第9回

▷ 前回までのまとめ

(1) 保存力

- ポテンシャルVが存在する　$\vec{F}\cdot d\vec{r} = -dV$
- 保存力による仕事は始点と終点で決まる

(2) 非保存力を含む式　$\vec{F}_{tot} = \vec{F} + \vec{f}$

保存力　非保存力

点Aから点Bまで経路Cで仕事

$$\left(V(\vec{r}_B) + \frac{1}{2} m v(\vec{r}_B)^2\right) - \left(V(\vec{r}_A) + \frac{1}{2} m v(\vec{r}_A)^2\right)$$

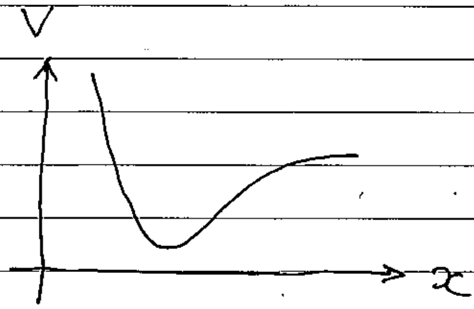
$$= \int_{C\,\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{f}\cdot d\vec{r}$$

(3) 1次元の問題

$$F = -\frac{dV}{dx}$$

運動の可視化

フックの法則の正体



▷ 3次元のポテンシャル

$$dV = -\vec{F}\cdot d\vec{r} = -F_x\,dx - F_y\,dy - F_z\,dz$$

これは 多変数関数 $f = f(x, y, z)$ の全微分形と同じ

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

∂ … ラウンドディー
(単にディーともよぶ)

$\frac{\partial}{\partial x}$ は偏微分という演算で x 以外の変数を定数と思う微分

例. $f(x,y,z) = axy + by^2 + cz^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ay \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = ax + 2by \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2cz$$

▶ $\vec{F}$ と V の関係

$$-dV = \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad dV = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = -F_x dx - F_y dy - F_z dz$$

全微分と見比べると $dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dz + \frac{\partial V}{\partial z} dz$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial V}{\partial x} \\ -\frac{\partial V}{\partial y} \\ -\frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} = -\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}}_{\text{微分演算子 } \vec{\nabla} \text{ とかく}} V$$

ナブラ

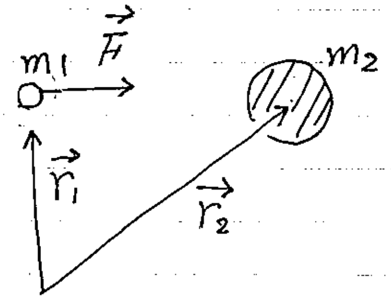
$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} V}$$

あるいは $\vec{F} = -\mathrm{grad}\, V$ とも書く.

1次元の $F = -\frac{dV}{dx}$ の3次元拡張版

▶ 万有引力

質量 m_1, m_2 の間に働く引力



$$\vec{F} = \frac{-G m_1 m_2}{|\vec{r_1} - \vec{r_2}|^2} \underbrace{\frac{\vec{r_1} - \vec{r_2}}{|\vec{r_1} - \vec{r_2}|}}_{\vec{r_1} - \vec{r_2} \text{ の単位ベクトル}}$$

G : 重力加速度 6.7×10^{-11} $\mathrm{N \cdot m^2\, kg^{-2}}$

4つの力の1つ　根源的な力

m_2を原点にして $\vec{F} = \frac{-Gm_1m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$

いま，$r = R$（地球の半径） $m_2 = M$（地球の質量）とすると

$$\vec{F} = -\underbrace{\frac{GM}{R^2}}_{g\ \text{重力加速度}} m_1 \cdot \frac{\vec{R}}{R}$$

▷ 万有引力のポテンシャル

原点からのキョリにしかよらない $\longrightarrow$ x軸上の仕事をしらべる

仕事は経路によらないので なるべく楽な積分をする

$$\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} -dV = V(\vec{r}_A) - V(\vec{r}_B)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} F_x\,dx = -Gm_1m_2\int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{x^2}\,dx = -Gm_1m_2\left[-\frac{1}{x}\right]_{x_0}^{x_1}$$

$$= \frac{Gm_1m_2}{x_1} - \frac{Gm_1m_2}{x_0} = V(x_0) - V(x_1)$$

$\therefore\ V(x) = -\frac{Gm_1m_2}{x} + \text{const.}$ $x\to\infty$で $V\to 0$とすると const. はゼロ

xをrにもどして $\boxed{V(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

ポテンシャルから $\vec{F}$を求めてみる。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{-\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}\cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{r^3}$$

同様に $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-y}{r^3}$

$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-z}{r^3}$

$$\vec{F} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} = +Gm_1m_2 \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) \end{pmatrix} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \begin{pmatrix} \frac{x}{r} \\ \frac{y}{r} \\ \frac{z}{r} \end{pmatrix} \quad //$$

▷ 保存力のまとめ

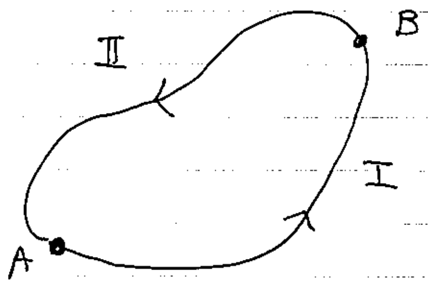
(1) $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ となる V が存在

(2) (1)がみたされれば $-dV = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$\vec{r}_A$ から $\vec{r}_B$ までの仕事は $V(\vec{r}_A) - V(\vec{r}_B)$ となって経路によらない

(3) 任意の閉曲面を一周する仕事はゼロ。記号でかくと

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$



(証) 一周積分を2つの経路に分ける

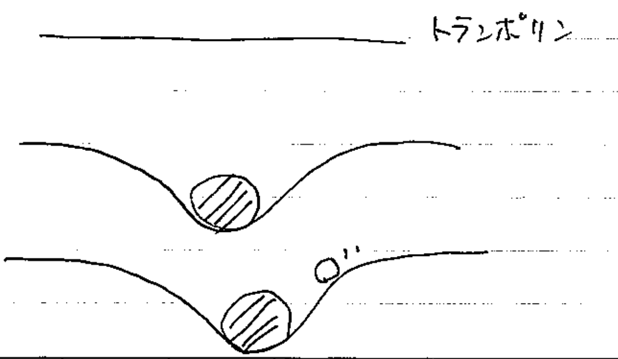
経路 I $\rightarrow$ $V(\vec{r}_A) - V(\vec{r}_B)$

〃 II $\rightarrow$ $V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A)$ I + II $\rightarrow$ ゼロ。

実は (1)(2)(3) は同値。どれか一つを仮定すると残りは導ける。

▷ 場の概念

遠隔作用と直接作用



トランポリンにボーリングの球をおく

そこにピンポン球をおくと…