第5回

▷ 前回のまとめ

(1) 減衰振動 $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu\frac{dx}{dt}$

復元力 vs. まさつ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \eta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad \eta = \frac{\mu}{m}$$

$4\omega_0^2 > \eta^2$ $\quad x = e^{-\frac{\eta}{2}t}\left\{Ae^{i\omega_0' t} + Be^{-i\omega_0' t}\right\}$ $\quad (\omega_0')^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{\eta}{2}\right)^2$

$4\omega_0^2 = \eta^2$ $\quad x = e^{-\frac{\eta}{2}t}\left\{At + B\right\}$

$4\omega_0^2 < \eta^2$ $\quad x = e^{-\frac{\eta}{2}t}\left\{Ae^{\sqrt{(\frac{\eta}{2})^2-\omega_0^2}\,t} + Be^{-\sqrt{(\frac{\eta}{2})^2-\omega_0^2}\,t}\right\}$

(2) 強制振動 $\frac{d^2x}{dt^2} + \eta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f\cos\omega t$

特解 $x_s = a\cos(\omega t - \delta)$ を求める

$$a = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \omega^2\eta^2}} \qquad \tan\delta = \frac{\omega\eta}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

▷ 特解の意味

◎ 位相の遅れ $\delta = \tan^{-1}\frac{\omega\eta}{\omega_0^2-\omega^2}$

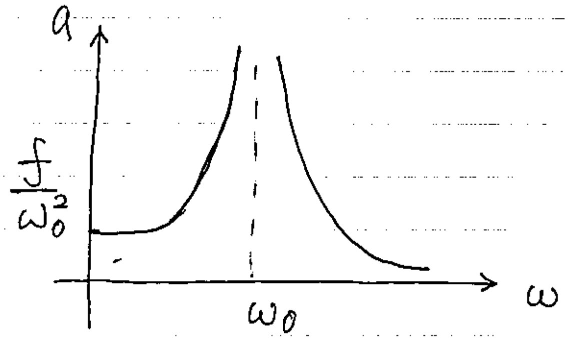
($\omega_0 > \omega$ を仮定)

まさつは運動に抵抗するので η があると振動は遅れる。

とくに δ が小さいときは δ は η に比例

◎ 共鳴　　簡単のため η は十分小さいとすると

$$a \fallingdotseq \frac{f}{|\omega_0^2-\omega^2|}$$



$\omega=\omega_0$ で a は発散

振動系の固有振動数 ω_0
と同じ振動数の外力を加えると

どんなに f が小さくても　大きな a が得られる　→ 共振, 共鳴

▶ 強制振動の一般解

一般解は　左辺=0 とした解　(減衰振動の解)

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\eta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=f\cos\omega t$$ の一般解は

$x=x_0+x_s$ で書ける。ただし x_s は特解

x_0 は $\frac{d^2x_0}{dt^2}+\eta\frac{dx_0}{dt}+\omega_0^2x_0=0$ の解

代入してみる $$\frac{d^2(x_0+x_s)}{dt^2}+\eta\frac{d(x_0+x_s)}{dt}+\omega_0^2(x_0+x_s)=f\cos\omega t$$

$$\underbrace{\frac{d^2x_0}{dt^2}+\eta\frac{dx_0}{dt}+\omega_0^2x_0}_{=0}+\underbrace{\frac{d^2x_s}{dt^2}+\eta\frac{dx_s}{dt}+\omega_0^2x_s=f\cos\omega t}_{\text{特解の式}}$$

たしかに x_0+x_s は解。しかも x_0 には A, B の任意定数がある。

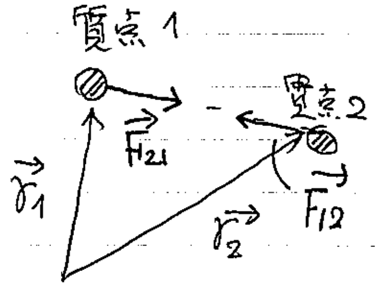
ちなみに t を十分大きく $(t\to\infty)$ すると　$x=x_0+x_s\to x_s$ //

ここから新しい単元

▷ 1質点からN質点へ

ニュートンの第3法則　作用・反作用の法則

2つの質点が及ぼしあう力は、それらを結ぶ線上にあって大きさは等しく向きは逆



$$\boxed{\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}} \qquad \vec{F}_{21} \parallel \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$\vec{F}_{ij}$　iがjに及ぼす力　内力と呼ぶ

▷ 2体問題

質点1　質量 m_1　位置 $\vec{r}_1$

　　2　　　　m_2　　　$\vec{r}_2$

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \underbrace{\vec{F}_{21}}_{2\to1\text{内力}} + \underbrace{\vec{F}_1}_{\text{外力}} & ① \\ m_2 \dfrac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_2 & ② \end{cases}$$

①+②　$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ を使うと

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2\right) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$(m_1+m_2)\,\frac{d^2}{dt^2}\underbrace{\left(\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}\right)}_{\text{これは重心の位置}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} \qquad M = m_1 + m_2 \qquad \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

全質量　全外力　とおくと

$$\boxed{M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}} \qquad ③$$

$① \times \frac{1}{m_1} - ② \times \frac{1}{m_2}$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = \frac{1}{m_1}\vec{F}_{21} - \frac{1}{m_2}\vec{F}_{12} + \frac{1}{m_1}\vec{F}_1 - \frac{1}{m_2}\vec{F}_2$$

2からみた1の位置

→ 相対位置

特別な場合として $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = 0$ を考えると

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{21}$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^{-1}}\frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = \vec{F}_{21}$$

質量と同じもの
と考える

換算質量 $\mu = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^{-1}$

あるいは $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$

このとき

$$\boxed{\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{21}} \qquad ④$$

外力がないとき 2体問題は1体問題と同じになる

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{21} \\ m_2 \dfrac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{12} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} M \dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2} = 0 & \text{等速直線} \\ \mu \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{21} & \text{質量}\mu\text{の運動方程式} \end{cases}$$

重心座標 $\vec{R}$ はすでにとけている.

相対座標 $\vec{r}$ について 質量を μ として解く