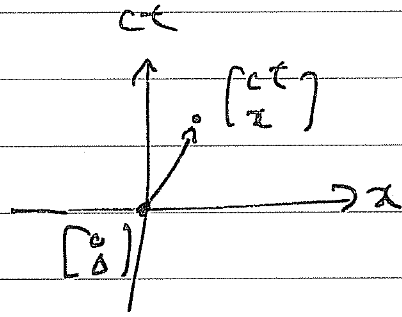
復習.　　10/26　　2006

＊ Lorentz 変換

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$



＊ ベクトル $\begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix}$ の"長さ"にあたるもの

$$s^2 := (ct)^2 - x^2$$

‖ 後

$$s'^2 = (ct')^2 - x'^2$$

☆ 光速度不変の原理

① Lorentz変換の性質

Lorentz変換

(0) $$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

線形変換

(1) $$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix}$$

(2) 世界間隔不変性

$$[ct', x'] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} = [ct, x] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix}$$

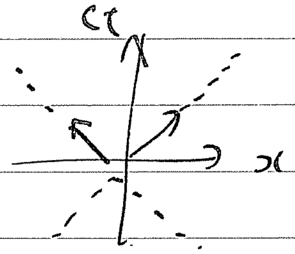
(3) 恒等変換を含む.

$(\beta \to 0)$ ~~b→0~~ で $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

命題 (0) $\Longleftrightarrow$ (1) (2) (3)

証明 あとで

② 光速度不変の原理



・光の軌跡 $\Longleftrightarrow$ (傾き) = 1 の直線.

・光の軌跡に沿ったベクトル $\begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix}$ は

$$S^2 = (ct)^2 - x^2 = 0$$ を満たし.

$\downarrow$ Lorentz変換にても s は不変なので. 傾きは 1 のままで.

$$s'^2 = (ct')^2 - (x')^2 = 0$$

命題　(2) $\Longleftarrow$ (1) (2') (2'') (2''') (3)

(2') 光速不変

$$S^2 = 0 \Longrightarrow (s')^2 = 0$$

(2'') 空間の等方性 (特別な方向はない / 右も左も同等)

$x \longmapsto -x$ としても Lorentz変換は ~~変わらない~~ 不変

(2''') 運動の相対性 (逆変換は $\beta \leftrightarrow -\beta$)

K'系では K は $-\beta$ で(等速直線)運動

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix}$$

注 $\begin{cases} x \longmapsto \bar{x} = -x \\ x' \longmapsto \bar{x}' = -x' \\ \beta \longmapsto \bar{\beta} = -\beta \end{cases}$ とすると Lorentz変換は

$$\begin{bmatrix} ct' \\ -\bar{x}' \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 & \bar{\beta} \\ \bar{\beta} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ -\bar{x} \end{bmatrix}$$

つまり

$$\begin{bmatrix} ct' \\ \bar{x}' \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 & -\bar{\beta} \\ -\bar{\beta} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ \bar{x} \end{bmatrix}$$

$\bar{x}, \bar{x}', \bar{\beta}$ に対しても 同じ Lorentz変換.

命題 (1)(2') $\Longrightarrow$ $s'^2 = (a^2-c^2)s^2$

$\because$ $s' = [ct', x'] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix}$

$= [ct, x] \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix}$

$= [ct, x] \begin{bmatrix} a^2-c^2 & ab-cd \\ ab-cd & b^2-d^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix}$

$= (ct)^2(a^2-c^2) + x^2(b^2-d^2) + 2xct(ab-cd)$ ⊛

ここで

$s^2 = (ct)^2 - x^2$

$= 0$ ならば $ct = \pm x$ なので

$s'^2 = x^2\{\underbrace{(a^2-c^2)+(b^2-d^2)}_{=0}\} \pm 2x^2\underbrace{(ab-cd)}_{=0}$

$= 0$ となると

つまり

$\left(s^2 = 0 \text{ ならば } s'^2 = 0 \right)$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} (a^2-c^2)+(b^2-d^2) = 0 \\ ab-cd = 0 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow s'^2 = (a^2-c^2)s^2$ $\because$ ⊛より

