の強弱

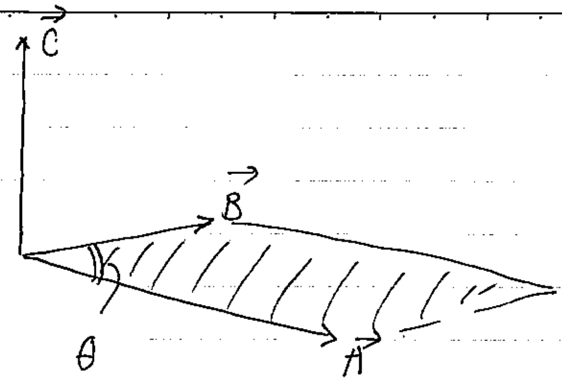
右ネジの進む向きを正にとる

回転を表現するのに便利な数学を導入 → ベクトルの外積（ベクトル積ともいう）

ベクトル $\vec{A}$, $\vec{B}$ に対して　$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ で $\vec{C}$ を定義

$\vec{C}$ の向きは $\vec{A}$ を $\vec{B}$ に回したとき右ネジのすすむ方向を正にとる
大きさは $|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$　　$\vec{A}$ と $\vec{B}$ が作る平行四辺形の面積

$\vec{C} \perp \vec{A}$, $\vec{C} \perp \vec{B}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{C} \cdot \vec{A} = \vec{C} \cdot \vec{B} = 0$



$\vec{A} \times \vec{A} = 0$ $\quad$ $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \quad \vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}$$

$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$ の関係

▶ 回転を表す運動方程式

あらかじめ $\vec{p} = m\vec{v}$ で運動方程式をかくと $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

左から $\vec{r}$ と外積をとる (左か右かは大事 $\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$)

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

ところで左辺は $\frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt}$ と書きかえられる。なぜなら

$$\frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$= \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{=0} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\therefore \boxed{\frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

もとの式と見比べると $\vec{p} \leftrightarrow \vec{r} \times \vec{p}$ $\quad$ $\vec{F} \leftrightarrow \vec{r} \times \vec{F}$ の対応

$\vec{r} \times \vec{p}$ を角運動量と定ぎする.

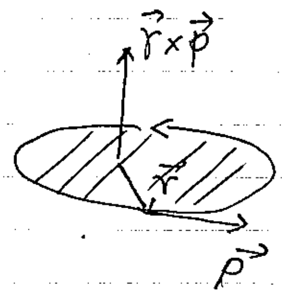
$\vec{r} \times \vec{F}$ を力のモーメント 。

▶ 角運動量の保存則

$\vec{r}\times\vec{F}=0$ ならば, $\dfrac{d(\vec{r}\times\vec{p})}{dt}=0$ $\quad\vec{r}\times\vec{p}=\text{const.}$
保存している

$\vec{r}\times\vec{F}=0$ となるのは $\vec{F}=0$ (自明) あるいは $\vec{F}=f(r)\vec{e}_r$

のとき。 → 中心力による運動では
角運動量が保存する。



$\vec{r}\times\vec{p}$ が一定 → $\vec{r}$ と $\vec{p}$ でできる平面に
運動は制限

▶ 極座標との対応

回転面を xy 面にとる → 角運動量は z 成分のみ

$$(\vec{r}\times\vec{p})_z = xp_y - yp_x = xmv_y - ymv_x$$

$$= m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$$

極座標

$$= m\left(r\cos\theta\left(\frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right) - r\sin\theta\left(\frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\right)$$

$$= mr^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

$$= mr^2\frac{d\theta}{dt}$$

運動方程式 $\dfrac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p})_z = (\vec{r}\times\vec{F})_z$

$\vec{F}$ が中心力なら $\dfrac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p})_z = 0$ $\quad\therefore \dfrac{d}{dt}\left(mr^2\dfrac{d\theta}{dt}\right)=0$

▷ N個の質点系

i番目の運動方程式

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ji}}_{j\text{から}i\text{に働く力（内力）}} + \underbrace{\vec{F}_i}_{\text{外力}}$$

左から $\vec{r}_i$ と外積をとる.

$$\vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$i=1$ から N まで足す.

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji}}_{=\text{ゼロ}} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

iとjの部分を取り出すと

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \vec{r}_j \times \underbrace{\vec{F}_{ij}}_{=-\vec{F}_{ji}} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ji} = 0$$

$\vec{F}_{ji}$ と $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ は平行

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i \qquad \text{回転}$$

5-4の式 $\displaystyle \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \qquad \text{重心の運動}$$