第8回

▷ 前回のまとめ

(1) $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad \rightarrow \quad \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}mv^2\right) = \vec{F}\cdot\dfrac{d\vec{r}}{dt}$

$\dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$ 運動エネルギー

$\vec{F}\cdot d\vec{r}$ (微小な)仕事

dtの間で $d\left(\dfrac{1}{2}mv^2\right) = \vec{F}\cdot d\vec{r}$

(2) ポテンシャルエネルギーの導入

$\vec{F}\cdot d\vec{r} = -dV$

このように書ける力を保存力といい，Vをポテンシャルエネルギーという

▷ 1次元系

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dV$$

運動が1次元で考えられるとき $dV = -F dx$ とできる．

$$\therefore \boxed{-\frac{dV}{dx} = F}$$

運動方程式 $m\dfrac{dv}{dt} = F$ 両辺に $v = \dfrac{dx}{dt}$ をかける

$$m\underline{v\frac{dv}{dt}} = \underline{F}\cdot\frac{dx}{dt}$$

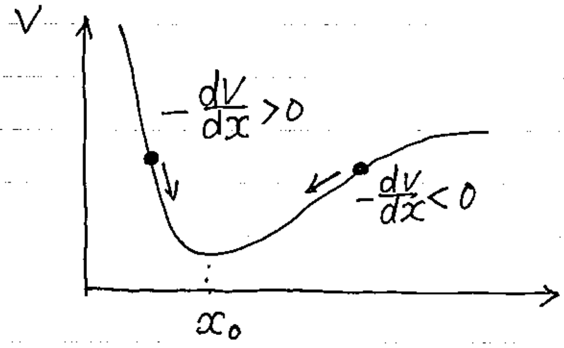
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) \qquad = -\frac{dV}{dx}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -\frac{dV}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = -\frac{dV}{dt}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + V\right) = 0$$

$\underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + V}_{\text{力学的エネルギー}} = $ 一定

▷ 運動の可視化



$x > x_0$ で F は左向き

$<$ 右向き

ポテンシャルは現実の床のへこみと似ている。

<u>空間の視点</u>

▷ フックの法則の正体

$x = x_0$ では $\frac{dV}{dx} = 0$ (極小) $F = 0$ 〃

x_0 のまわりでテーラー展開

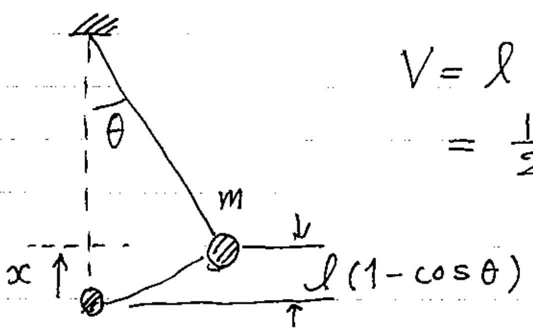
$$V(x) = V(x_0) + \left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=x_0}(x-x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^2$$

$$= V(x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots$$

x を x_0 からズラそうとすると $F = -\frac{dV}{dx} = -k(x-x_0)^2$

これがフックの法則の正体 $k = V''(x_0)$

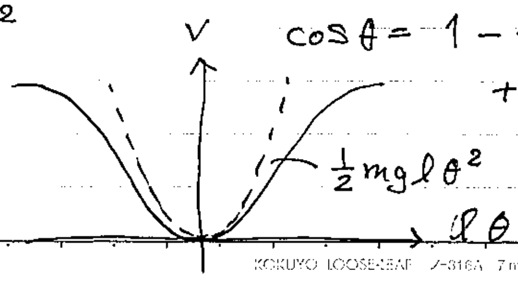
ふりこの場合, $V = mgx$ $\left(-\frac{dV}{dx} = -mg\right)$ なので



$$V = l(1-\cos\theta)mg$$
$$= \frac{1}{2}mgl\theta^2$$

テーラー展開

$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \cdots$



▷ 非保存力を含む運動

一般の力 $\vec{F}_{tot} = \underset{\text{保存力}}{\vec{F}} + \underset{\text{非保存力}}{\vec{f}}$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{f} \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \text{ と内積}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{f}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{F}\cdot d\vec{r} = -dV \text{ を用いて}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -\frac{dV}{dt} + \vec{f}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + V\right) = \vec{f}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

経路を指定して A から B まで積分（dt ごとに積分）

$$\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} d\left(\frac{1}{2}mv^2 + V\right) = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{f}\cdot d\vec{r}$$

$$\boxed{\underbrace{\left(\frac{1}{2}mv^2(\vec{r}_B) + V(\vec{r}_B)\right)}_{\vec{r}_B\text{点でのエネルギー}} - \underbrace{\left(\frac{1}{2}mv^2(\vec{r}_A) + V(\vec{r}_A)\right)}_{\vec{r}_A\text{点でのエネルギー}} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{f}\cdot d\vec{r}}$$

非保存力による仕事は力学的エネルギーの減少分

▷ まさつ力 … 非保存力の代表　仕事は経路による

動まさつ力 → 垂直抗力 N に比例したまさつ力が
運動をさまたげる方向に働く　$f = \mu N$

◎ 速さ v で $\underbrace{\text{まさつのある床}}_{}$ ^水平な^ の運動する質点 m は
床をどれだけ進む？

$V(\vec{r}_A)$, $V(\vec{r}_B)$ は水平なら同じ値

$$(0 + V) - \left(\frac{1}{2}mv^2 + V\right) = -\mu m g l$$

$$\therefore l = \frac{v^2}{2\mu g}$$　車は急に止まれない。

◎ 最初に x_0 だけちぢめたバネは　まさつのある床で
どれだけ動いて止まる？

$V(\vec{r}_A) = \frac{1}{2}kx_0^2$　$V(\vec{r}_B) = 0$

$v(\vec{r}_A) = v(\vec{r}_B) = 0$　　$0 - \frac{1}{2}kx_0^2 = -\mu m g l$

$$l = \frac{kx_0^2}{2\mu m g}$$