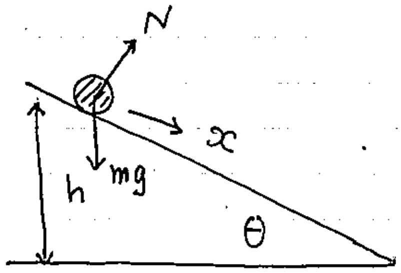
第7回　仕事

運動方程式　$\vec{F} = m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$　を見直す：

◎ 必ず時間もの関数として $\vec{r}$, $\vec{v}$ を求めることになる.
　→ 空間 $\vec{r}$ を中心にした記述にしたい

◎ ベクトル方程式をスカラー方程式にしたい。

▷ 例



角度θのまさつのない斜面
質点 m を高さ h からすべらせる
（ガリレオの実験）

床からの垂直抗力 N のため，m は斜面に沿って落ちる

$$N = mg\cos\theta$$

斜面方向に x 軸をとると

$$mg\sin\theta = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$t=0$ で $x=0$, $v=0$ として　　$x(t) = \frac{1}{2}gt^2\sin\theta$ 〃

h だけ落下するのに $\dfrac{h}{\sin\theta}$ だけ斜面を動いているから，

$$\frac{1}{2}gt_0^2\sin\theta = \frac{h}{\sin\theta} \qquad t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g\sin^2\theta}}$$

そのときの速さは　$v = gt\sin\theta$　なので

$$v = \sqrt{2gh}$$

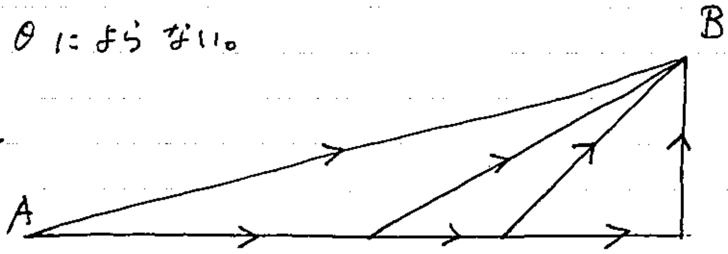
全てのものは同じ速さで落ち，　h だけ落ちたときの速さは同じ。

▷ 仕事

前の例はなぜ θ によらなかったか？

→ キョリ $\dfrac{h}{\sin\theta}$, 力は $mg\sin\theta$

→ 力 × キョリ は θ によらない。



エジプト奴隷のちえ

ピラミッドを作るのは
右のどの経路でも
労力は同じ。

$\boxed{\vec{F}\cdot d\vec{r}}$ で仕事という物理量を定義する。

AからBまでに要する仕事 $W = \displaystyle\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$

単位 $[\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}] = [\mathrm{J}]$ （ジュール）

▷ 運動方程式の変形

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

両辺に $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ と内積をとる。（第3回でやった）

$$\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = m\,\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= m\left(v_x\frac{dv_x}{dt} + v_y\frac{dv_y}{dt} + v_z\frac{dv_z}{dt}\right)$$

$$= m\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v_x^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v_y^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v_z^2\right)\right)$$

$$\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)\right)$$

$$\therefore \boxed{\frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}$$

スカラー方程式
tの1次ビブン

時間 dt の間になされた仕事 $\vec{F}\cdot d\vec{r}$

は $\frac{1}{2}mv^2$ の増加分に等しい。→ 運動エネルギー
と定義

最初の例では、仕事 mgh

$$\therefore \frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgh \quad \therefore v = \sqrt{2gh}$$ //

▶ 単振動の場合

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\therefore \frac{-kx\cdot dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}kx^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2\right) = 0$$ 保存量の表式

バネがした仕事 $\frac{1}{2}kx^2$ が 運動エネルギーに変わった

これをさらに進めて考える。

▶ ポテンシャル・エネルギーの導入

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

という式には２つの不満がある

(1) 左辺は d(　) という形でない。

$\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$ という量は $A\to B$ の経路に依存する

(2) 仕事もエネルギーも同じ物理量（力 × キョリ）

→ 統一できないか？

(1)の不満は本質的

→ 全ての力 $\vec{F}$ を扱うことをあきらめて，

$$\boxed{\vec{F}\cdot d\vec{r} = -dV}$$

とかけるような力 $\vec{F}$ だけに話を限定する

このような力は 保存力 と呼ばれ，

$$-\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \qquad \therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + V\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2 + V = \text{constant}}$$

V をエネルギーに昇格して； エネルギーの和は一定
（時間によらない）

と読むことにする。 V はポテンシャル・エネルギーと命名