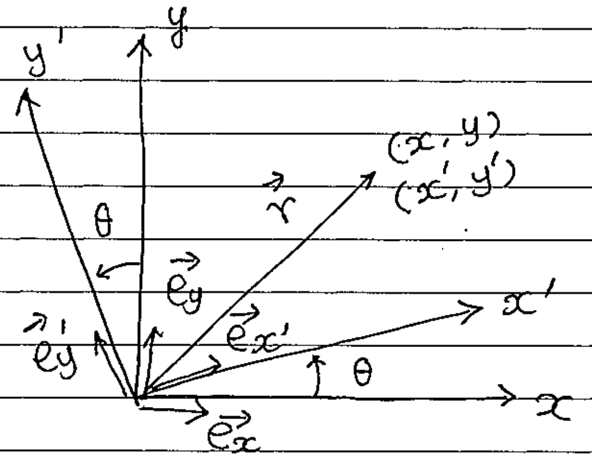
第10回

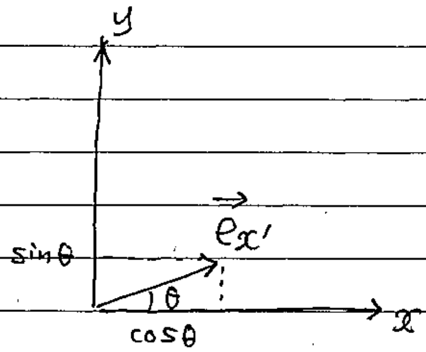
座標の回転



座標軸方向の
単位ベクトル

$\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_{x'}$, $\vec{e}_{y'}$

O-xy と O-x'y' の
なす角をθとする



$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y = x'\vec{e}_{x'} + y'\vec{e}_{y'}$$

$\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ と $\vec{e}_{x'}$, $\vec{e}_{y'}$ の関係は

$$\vec{e}_{x'} = \cos\theta \cdot \vec{e}_x + \sin\theta\ \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_{y'} = -\sin\theta\ \vec{e}_x + \cos\theta\ \vec{e}_y$$

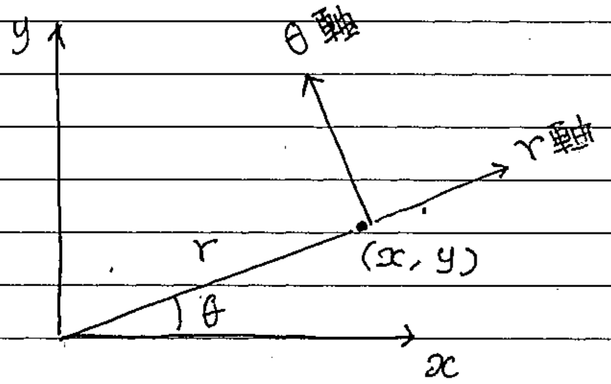
したがって $\vec{r} = x'\vec{e}_{x'} + y'\vec{e}_{y'}$

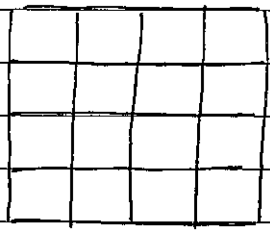
$$= x'(\cos\theta\ \vec{e}_x + \sin\theta\ \vec{e}_y) + y'(-\sin\theta\ \vec{e}_x + \cos\theta\ \vec{e}_y)$$

$$= \underbrace{(x'\cos\theta - y'\sin\theta)}_{=x}\vec{e}_x + \underbrace{(x'\sin\theta + y'\cos\theta)}_{=y}\vec{e}_y$$

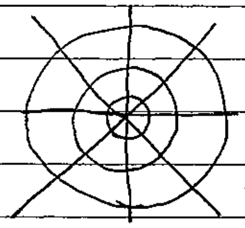
$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases} \quad (*)$$

極座標での運動方程式





直交座標



極座標

$$\boxed{\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}} \iff \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) \end{aligned}$$

$\tan\theta = \dfrac{x}{y}$

tan の逆関数

まず 速度

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\dfrac{d\theta}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

r−θ 座標は xy 座標から θ 回転している．9−1の(※)式と見比べて，r方向の速度 v_r　θ方向の速度 v_θ は，

$$\boxed{\begin{cases} v_r = \dfrac{dr}{dt} \\ v_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt} \end{cases}}$$

