Mathematicaによる微分・積分

講義内容

1. 微分
2. 偏微分
3. 全微分
4. 不定積分
5. 定積分
6. テイラー展開
7. 微分方程式の解法

微分

- 関数を1回微分する

  D[関数 , 変数]

- 関数をn回微分する

  D[関数 , { 変数, n }]

  - 変数名と微分回数をリストとして与える.

- 変数に値を代入する

  数式 /. 変数 -> 数値

  - 他の場合にも利用できる

練習1

```
In[1]:= D[x^3, x]

Out[1]= 3 x^2

In[2]:= D[x^3, {x, 2}]

Out[2]= 6 x

In[7]:= D[x^3, {x, 2}] /. x -> 2

Out[7]= 12

In[11]:= D[f[x] , x]

Out[11]= f'[x]
```

偏微分

- 関数を複数の変数で偏微分する

  D[関数 , 変数1 , 変数2 , …]

  - 変数名をカンマ(,)で区切って複数記述する.

- 関数を複数の変数で繰り返し偏微分する

  D[関数, {変数1,N1}, {変数2,N2}, …]

  - 変数名をカンマ(,)で区切って複数記述する.

練習2

```
In[8]:= D[x^2 y^3, x, y]
```

Out[8]= $6\,x\,y^2$

```
In[9]:= D[x^2 y^3, {x, 2} , {y, 2} ]
```

Out[9]= $12\,y$

```
In[10]:= D[f[x, y], x, {y, 2}]
```

Out[10]= $f^{(1,2)}[x,\ y]$

全微分

偏微分 → 関数f(x,y)が変数xだけの関数と考える.

全微分 → 関数f(x,y)の変数yが変数xとともに変化すると考える.

- 関数を1回全微分する

  Dt［　関数　，　変数］

  - 拡張した利用法は関数D［ ］と同じ.

練習3

```
In[12]:= Dt[x^2 + y^2, x]

Out[12]= 2 x + 2 y Dt[y, x]

In[19]:= Dt[x^2 + y^2, x]

Out[19]= 2 x + 2 y Dt[y, x]

In[22]:= Dt[f[y], x]

Out[22]= Dt[y, x] f′[y]
```

積分

- 関数を不定積分する

  Integrate[関数 , 変数]

- 関数を定積分する

  Integrate[関数 , {変数, 初期値,最終値}]

- 関数を重積分する

  Integrate[関数 , {変数, 初期値,最終値} , {変数, 初期値,最終値}]

練習4

```
In[23]:= Integrate[x^3, x]
```

Out[23]= $\frac{x^4}{4}$

```
In[24]:= Integrate[x^2, {x, 0, 2}]
```

Out[24]= $\frac{8}{3}$

```
In[28]:= Integrate[x y, x, y]
```

Out[28]= $\frac{x^2 y^2}{4}$

テイラー展開

- テイラー展開
  - 特殊関数を多項式で近似(展開)する.
  - 展開できない関数がある.

関数f(x)をx0の周りでn次までテーラー展開する

Series[f(x) , { x, x0, n }]

展開された関数から高次項を削除する

Normal[展開された式]

練習5

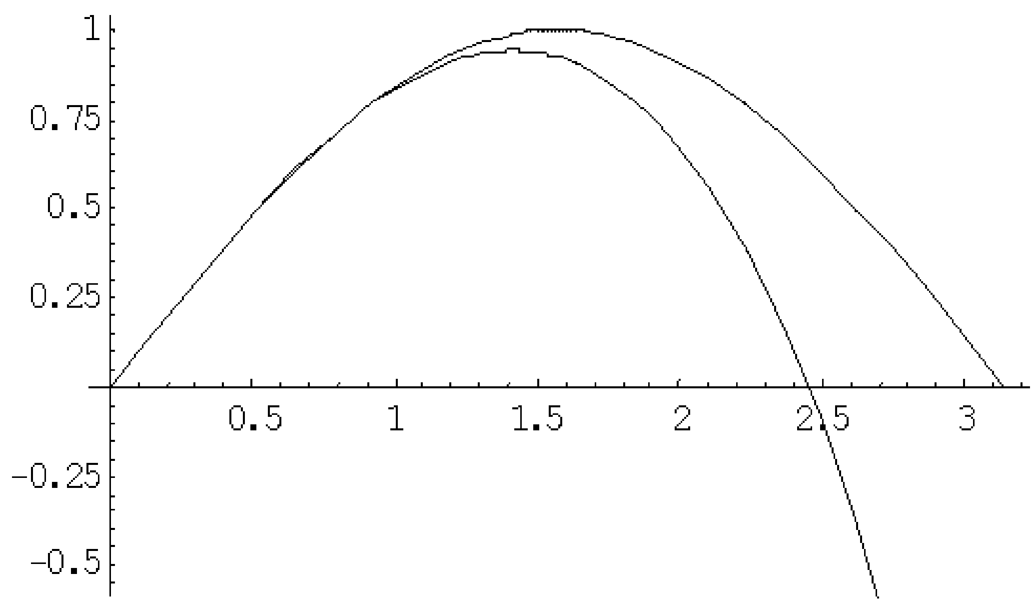
```
In[89]:= Series[Sin[x], {x, 0, 3}]
```

