Mathematicaによる曲線フィット

講義内容

1. データ点のプロット
2. 多項式による曲線フィット（最小二乗法）
3. 関数Fitの応用(1):非等間隔データの場合
4. 関数Fitの応用(2):多項式以外での近似
5. 多項式による厳密な曲線フィット
6. 補間法による曲線フィット

データ点のプロット

1. 等間隔データ$\{f_1,f_2,...\}$の２次元プロット

   ListPlot[$\{f_1,f_2,f_3,...\}$]

2. ２次元プロット点を直線で結ぶ

   ListPlot[$\{f_1,f_2,f_3,...\}$, PlotJoined$\rightarrow$True]

3. 不等間隔データ$\{\{x_1,f_1\}\{x_2,f_2\},...\}$の２次元プロット

   ListPlot[$\{\{x_1,f_1\},\{x_2,f_2\},...\}$]

4. $\{\{x_1,y_1,f_1\},\{x_2,y_2,f_2\},...\}$の３次元プロット

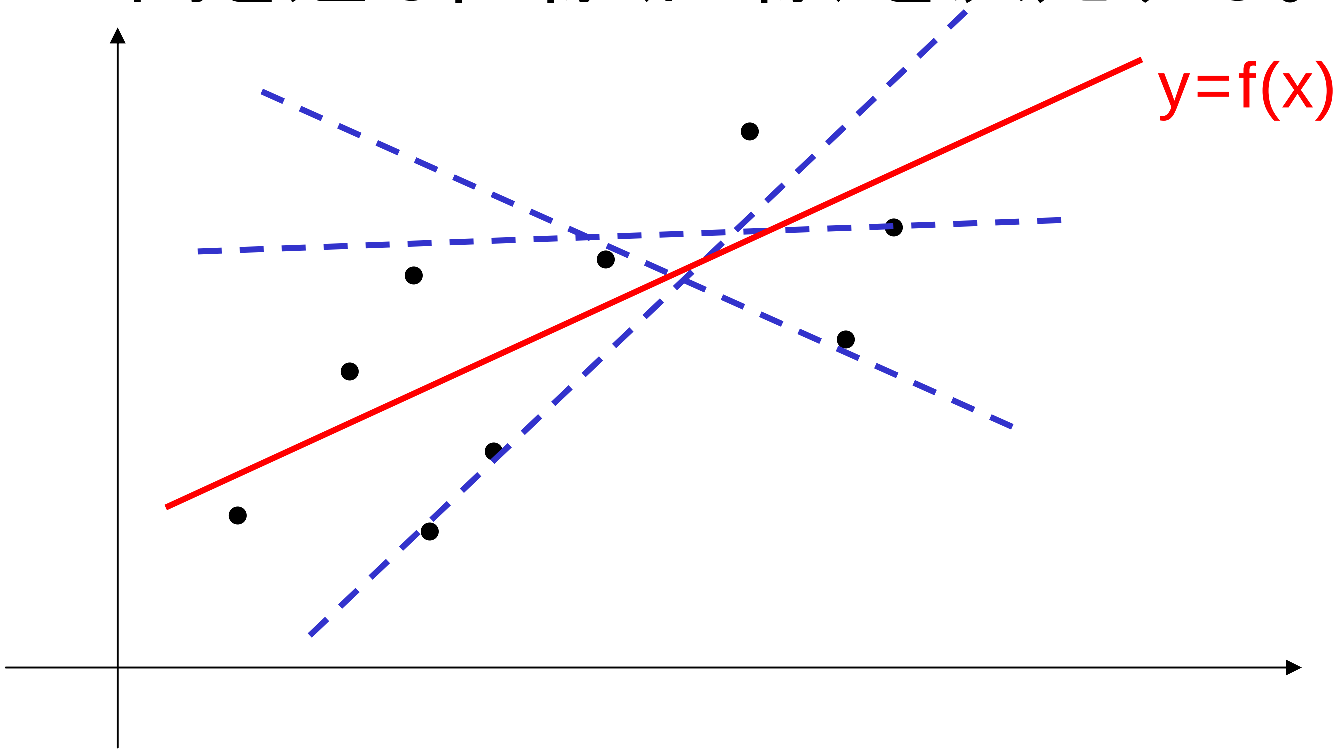
   ListPlot3D[$\{\{x_1,y_1,f_1\},\{x_2,y_2,f_2\},...\}$]

