Mathematicaによる微分･積分

講義内容

1. 微分
2. 偏微分
3. 全微分
4. 不定積分
5. 定積分
6. テイラー展開
7. 微分方程式の解法

微分

- 関数を1回微分する
  D[関数 , 変数]
- 関数をn回微分する
  D[関数 , { 変数, n }]
  - 変数名と微分回数をリストとして与える。
- 変数に値を代入する
  数式 /. 変数 -> 数値
  - 他の場合にも利用できる

練習1

```
In[1]:= D[x^3, x]

Out[1]= 3 x^2

In[2]:= D[x^3, {x, 2}]

Out[2]= 6 x

In[7]:= D[x^3, {x, 2}] /. x -> 2

Out[7]= 12

In[11]:= D[f[x], x]

Out[11]= f'[x]
```

演習問題1

1. **次の微分を行いなさい。**
   1. sin(x^2)**を**x**で1回微分する。**
   2. log(x)sin(x)**を**x**で**3**回微分する。**

2. **上の問いで、微分前の関数と微分後の関数を区間**1<x<3**についてグラフで表示しなさい。(ヒント:**Plot**を用いる。)**

偏微分

- 関数を複数の変数で偏微分する

  D[関数 , 変数1 , 変数2 , …]

  - 変数名をカンマ(,)で区切って複数記述する。

- 関数を複数の変数で繰り返し偏微分する

  D[関数, {変数1,N1}, {変数2,N2}, …]

  - 変数名をカンマ(,)で区切って複数記述する。

練習 2

```
In[8]:= D[x^2 y^3, x, y]
```

Out[8]= $6\,x\,y^2$

```
In[9]:= D[x^2 y^3, {x, 2}, {y, 2}]
```

Out[9]= $12\,y$

```
In[10]:= D[f[x, y], x, {y, 2}]
```

Out[10]= $f^{(1,2)}[x,\ y]$

演習問題2

1. **次の微分を行いなさい。**
    1. cos(x)sin(y)/(xy)**をx**で2**回**、y**で**3**回微分する。**
    2. log(x)sin(y)/x**をxで**2**回**、y**で**2**回微分する。**

2. **上の問いで、微分前の関数と微分後の関数を区間**$1<x<3$、$-2<y<2$**についてグラフで表示しなさい。**(**ヒント**：Plot3D**を用いる。**)

全微分

偏微分 → 関数f(x,y)が変数xだけの関数と考える。

全微分 → 関数f(x,y)の変数yが変数xとともに変化すると考える。

- 関数を1回全微分する

  Dt［　関数　，　変数］

  - 拡張した利用法は関数D［］と同じ。

練習3

```
In[12]:= Dt[x^2 + y^2, x]

Out[12]= 2 x + 2 y Dt[y, x]

In[19]:= Dt[x^2 + y^2, x]

Out[19]= 2 x + 2 y Dt[y, x]

In[22]:= Dt[f[y], x]

Out[22]= Dt[y, x] f′[y]
```

積分

- **関数を不定積分する**

  Integrate[**関数** , **変数**]

- **関数を定積分する**

  Integrate[**関数** , {**変数**, **初期値**,**最終値**}]

- **関数を重積分する**

  Integrate[**関数** , {**変数**, **初期値**,**最終値**} , {**変数**, **初期値**,**最終値**}]

練習 4

In[23]:= `Integrate[x^3, x]`

Out[23]= $\frac{x^4}{4}$

In[24]:= `Integrate[x^2, {x, 0, 2}]`

Out[24]= $\frac{8}{3}$

In[28]:= `Integrate[x y, x, y]`

Out[28]= $\frac{x^2 y^2}{4}$

演習問題3

1. 演習問題1-1で微分して得られた関数を積分し、微分する前の関数を導出しなさい。
2. 演習問題2-1で偏微分して得られた関数を積分し、微分する前の関数を導出しなさい。

テイラー展開

- テイラー展開
  - 特殊関数を多項式で近似（展開）する。
  - 展開できない関数がある。

関数f(x)をx0の周りでn次までテーラー展開する

Series[f(x) , { x, x0, n }]

展開された関数から高次項を削除する

Normal[展開された式]

