Mathematicaによる線形代数

講義内容

1. 行列とベクトルの定義 (基本)
2. 行列とベクトルの定義 (関数の利用)
3. 行列の部分抽出
4. スカラーとベクトルの演算
5. ベクトルと行列の積･外積
6. 行列演算 (転置、逆行列、行列式、小行列)
7. 線形連立1次方程式の解法

行列やベクトルの定義（1）

行列やベクトルはリストとして定義する。

- ベクトル
  - リストそのものとして定義する。
- 行列
  - リストのリストとして定義する。
  - 各行が1つのリストを構成し、その集合として行列を構成する。

練習1

- 行列を定義する。

```
In[1]:= A = {{1, 2}, {3, 4}}

Out[1]= {{1, 2}, {3, 4}}
```

- ベクトルを定義する

```
In[2]:= b = {x, y}

Out[2]= {x, y}
```

行列･ベクトルの定義 (2)

行列の定義

Table[f(i,j), {i,m},{j,n}]

- i行j列成分を関数f(i,j)とする行列を定義する。

Array[**変数名**,{m,n}]

- i行j列成分が　変数名[I,j]である行列を定義する。

[リスト]を対角項とする行列を定義する

DiagonalMatrix[**リスト**]

n次元の単位行列を定義する。

IdentityMatrix[n]

練習 2

```
In[4]:= Table[10 i + j, {i, 2}, {j, 2}]

Out[4]= {{11, 12}, {21, 22}}

In[5]:= Array[a, {2, 2}]

Out[5]= {{a[1, 1], a[1, 2]},
         {a[2, 1], a[2, 2]}}

In[6]:= DiagonalMatrix[b]

Out[6]= {{x, 0}, {0, y}}
```

行列の部分抽出

- 要素を取り出す
  - M[[i,j]]　行列Mのi行j列成分を取り出す
- 特定の行を取り出す
  - M[[i]]　行列Mのi行を取り出す
- 特定の列を取り出す
  - Transpose[M][[i]]　行列Mのi列を取り出す
- 部分行列を取り出す
  - M[[{i,j},{k,l}]]
    - i,j行目、k,l列目からなる部分行列を取り出す。

練習3

```
A = Table[10 i + j, {i, 3}, {j, 3}]

{{11, 12, 13}, {21, 22, 23}, {31, 32, 33}}

A[[1, 2]]

12

A[[2]]

{21, 22, 23}
```

スカラーとベクトルの演算

1. **ベクトルとスカラーの加減算**

   A+1　　　ベクトルの各成分へ同じ値を加える
   　　　　　(これは数学の定義と異なるので注意が必要)

2. **ベクトルのスカラー倍**

   kA　　　　ベクトルの各成分にスカラーを掛ける

3. **ベクトルの加減算**

   A ＋ B　　ベクトルの成分ごとの加減算

4. **ベクトル・行列への関数の適用**

   各成分に関数を適用することになる。

練習 4

```
In[38]:= a = {1, 2}; b = {3, 4}

Out[38]= {3, 4}

In[39]:= a + 10

Out[39]= {11, 12}

In[43]:= k a

Out[43]= {k, 2 k}

In[41]:= a + b

Out[41]= {4, 6}
```

ベクトルと行列の積･外積

1. **ドット (.) 演算子の利用**

A . B

- **行列とベクトルの積を求める**
- **行列と行列の積を求める**
- **ベクトル同士の演算では内積 (スカラー積)**

2. **外積 (ベクトル積) の計算**

Outer[Times, ベクトル1, ベクトル2]

練習 5

```
In[46]:= a . b

Out[46]= 11

In[50]:= a = {p, q, r}; b = {u, v, w}

Out[50]= {u, v, w}

In[51]:= a . b

Out[51]= p u + q v + r w

In[52]:= Outer[Times, a, b]

Out[52]= {{p u, p v, p w}, {q u, q v, q w}, {r u, r v, r w}}
```

転置・逆行列・行列式・小行列

1. **行列の転置**

   Transpose[M]　　**行列Mの転置を求める。**

2. **逆行列**

   Inverse[M]　　**行列Mの逆行列を求める。**

3. **行列式の値**

   Det[M]　　**行列Mからなる行列式の値を求める。**

4. **小行列**

   Minors[M, n]　　**行列Mのn次の小行列を列挙する。**

練習6

```
M = {{a, b}, {c, d}}
```

```
{{a, b}, {c, d}}
```

```
Transpose[M]
```

```
{{a, c}, {b, d}}
```

```
Det[M]
```

```
-b c + a d
```

連立1次方程式の解法

問題:

次の連立方程式を解く。

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

方法:

1. Solve[**連立1次方程式**, **変数リスト**]
2. LinearSolve[**係数行列**, **右辺ベクトル**]

練習 7

```
n[84]:= a = {{2, 1}, {3, -2}}; x = {x1, x2}; b = {4, -1}
Out[84]= {4, -1}
n[85]:= Solve[a . x == b, {x1, x2}]
Out[85]= {{x1 → 1, x2 → 2}}
n[87]:= LinearSolve[a, b]
Out[87]= {1, 2}
```

演習問題

1．以下の行列を作成しなさい。

① 3次の単位行列（IdentityMatrix）

② 4次の零行列(Table, DiagonalMatrix)

③ 対角成分が{1,5,7}である3次の対角行列 (DiagonalMatrix)

④ i行j列成分の値がi/jとなる5行3列の行列 (Table)

演習問題

2．次の行列について、以下の操作を行いなさい。

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 10 & 12 & 11 & 9 \\ 17 & 19 & 21 & 20 \\ 24 & 26 & 28 & 30 \end{bmatrix}$$

① 3行2列成分を取り出しなさい。

② 2行目の成分を取り出しなさい。

③ 1行目と4列目を取り除いてできる部分行列を作成しなさい。

演習問題

3．次のベクトルの和差、内積を求めなさい。

a={1, 2 ,3, 4} , b={6, 5, 3, 2}

4．次の行列について*a+b*, *a-b*, $a^T b$を求めなさい。

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \end{bmatrix}$$

演習問題

5．次の行列の逆行列を求めなさい。

$$(1)\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \qquad (2)\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

6．前問で求めた逆行列と元の行列の積が単位行列となることを確認しなさい。

演習問題

7．次の行列について、転置行列、逆行列、行列式の値を求めなさい。また、求めた逆行列がもとの行列の逆行列であることを確認しなさい。

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 \\ 0 & b & a & b \\ 0 & 0 & b & a \end{bmatrix}$$

演習問題

8．次の連立1次方程式の解を、SolveとLinearSolveで求めなさい

$$(1)\ \begin{cases} 3x+6y+6z=3 \\ 5x+10y+7z=11 \\ 4x+7y+5z=6 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} -x+2y-z=3 \\ 2x-5y+3z=-5 \\ 3x-5y+5z=-4 \end{cases}$$