演習問題1

1. $\{x_i,f_i\}=\{\{1,6\}, \{4,5\}, \{2,3\}, \{9,1\}, \{2,3\}\}$を2次元グラフにプロットし、点同士を直線で結びなさい。
2. $\{x_i,y_i ,f_i\}=\{\{1,0,2\}, \{-1,-2,5\}, \{3,4,-1\}, \{-2,2,0\}, \{-4,-3,6\}\}$を3次元グラフにプロットしなさい。

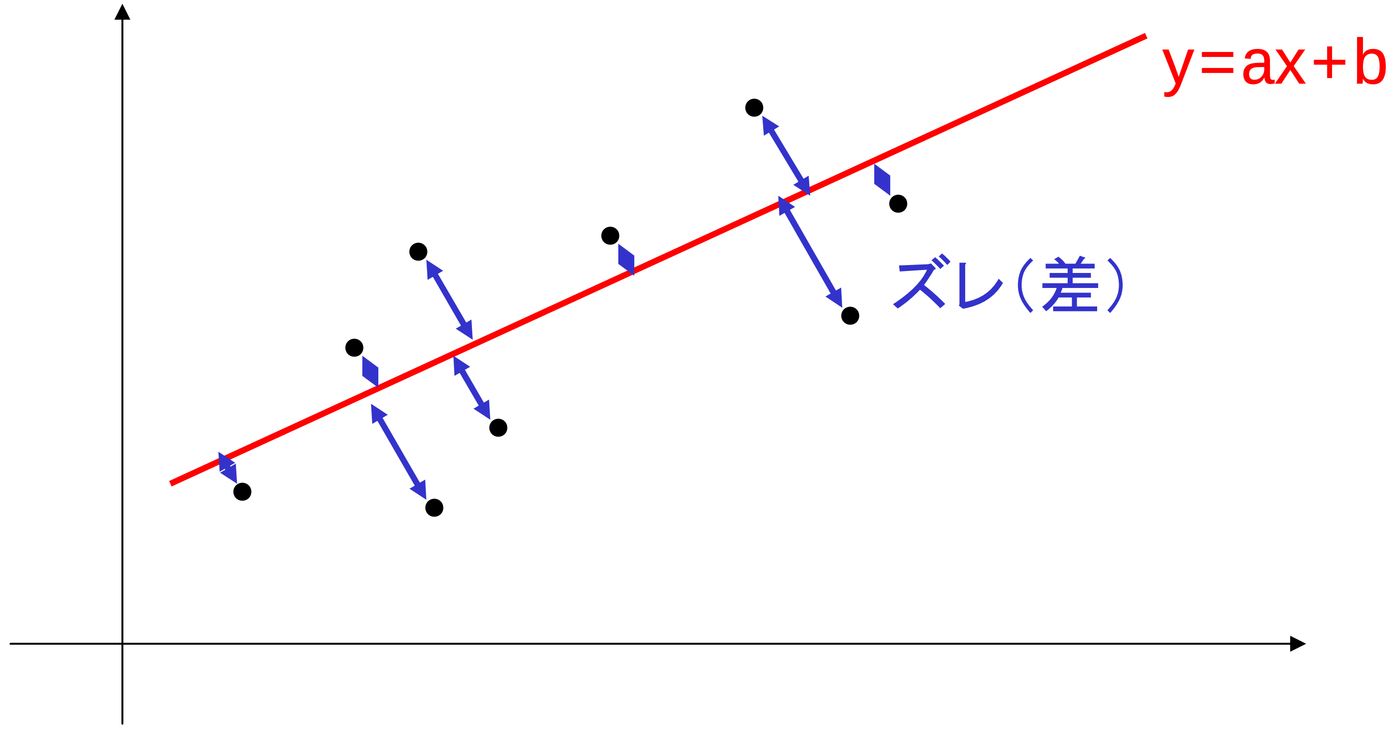
最小二乗法の理論(1)

- 多数の点が与えられているときに、それらの間を通る直線（曲線）を決定する。



最小二乗法の理論(2)

- 点と線の距離を最小にするようにa,bを決定する。



多項式による曲線フィット

- $\{f_1,f_2,f_3,\ldots\}$を多項式$y=f(x)$ で最小二乗法により近似する方法について学ぶ。
- ただし、xは等間隔とする。

1. 1次関数$f(x)=a+bx$で近似

Fit[$\{f_1,f_2,f_3,\ldots\}$, {1,x}, x]

