第6回

▷ 前回のまとめ　2体問題

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_1 \\ m_2 \dfrac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_2 \end{cases}$$

内力　外力

$\vec{F}_{21}$　2が1に及ぼす力

重心座標　$\vec{R} = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$　　$(m_1 + m_2)\dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

相対座標 $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$　　換算質量　$\mu^{-1} = m_1^{-1} + m_2^{-1}$

内力のみの場合　$\mu \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{21}$ //

▷ 2質点からN質点へ

Nケの質点の運動　i番目のものは

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \underbrace{\vec{F}_{1i} + \vec{F}_{2i} + \cdots + \vec{F}_{Ni}}_{\text{内力}} + \underbrace{\vec{F}_i}_{\text{外力}}$$

$\sum$ を使って

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i$$

これを1からNまでたす.

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{F}_{ji}} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

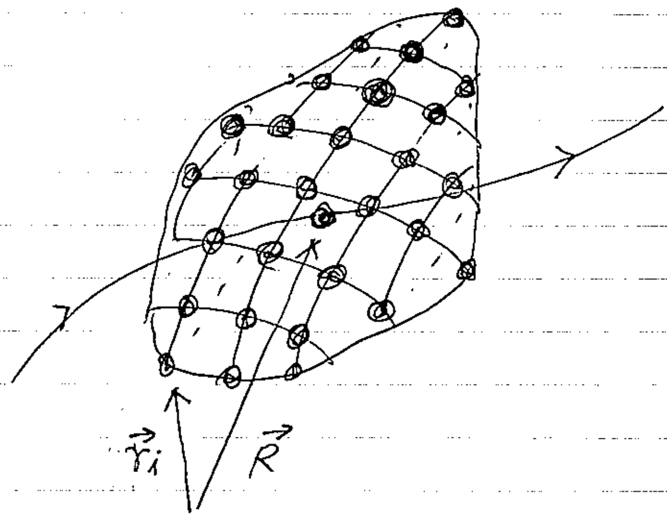
必ず $\vec{F}_{ji}$ と $\vec{F}_{ij}$ が一組ずつ出るのでゼロ

2体のときと同様に，$\dfrac{d^2}{dt^2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i}_{=M} \frac{d^2}{dt^2}\underbrace{\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}\right)}_{=\vec{R}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i}_{=\vec{F}}$$

N質点でも　$M\dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}$　は成立

▷ 質点の正体



大きさのある物体を小片に切り分けて微小な質点の集まりと考えると

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}$$

は，全質量Mが1点$\vec{R}$に集中していると考えたときの運動

大きさのある物体の重心の運動が質点の運動

▷ 重心の運動の別の見方

外力ゼロなら　$M\dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2} = 0$　もとにもどすと，

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\right) = 0$$

さらに　$\vec{v}_i = \dfrac{d\vec{r}_i}{dt}$　を使って書き直すと，

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i\right) = 0$$

保存則の形 $\frac{d}{dt}\bigcirc = 0$
時間によらない。

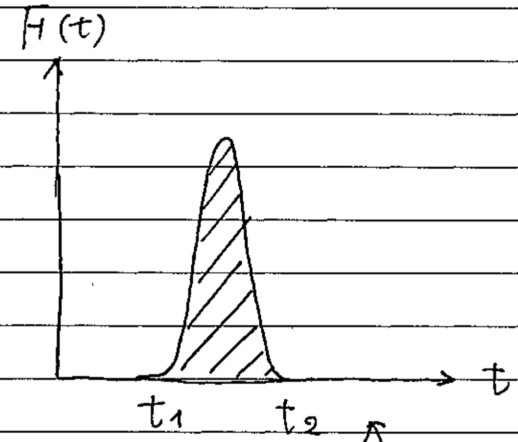
$\vec{p}_i = m\vec{v}_i$ 運動量 と定ぎすると.