(3) 等方性

$\boxed{\underline{命題} \begin{pmatrix} (1)\ (2')\ \&\ (3)\ \& \\ (2'')\ (2''') \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad a^2 - c^2 = 1}$

$\because$ (1)より $\begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{(v)} \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix}$

<u>前命題より</u>

$s'^2 = g(v) s^2$ (A)

$g(v) = a^2 - c^2$

$(2''')$より 逆変換は $v \to -v$ となるので

$$\begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{(-v)} \begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix}$$

$(2'')$より $\begin{cases} x \longmapsto -x \\ x' \longmapsto -x' \\ v \longmapsto -v \end{cases}$ とすると

$$\begin{bmatrix} ct \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{(v)} \begin{bmatrix} ct' \\ -x' \end{bmatrix}$$

$s^2 = g(v) s'^2$ (B)

(A) & (B) ~~(※) & (※※)~~ より

$$s'^2 = g(v) s^2$$
$$= g^2(v) s'^2$$

$$\therefore \quad g^2(v) = 1$$

$$g(v) = \pm 1$$

(3)より $g(0) = 1$ なので

$$g(v) = 1 \quad //$$

④ Lorentz変換の導出.

$\boxed{(1)(2)(3) \Longrightarrow (0)}$ を示す.

(1) (2) ならば ④ より

$$\boxed{\begin{cases} a^2 - c^2 = d^2 - b^2 = 1 & ① \\ ab = cd & ② \end{cases}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ a^2 = d^2 \\ c^2 = b^2 \\ ab = cd \end{cases}}$$

∵ ($\Uparrow$) ok

($\Downarrow$) ① より $a^2 = 1 + c^2 \geq 1$

$\therefore a \neq 0$

② より $b = cd/a$

① より $a^2(1 - c^2/a^2) = d^2\underbrace{(1 - c^2/a^2)}_{\neq 0} = 1$

$\therefore a^2 = d^2 = \dfrac{1}{1 - c^2/a^2}$

① より $c^2 = b^2$ //

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} d = \pm a \\ c = \pm b \end{cases} \text{(複号同順)} \quad a^2 = \frac{1}{1 - b^2/a^2}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & b/a \\ \underbrace{\pm b/a \quad \pm 1} \end{bmatrix}, \quad a^2 = \frac{1}{1 - b^2/a^2}}$$

2種類の符号 ±, は4種類の Lorentz変換

(3) より

$a = \dfrac{+1}{\sqrt{1 - b^2/a^2}}$ $(+b/a, +1)$, 符号が1つに選ばれる //

ここで $a = \gamma$, $b/a = -\beta$ とすると Lorentz 変換 (0).

☆ 光速度不変の原理.

[1] 計量行列

$\begin{pmatrix} A, B, D \in \mathbb{R} \\ a, b, c, d \\ x, y \end{pmatrix}$

対称行列 $G = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}$, $\det G \neq 0$

及び $L = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ に対し

次の問に答えよ.

(1) 任意のベクトル $x \in \mathbb{R}^2$ に対し

$${}^t x\, {}^t L G L x = {}^t x G x \qquad \left(\begin{array}{l} {}^t x = [x, y] \\ {}^t L = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \end{array} \right)$$

ならば

$${}^t L G L = G \quad (*)$$

となる事を示せ.

(2) $(*)$ の時 $\det L = \pm 1$ を示せ.

[2] Lorentz群

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "v"] \arrow[rr, bend right, "u"'] & K' \arrow[r, "w"] & K'' \end{tikzcd}$$

① K'系はKのx方向に速度 v で等速直線運動し
② K''系はK'の 〃 w 〃
③ K''系はKの 〃 u 〃 しているとする。

上の①,②に対応するLorentz変換を合成して③に対応するLorentz変換をつくり
uをvとwであらわせ。
(まず①の変換をし、次に②の変換をすると③の変換が得られる)