Out[89]= $x - \frac{x^3}{6} + O[x]^4$

```
In[90]:= Normal[%]
```

Out[90]= $x - \frac{x^3}{6}$

```
In[91]:= Plot[{Sin[x], %}, {x, 0, Pi}]
```



Out[91]= - Graphics -

微分方程式の解法(1)

微分方程式f(x,y[x])=0をシンボル的に解く.

DSolve[f(x,y)==0 , y , x]

連立微分方程式をシンボル的に解く.

DSolve[{f1==0, f2==0, ...}, {y1,y2,...}, x]

- リストの部分は, 式や変数を{}でくくって記述する.

微分方程式の解法(2)

- 微分方程式は，必ずシンボル的に解けるとは限らない．
- シンボル的に解けないときは数値的に解く．
- 微分方程式を数値的に解くためには，関数NDSolveを用いる．

練習6

```
In[159]:= DSolve[ y''[x] == 0, y[x], x]

Out[159]= {{y[x] → C[1] + x C[2]}}

In[162]:= DSolve[{y'[x] == 1, y[0] == 5}, y[x], x]

Out[162]= {{y[x] → 5 + x}}
```

条件付き問題は
連立方程式！

```
In[201]:= DSolve[ y''[x] == y[x], y[x], x]
```

Out[201]= $\{\{y[x] \to E^{-x} C[1] + E^{x} C[2]\}\}$

演習問題1

1. 次の微分を行いなさい.
    1. $\sin(x^2)$をxで1回微分する.
    2. $\log(x)\sin(x)$をxで3回微分する.

2. 上の問いで，微分前の関数と微分後の関数を区間$1<x<3$についてグラフで表示しなさい.

演習問題2

1. 次の微分を行いなさい．
    1. cos(x)sin(y)/(xy)をxで2回，yで3回微分する．
    2. log(x)sin(y)/xをxで2回，yで2回微分する．

2. 上の問いで，微分前の関数と微分後の関数を区間$1<x<3$，$-2<y<2$についてグラフで表示しなさい．

演習問題3

1. 演習問題1-1で微分して得られた関数を積分し，微分する前の関数を導出しなさい．
2. 演習問題2-1で偏微分して得られた関数を積分し，微分する前の関数を導出しなさい．

演習問題4

1. cos(x)をx=0の周りで3次まで展開しなさい.
2. 1で求めた多項式とcos(x)を区間$0<x<\pi$で同じグラフに重ね書きしなさい.
3. cos(x)を$x=\pi/2$の周りで3次まで展開しなさい.
4. 3で求めた多項式とcos(x)を区間$0<x<\pi$で同じグラフに重ね書きしなさい.

演習問題5

次の微分方程式を解きなさい.

1. $y'(x)=x,\ y(0)=0$ を$y(x)$について解きなさい.
2. $y'(x)=-y(x),\ y(0)=1$ を$y(x)$について解きなさい.

演習問題6

- 質点を速度10m/sで上方に投げ出した場合の質点の運動方程式は次式で与えられる.

$$\frac{d^2x}{dt^2}+9.8=0, \frac{dx[0]}{dt}=10, x[0]=0$$

1. 運動方程式を解いて，質点の位置 x(t) を求めよ.
2. 質点の速度を与える関数を求めよ.
3. 横軸に時間，縦軸に位置と速度をとるグラフを描け.

演習問題7（努力問題）

1. 運動方程式を解いて，速度10m/sで45度方向へ投げ出された質点の座標を求めなさい.