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i\right) = 0 \qquad \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = 一定$$

内力のみを及ぼし合う系では 運動量の和は保存

運動方程式は $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ とかいてもいい （ニュートンはこう書いた）

▶ 衝突と撃力



バットでボールを打つ

非常にみじかい時間（t_1 から t_2）
で強い力が働く

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(t)$$

こんなのは解けない。 $\vec{F}(t)$ の形も未知. $\boxed{撃力}$

t_1 から t_2 まで時間で積分すると…

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\, dt$$

$\boxed{与えられた力積は運動量の変化に等しい}$

$$\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\, dt$$

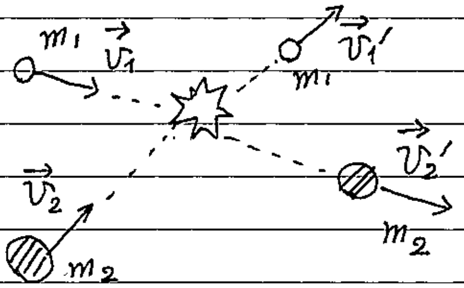
After　　Before　　力積　$\vec{F}_0 \Delta t$ などと書く

NO. 6-4

DATE . .

▷ 衝突

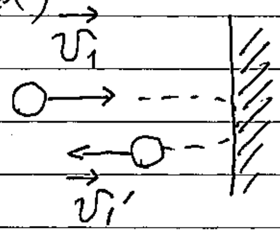
典型的撃力、しかも内力。運動量は前後で保存



$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1{}' + m_2\vec{v}_2{}'$$

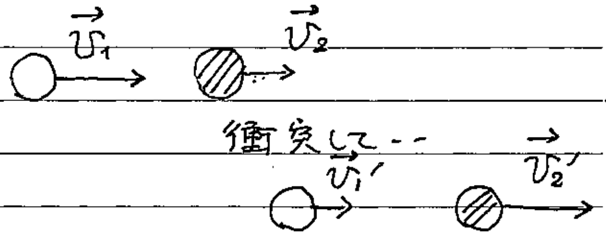
before　　　　after

▷ はねかえり係数（衝突係数、反発係数）



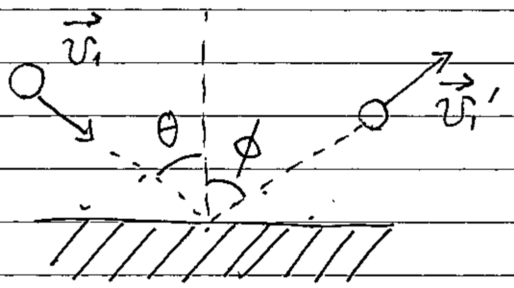
1次元　$e = \dfrac{-v_1{}'}{v_1}$　　$0 \leqq e \leqq 1$

2個の質点の衝突



$$e = \frac{-v_1{}' + v_2{}'}{v_1 - v_2}$$

2次元



衝突面に垂直な成分
だけ考えて

$$e = \frac{|v_1{}' \cos\phi|}{|v_1 \cos\theta|}$$

$e = 1$　完全弾性衝突 → エネルギー（次回）も保存

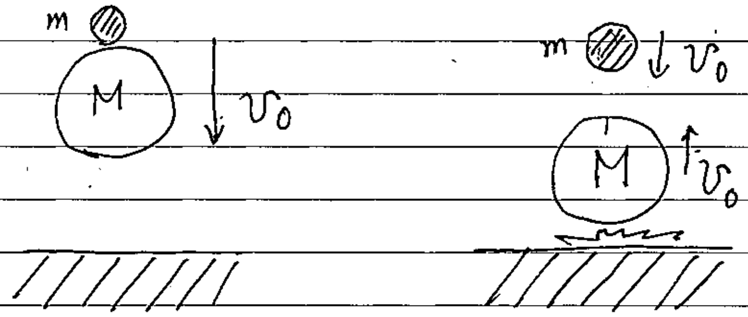
$e = 0$　完全非弾性衝突 → 衝突後、一体となって運動

NO. 6-5

DATE

テニスボールとバスケットボール

一緒におとす。　まずバスケットボールが床にあたり、



直後にテニスボールに当たる。
上向きを正とすると

運動量保存則　$Mv_0 - mv_0 = mv + MV$　①

$e=1$ として　$e = \dfrac{v - V}{v_0 - (-v_0)} = 1$　$v - V = 2v_0$　②

①②から V を消去　$V = v - 2v_0$ を①へ代入

$$(M-m)v_0 = mv + M(v - 2v_0)$$

$$v = \frac{3M - m}{m + M} v_0$$

$M/m \to \infty$ で　$v = 3v_0$　　3倍ではねかえる
ように見える