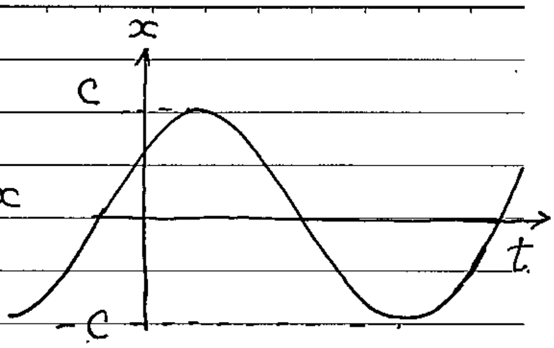
第4回

▷ 前回のまとめ



単振動の運動方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$

解 $x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$

$= C\sin(\omega t + \phi)$

A, B (C, ϕ) → 初期条件で決まる。

C : 振幅 ϕ : (初期)位相 ω : 角周波数

ばね $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ ふり子 $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$

周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

▷ 減衰振動

速度に比例する抵抗をもつバネ

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \underbrace{-\mu\frac{dx}{dt}}_{\text{抵抗}}}$$

文字を書き直す. $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ $\overset{\text{イータ}}{\eta} = \dfrac{\mu}{m}$ $\omega_0 > 0$, $\eta > 0$ ととってよい

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \eta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$x = Ae^{pt}$ を代入 $Ap^2e^{pt} + A\eta p e^{pt} + A\omega_0^2 e^{pt} = 0$

$$\therefore\ p^2 + \eta p + \omega_0^2 = 0$$

$$p = \frac{-\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

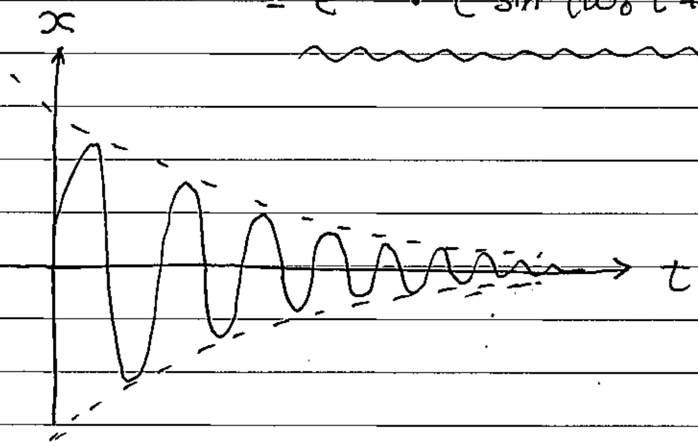
(1) $4\omega_0^2 - \eta^2 > 0$ $\sqrt{\eta^2 - 4\omega_0^2} = i\sqrt{4\omega_0^2 - \eta^2} = 2i\omega_0'$ とおく

$$P_1 = -\frac{\eta}{2} + i\omega_0' \qquad P_2 = -\frac{\eta}{2} - i\omega_0'$$

解は $x(t) = Ae^{\left(-\frac{\eta}{2} + i\omega_0'\right)t} + Be^{\left(-\frac{\eta}{2} - i\omega_0'\right)t}$ (A, B: 定数)

$$= e^{-\frac{\eta}{2}t}\left\{Ae^{i\omega_0' t} + Be^{-i\omega_0' t}\right\}$$

$$= e^{-\frac{\eta}{2}t} \cdot C\sin(\omega_0' t + \phi) \qquad (C, \phi : 定数)$$



減衰振動

(2) $4\omega_0^2 - \eta^2 < 0$ P_1, P_2 は実数

$$x(t) = Ae^{\left(-\frac{\eta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 - \omega_0^2}\right)t} + Be^{\left(-\frac{\eta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 - \omega_0^2}\right)t}$$

$$= e^{-\frac{\eta}{2}t}\left\{Ae^{\sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 - \omega_0^2}\, t} + Be^{-\sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 - \omega_0^2}\, t}\right\}$$ 過減衰

(3) $4\omega_0^2 - \eta^2 = 0$ $P_1 = P_2$ なので (1)(2) の方法は使えない。

もとへもどって $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\omega_0\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 = 0$

式の形をみて変形

$$\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{dx}{dt} + \omega_0 x}_{y\,とおくと}\right) + \omega_0\left(\frac{dx}{dt} + \omega_0 x\right) = 0$$

