第3回　単振動

▷ 前回のまとめ

・運動方程式　$\vec{F} = m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

$\vec{r}(t)$ についての 2次(2階)の微分方程式
→ 2回の積分操作で $\vec{r}(t)$ が求まる
→ 1回の積分ごとに 1つ 任意定数が生じる

方程式の解は 2つの任意定数を含み、諸々の条件によって解が一意に決まる

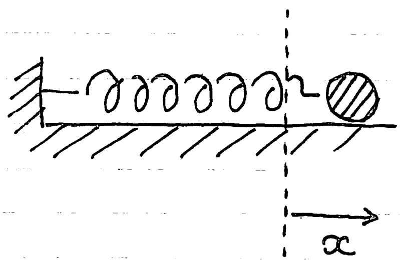
(例) 放物運動

自由落下，鉛直投げ上げ[下げ]，水平投射，斜方投射
→ すべて同じ方程式

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -mg \end{cases}$$

g　重力加速度

▷ ばねにつながれたおもりの運動



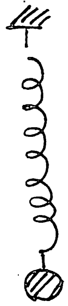
自然長のときのおもりの位置を原点にとって　のびる方向に x 軸

ばねの復元力は x に比例して向きは反対 → フックの法則

$$\boxed{-kx = m\dfrac{d^2x}{dt^2}}$$

放物運動とちがって $\vec{F}$ は x ($\vec{r}$) の関数

鉛直につるしたばね



自然長より x_0 だけ余分にのびてつりあう

$$-kx_0 + mg = 0$$

運動方程式は $mg - kx = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$

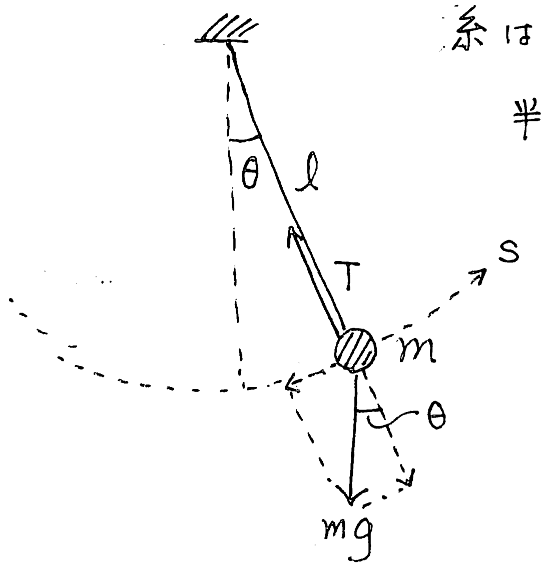
そこで x_0 だけのびたところに原点をうつす．

$X = x - x_0$ と変数変換すると　$\dfrac{dX}{dt} = \dfrac{dx}{dt}$ に注意して

$$mg - k(X + x_0) = m\frac{d^2X}{dt^2}$$

$$\therefore \boxed{-kX = m\frac{d^2X}{dt^2}}$$

▶ 単振り子の運動



糸はたるまないので運動は

半径 l の円周上，反時計周りに s をとる

$$s = l\theta$$

s の方向の運動方程式

$$-mg\sin\theta = m\frac{d^2s}{dt^2}$$
$$= ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

θ を十分小さいとすると　$\sin\theta \fallingdotseq \theta$

$$-mg\theta = ml\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \boxed{-g\theta = l\frac{d^2\theta}{dt^2}}$$

▷ 単振動の運動方程式

3つの例はすべて $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ と表せる

高校の数学でといてみる。

両辺に $\dfrac{dx}{dt}$ をかける

$$\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x\cdot\frac{dx}{dt}$$

左辺を $v = \dfrac{dx}{dt}$ で書きかえる

$$v\cdot\frac{dv}{dt} = -\omega^2 x\cdot\frac{dx}{dt}$$

ところで 任意の関数 $f(t)$ に対して $\dfrac{df^2}{dt} = 2f\dfrac{df}{dt}$

$$\therefore\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}\omega^2x^2\right)$$

$$\therefore\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\omega^2x^2\right) = 0$$

1回積分して $\dfrac{1}{2}v^2 + \dfrac{1}{2}\omega^2x^2 = \dfrac{1}{2}C^2\omega^2$ C：定数

$$\therefore\ v = \pm\omega\sqrt{C^2 - x^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm\omega\sqrt{C^2 - x^2}$$

変数分離形だから

$$\int\frac{dx}{\sqrt{C^2 - x^2}} = \int \pm\omega\, dt$$

$x = C\sin y$ とおけば　$-C \leqq x \leqq C$ は $-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$
に対応

$$\int \frac{dx}{\sqrt{C^2 - x^2}} = \int \frac{C\cos y \; dy}{C\sqrt{1-\sin^2 y}} = \int dy$$

$\cos y \geqq 0$

$\therefore \quad y = \pm\omega t + \phi \qquad \phi$: 定数

もとにもどして　$x = C\sin(\pm\omega t + \phi)$

$$= C\{\sin(\pm\omega t)\cos\phi + \cos(\pm\omega t)\sin\phi\}$$

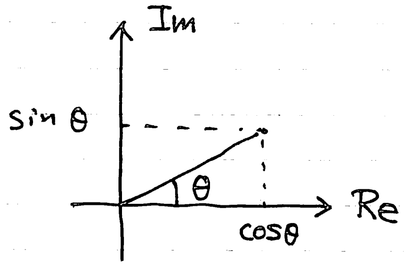
$$= A\sin\omega t + B\cos\omega t \quad //$$

ばねの場合　$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$　　ふりこの場合　$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

▷ 指数関数を使う方法

(まずは証明なしに)
オイラーの公式を導入する

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$



として指数関数の引数に虚数を導入する

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$x = Ae^{pt}$ を仮定して 代入　　$\frac{dx}{dt} = Ape^{pt}$

$$Ap^2 e^{pt} = -\omega^2 A e^{pt}$$

$$\therefore \quad p^2 = -\omega^2 \qquad p = \pm i\omega$$

したがって　$e^{i\omega t}$ と $e^{-i\omega t}$ はともに解

この方程式は線形 → すなわち x_1, x_2 が解ならば

$$ax_1 + bx_2$$

は解

よって一般解は　$x(t) = ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t}$

さらに変形すると

$$x(t) = (a+b)\cos\omega t + i(a-b)\sin\omega t$$

$$= A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

前にといた答と一致。

解 x_1 に対して

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\omega^2 x_1$$

ax_1 も解

$$\rightarrow \frac{d^2(ax_1)}{dt^2} = a\frac{d^2x_1}{dt^2}$$

$$= -a\omega^2 x_1 \quad //$$

解 x_1, x_2 に対して

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\omega^2 x_2$$

$x_1 + x_2$ も解

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1+x_2) = \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{d^2x_2}{dt^2}$$

$$= -\omega^2 x_1 - \omega^2 x_2 \quad //$$