2. 2次関数$f(x)=a+bx+cx^2$で近似

Fit[$\{f_1,f_2,f_3,\ldots\}$, {1,x,x^2}, x]

3. n次関数$f(x)=a_1+a_2x+\ldots+a_nx^n$で近似

Fit[$\{f_1,f_2,f_3,\ldots\}$, {1,x, …, x^n}, x]

演習問題2

1. 練習２のデータを２次関数と３次関数で最小二乗法近似しなさい。
2. １次、２次、３次関数をデータとともに同一グラフに表示し、比較しなさい。

関数Fitの応用(1)

- 不等間隔のデータを最小二乗法で近似する方法について学ぶ。
- データは以下のように与えられるとする。

$\{x_1,f_1\}, \{x_2,f_2\},\ldots,\{x_n,f_n\}$

1. １次関数 $f(x)=a_1+a_2x$ で近似

Fit[{{x_1,f_1}, {x_2,f_2},…}, {1,x},x]

2. n次関数 $f(x)=a_1+a_2x+\ldots+a_nx^n$ で近似

Fit[{{x_1,f_1}, {x_2,f_2},…}, {1,x, …, x^n},x]

演習問題3

1. 練習３のデータを２次関数と３次関数で最小二乗法近似しなさい。
2. １次、２次、３次関数をデータとともに同一グラフに表示し、比較しなさい。

関数Fitの応用(2)

1. ２変数関数を完全多項式近似する方法
   - 完全多項式：$f(x,y)=a_1+a_2x+a_3y+a_4xy+\ldots$

1次関数近似

Fit[{{x_1,y_1 ,f_1}, {x_2,y_2 ,f_2},…},{1,x,y},{x,y}]

2. べき乗関数以外の関数で近似する方法

例えば、指数関数で$a+be^x$と近似するには

Fit[{{x_1,f_1}, {x_2,f_2},…}, {1,Exp[x]},x]

演習問題4

1. 練習4のデータをxとyの２次関数で近似し、もとのデータと近似曲線のグラフを重ね書きしなさい。

２次関数: $f(x,y)=a_1+a_2x+a_3y+a_4x^2+a_5xy+a_6y^2$

2. 以下のデータを関数$f1(x)=a_1+a_2x+a_3x^2$と$f2(x)=a_1+a_2e^x$によって関数近似し、元のデータと近似曲線を同一のグラフにプロットしなさい。

データ:{3, 8, 15, 25, 80}

多項式による厳密な曲線フィット

- データ点を通る多項式曲線を決定する。
- データ点数がnのときn-1次多項式となる。

1. 等間隔データの場合

   $nl=\{f_1, f_2, f_3, \ldots\}$

   InterpolatingPolynomial[nl,x]

2. 不等間隔データの場合

   $nl=\{\{x_1,f_1\}, \{x_2,f_2\},\ldots\}$

   InterpolatingPolynomial[nl,x]

演習問題5

1. 以下のデータ点を厳密に通る多項式を決定し、グラフにプロットしなさい。
   1. $\{\ldots, f_i, \ldots\}=\{6, 3, -2, 20, 100\}$
   2. $\{\ldots, \{x_i, f_i\}, \ldots\}=\{\{0,10\}, \{5,2\}, \{7,3\}, \{10,-1\}, \{12,-5\}\}$
2. 演習問題5－1で求めた関数を利用して以下の点での関数値を求めなさい。（ヒント： /.）

$\{\ldots, x_i, \ldots\}=\{1.5, 3.5, 6, 15\}$

補間法による厳密な曲線フィット

- 補間法を用いて、データ点を通る曲線を求める。
- 区間ごとに多項式（標準は3次）近似する。
- データ点が多い場合、多項式補間より滑らかな補間曲線を生成する。

等間隔データの場合

Interpolation[{f_1, f_2, f_3, …}]

不等間隔データの場合

Interpolation[{{x_1,f_1}, {x_2,f_2},…}]

多項式の次数をn次に変更する場合

Interpolation[{データ点のリスト}, InterpolationOrder -> n]

演習問題6

1. 演習問題5-1のデータ点を厳密に通る曲線を、関数Interpolationを用いて決定しなさい。データ点と求めた曲線を同一グラフにプロットして比較しなさい。
2. 演習問題5-1のデータ点を厳密に通る1次曲線（折れ線）を、Interpolationを用いて決定しなさい。それを演習問題6-1で求めた曲線と同一グラフにプロットして比較しなさい。