$\frac{dy}{dt} + \omega_0 y = 0$ $\therefore$ $y = Ae^{-\omega_0 t}$ A: 定数

xにもどすと $\quad \dfrac{dx}{dt} + \omega_0 x = A e^{-\omega_0 t}$

$$e^{\omega_0 t}\frac{dx}{dt} + \omega_0 e^{\omega_0 t} x = A$$

積のビブンを逆に使うと $\quad \dfrac{d}{dt}\left(e^{\omega_0 t} x\right) = A$

$$\therefore \quad e^{\omega_0 t} x = At + B \qquad B: 定数$$

$$x(t) = e^{-\omega_0 t}(At + B) \qquad または$$

$$= \underbrace{e^{-\frac{\eta}{2}t}(At+B)}_{} \qquad 臨界減衰$$

▷ 強制振動

単振動を行う系に周期的外力を加える

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = \underbrace{-kx}_{復元力} \underbrace{-\mu\frac{dx}{dt}}_{抵抗} + \underbrace{F \cos\omega t}_{外力}}$$

再び文字を書き直す $\quad \omega_0^2 = \dfrac{k}{m} \quad \eta = \dfrac{\mu}{m} \quad f = \dfrac{F}{m}$

整理して $\quad \dfrac{d^2x}{dt^2} + \eta\dfrac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f\cos\omega t$

解き方 (a) 右辺をゼロとして解く。 → すでに解いた。

(b) 外力と同じ振動の解をさがす

→ 強制振動の特解

$$x_s = a\cos(\omega t - \delta)$$

を代入して a と δ を求める

$$-a\omega^2\cos(\omega t-\delta) - a\omega\eta\sin(\omega t-\delta) + a\omega_0^2\cos(\omega t-\delta) = f\cos\omega t$$

加法定理を使って $\cos\omega t$ と $\sin\omega t$ の成分に分ける

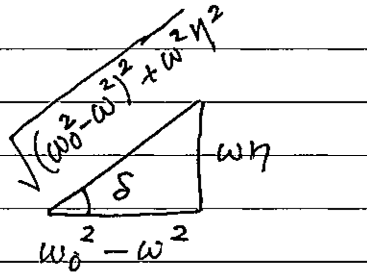
$$a(\omega_0^2-\omega^2)\{\cos\omega t\cos\delta + \sin\omega t\sin\delta\}$$
$$- a\omega\eta\{\sin\omega t\cos\delta - \cos\omega t\sin\delta\} = f\cos\omega t$$

係数をくらべると

$$\begin{cases} a(\omega_0^2-\omega^2)\cos\delta + a\omega\eta\sin\delta = f & ① \\ a(\omega_0^2-\omega^2)\sin\delta - a\omega\eta\cos\delta = 0 & ② \end{cases}$$

② → $\tan\delta = \dfrac{\omega\eta}{\omega_0^2-\omega^2}$　　$\delta = \tan^{-1}\dfrac{\omega\eta}{\omega_0^2-\omega^2}$　位相の遅れ

① → $a = \dfrac{f}{(\omega_0^2-\omega^2)\cos\delta + \omega\eta\sin\delta}$



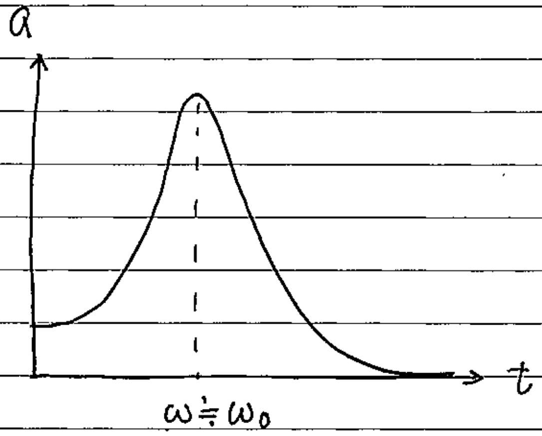
$$\text{分母} = (\omega_0^2-\omega^2)\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\eta^2}} + \omega\eta\frac{\omega\eta}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\eta^2}}$$

$$= \sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\eta^2}$$

とりあえず $\omega_0^2 > \omega^2$ で図示した

特解　$x_s = a\cos(\omega t-\delta) = \dfrac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\eta^2}}\cos(\omega t-\delta)$

共鳴



特解の振幅をみてみると.

$\omega \to 0 \quad a = \dfrac{f}{\omega_0^2}$

$\omega \to \infty \quad a = 0$

ηが十分小さいなら　$\omega \fallingdotseq \omega_0$で　aは最大

ばねの角振動数と外力の角振動数が等しいと
どんなにfが小さくてもaは発散的に大きくなる → 共鳴

抵抗成分 $\eta \dfrac{dx}{dt}$ は位相の遅れに対応

$$\tan\delta = \frac{\omega\eta}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

ηが小さいとき　δとηは比例

微分方程式の2つの任意定数はどこに？

たとえばηが小さいとき　$4\omega_0^2 - \eta^2 > 0$　なら

$$x(t) = e^{-\frac{\eta}{2}t} C\sin(\omega_0' t + \phi) \qquad \text{右辺}=0\text{の解}$$

$$+ \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \omega^2\eta^2}}\cos(\omega t - \delta) \qquad \text{特解}$$

$t \to \infty$での解が特解x_s