練習 5

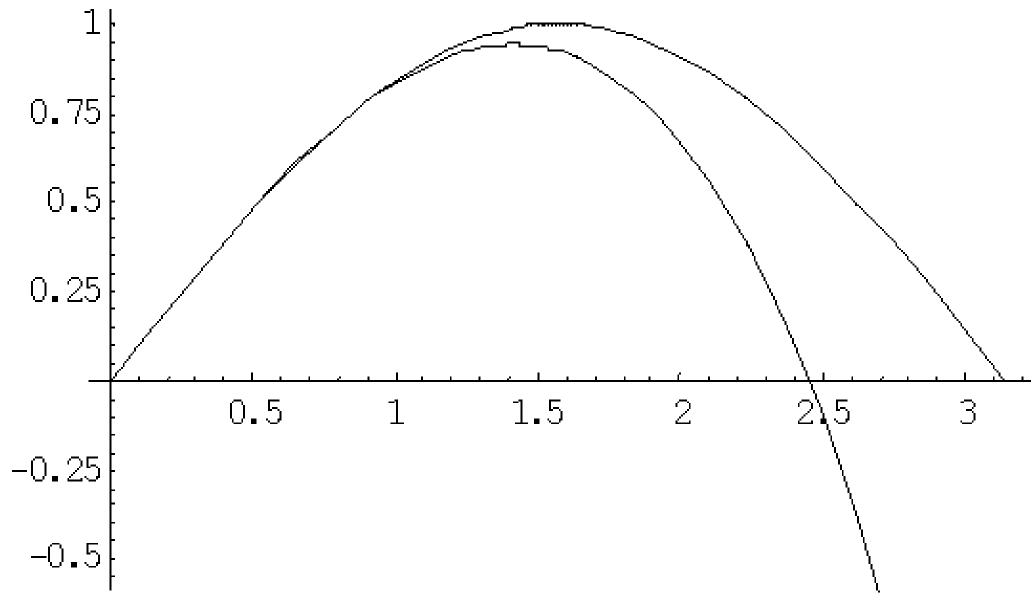
```
In[89]:= Series[Sin[x], {x, 0, 3}]
```

Out[89]= $x - \frac{x^3}{6} + O[x]^4$

```
In[90]:= Normal[%]
```

Out[90]= $x - \frac{x^3}{6}$

```
In[91]:= Plot[{Sin[x], %}, {x, 0, Pi}]
```



Out[91]= - Graphics -

演習問題4

1. cos(x)をx=0の周りで3次まで展開しなさい。
2. 1で求めた多項式とcos(x)を区間0<x<Piで同じグラフに重ね書きしなさい。
3. cos(x)をx=Pi/2の周りで3次まで展開しなさい。
4. 3で求めた多項式とcos(x)を区間0<x<Piで同じグラフに重ね書きしなさい。
5. 2,4のグラフの違いについて述べなさい。

微分方程式の解法（1）

微分方程式f(x,y[x])=0をシンボル的に解く。

DSolve[f(x,y)==0 , y , x]

連立微分方程式をシンボル的に解く。

DSolve[{f1==0, f2==0, …}, {y1,y2,…}, x]

- **リストの部分は、式や変数を{}でくくって記述する。**

微分方程式の解法（2）

- 微分方程式は、必ずシンボル的に解けるとは限らない。
- シンボル的に解けないときは数値的に解く。
- 微分方程式を数値的に解くためには、関数NDSolveを用いる。

練習6

```
In[159]:= DSolve[ y''[x] == 0, y[x], x]

Out[159]= {{y[x] → C[1] + x C[2]}}

In[162]:= DSolve[{y'[x] == 1, y[0] == 5}, y[x], x]

Out[162]= {{y[x] → 5 + x}}
```

条件付き問題は連立方程式！

```
In[201]:= DSolve[ y''[x] == y[x], y[x], x]
```

Out[201]= $\{\{y[x] \to E^{-x} C[1] + E^{x} C[2]\}\}$

演習問題5

1. 次の微分方程式を解きなさい。
   1. y'(x)=x, y(0)=0 をy(x)について解きなさい。
   2. y'(x)=-y(x), y(0)=1 をy(x)について解きなさい。
   3. 運動方程式を解いて、自由落下の解を求めなさい。
   4. 運動方程式を解いて、45度方向への斜方投射の解を求めなさい。