さらに加速度

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\cos\theta - \frac{dr}{dt}\sin\theta\frac{d\theta}{dt} - \frac{dr}{dt}\sin\theta\frac{d\theta}{dt} - r\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

同様に

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\sin\theta + 2\frac{dr}{dt}\cos\theta\frac{d\theta}{dt} - r\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

ふたたび(※)式とみくらべて　r方向の加速度 a_r，θ方向の加速度 a_θ

$$\boxed{\begin{cases} a_r = \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ a_\theta = 2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\theta}{dt} + r\dfrac{d^2\theta}{dt^2} \end{cases}}$$

等速円運動なら　$\dfrac{d\theta}{dt} = \omega = $ 一定　$v_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt} = r\omega$

$v_r = \dfrac{dr}{dt} = 0$　$a_r = -r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 = -r\omega^2$　$a_\theta = 0$ 〃

加速度は原点を向く → 向心力

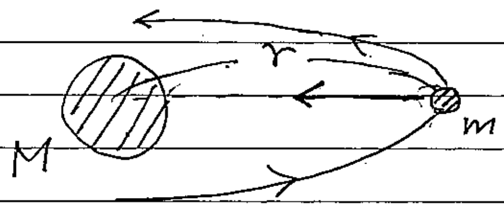
▶ 中心力

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\underbrace{\frac{\vec{r}}{r}}_{\vec{r}\text{方向の単位ベクトル}}$$

万有引力が典型例

$$f(r) = -\frac{GmM}{r^2}$$

G：重力定数



運動方程式は　$m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = f(r)\dfrac{\vec{r}}{r}$

本当は3次元の極座標が必要だが，
回転面に xy 座標と r-θ 座標を選ぶ

▷ ケプラーの第2法則　面積速度一定の法則

r方向にしか力は働かない。

したがってθ方向の運動方程式は

$$m a_\theta = 0$$

$$m\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) = 0$$

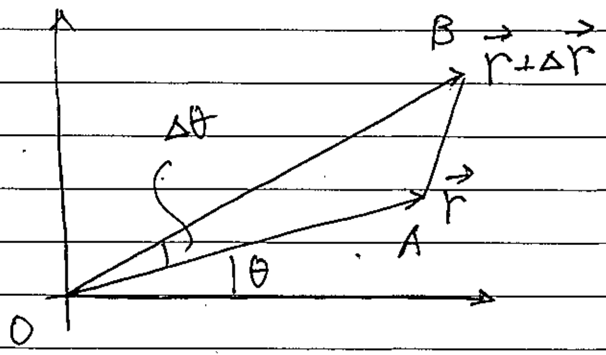
$$2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

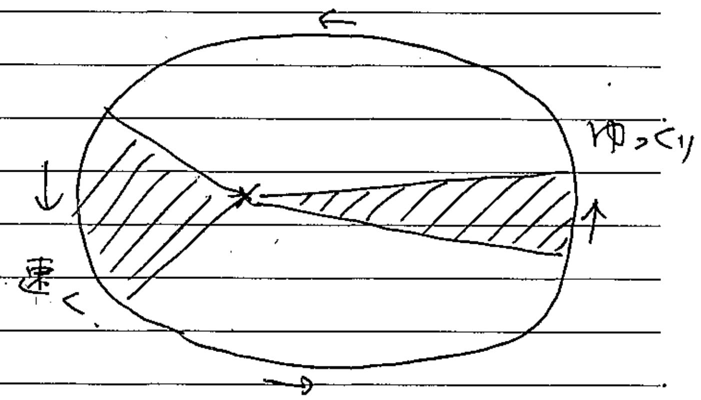
両辺にrをかける

$$2r\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \qquad (r^2)' = 2r\frac{dr}{dt}$$

これは $f = r^2$　$g = \frac{d\theta}{dt}$ とすると　$f'g + fg' = 0$ の形

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0 \qquad r^2\frac{d\theta}{dt} = \text{一定}$$ 保存されている





△OABの面積

$$\frac{1}{2}r\cdot(r+\Delta r)\sin(\Delta\theta)$$

$$\fallingdotseq \frac{1}{2}r(r+\Delta r)\Delta\theta$$

$$\fallingdotseq \frac{1}{2}r^2\Delta\theta$$

$\Delta\vec{r}$ すすむのに Δt かかった（面積速度）

$$\frac{1}{2}r^2\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$$