第1回　位置，速度，加速度

▷ 物理学とはどのような学問か？

自然界に生起する諸々の現象の奥に存在する法則を①
観察事実②をよりどころとして追求すること

朝永振一郎「物理学とは何だろうか」

① 個々の事象でなく共通性をめざす → 抽象化を必要とする「大人」の学問

② 物理は実験科学　（数学と異なる）

▷ 抽象化

(1) 抽象化されたものは目に見えない　　チョウチョとカブトムシ

(2) 単純化を伴う

→ 物理学は近似の学問
自然をどのように単純化するか，がポイント

▷ 力学

質点 … 質量をもった，大きさゼロの点。
電子，原子，人間，天体 … みんな「点」

$\boxed{\text{質点の運動を時間の関数として決定すること}}$

力学の最終目的

点はどうやって表す？

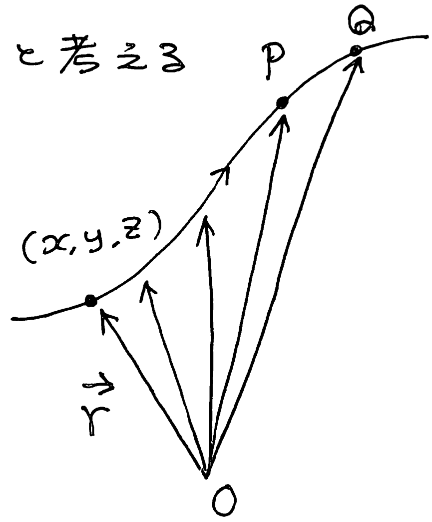
→ 3次元空間で (x, y, z) で指定

▷ 位置，速度，加速度

(x, y, z) をベクトルの成分表示と考える

点Pから点Qまで点が動いた

時刻 t　　　時刻 $t+\Delta t$



平均の速さは　$v_{AV} = \dfrac{\overset{\frown}{PQ}}{\Delta t}$

Qを限りなくPに近づけると，

キョリ $\overset{\frown}{PQ}$ は直線PQに限りなく近づく。P点での速度は，

$$\vec{v}_P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{OQ} - \vec{OP}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

成分で考えると，　$\vec{OP} = (x(t),\ y(t),\ z(t))$

$\vec{OQ} = (x(t+\Delta t),\ y(t+\Delta t),\ z(t+\Delta t))$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{OQ} - \vec{OP}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t},\ \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t},\ \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} \right)$$

$$= \left(\frac{dx(t)}{dt},\ \frac{dy(t)}{dt},\ \frac{dz(t)}{dt} \right)$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} \\ v_y(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} \\ v_z(t) = \dfrac{dz(t)}{dt} \end{cases}$$

同様に速度の変化率を考えて,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \left(= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \right)$$

$\vec{a}$ を加速度(ベクトル)という

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}}$$

成分で書くと.

$$\begin{cases} a_x(t) = \dfrac{dv_x(t)}{dt} = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} \\ a_y(t) = \dfrac{dv_y(t)}{dt} = \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} \\ a_z(t) = \dfrac{dv_z(t)}{dt} = \dfrac{d^2z(t)}{dt^2} \end{cases}$$

▷ 運動の例

等加速度運動 → $\vec{a}$ が時間によらない運動

$\vec{a} = \vec{a}_0$ 　$\vec{a}_0$ の向きに x 軸をとると, $\vec{a} = (a_0, 0, 0)$

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x(t)}{dt} = a_0 \\ a_y = \dfrac{dv_y(t)}{dt} = 0 \\ a_z = \dfrac{dv_z(t)}{dt} = 0 \end{cases}$$

$v_x(t)$, $v_y(t)$, $v_z(t)$ が知りたい関数

→ その微分がわかっている

→ 微分方程式という

力学では微分方程式をひんぱんに扱う

▷ 微分方程式

（例）バクテリアの培養

時刻 t のバクテリアの数 $N(t)$ とすると，単位時間あたりのバクテリアの増殖量（増殖速度）は N に比例する

一般に未知の関数 $f(t)$ とその導関数 $\frac{df(t)}{dt}$, $\frac{d^2f(t)}{dt^2}$, …

を含む方程式を微分方程式という。

この場合 $\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t)$　　λ：比例定数

変数分離形と呼ばれる形。 dN と dt を"分離"して

$$\int \frac{dN}{N} = \int \lambda\, dt$$

$\left(\begin{array}{c} \lim \text{をとる前は…} \\ \frac{\Delta N}{N} = \lambda \Delta t \end{array} \right)$

$$\log N + C_1 = \lambda t + C_2$$　　C_1, C_2 定数

$$\log N = \lambda t + C$$　　$C_2 - C_1$ を新たに C にした。

$$\therefore\ N(t) = e^{\lambda t + C} = e^C e^{\lambda t} = Ae^{\lambda t}$$

定数 C の代わりに $A = e^C$ とした。

時刻 $t=0$ でのバクテリアの数を N_0 とすれば

$$\boxed{N(t) = N_0 e^{\lambda t}}$$

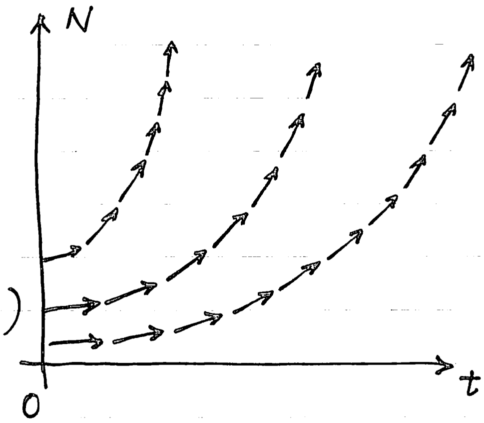
解の存在と一意性

N-t 平面に $\dfrac{dN}{dt}$ を図示してみると…

(t, N) を一点指定すると

接線は一本しか引けない。(一本はある)

→ 接線の包絡線は存在して，
　唯一つ。



積分して解となる関数を求めるから，一回積分するごとに
未定の積分定数が一つ発生する。

→ 適当な時刻における条件（初期条件）を決めて
　積分定数を決定する。