

Oct 12 2006

Joseph Larmor 1900

Lorentz 1904

Poincaré

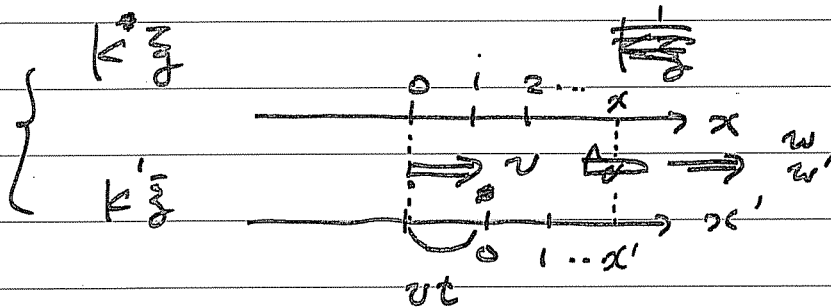
△ 証明. 証明. $\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は 光の速度 (※)

2つの慣性系

≡ 証明 (Einstein = 等速度運動する慣性系)

の間の関係は 次の Lorentz 変換で与えられる.

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta = v/c \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{array} \right.$$



≡ 証明 $\beta \ll 1 \Rightarrow$ ガリレイ変換

≡ 証明 条件 (※) に対して Lorentz Poincaré 変換

≡ 証明 3次元の場合. 垂直方向は変換なし $\begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$

速度合成則

$$w' = \frac{w-v}{1-wv/c^2}$$

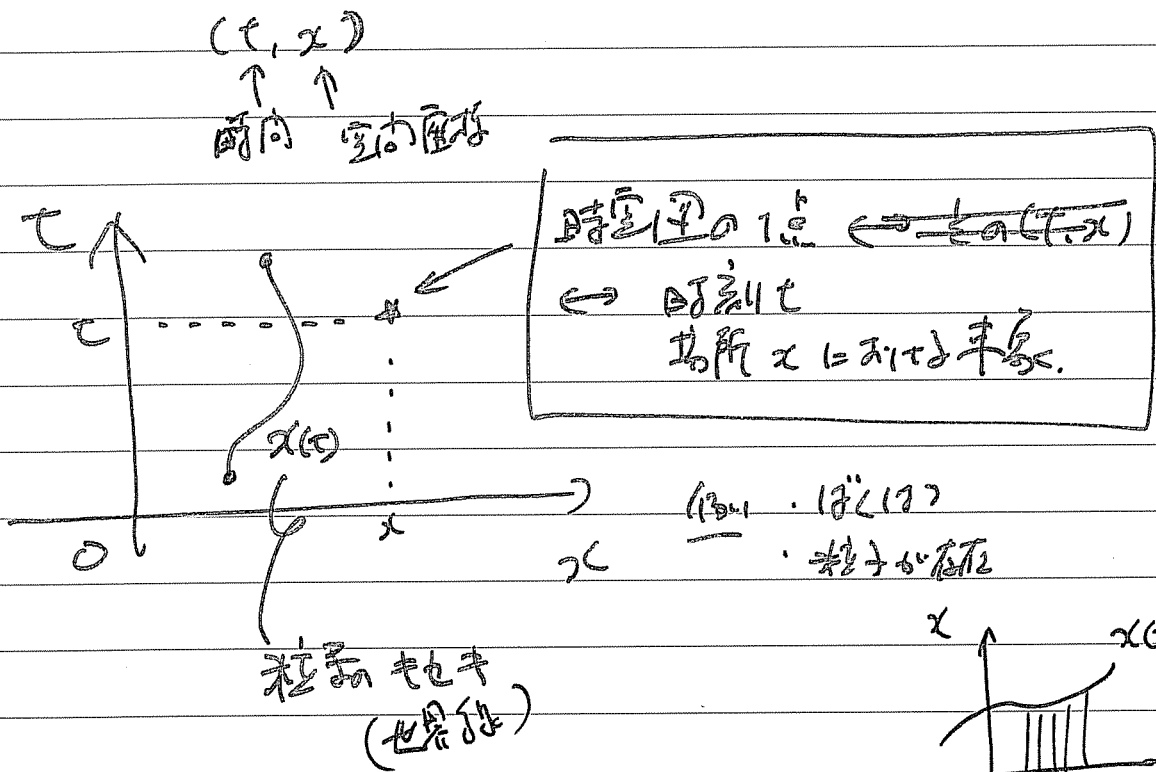
$$\left\{ \begin{array}{l} w \equiv \frac{dx}{dt} \text{ (K系での物体の速度)} \\ w' \equiv \frac{dx'}{dt'} \text{ (K'系での物体の速度)} \end{array} \right. = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt'}$$

光の速度?

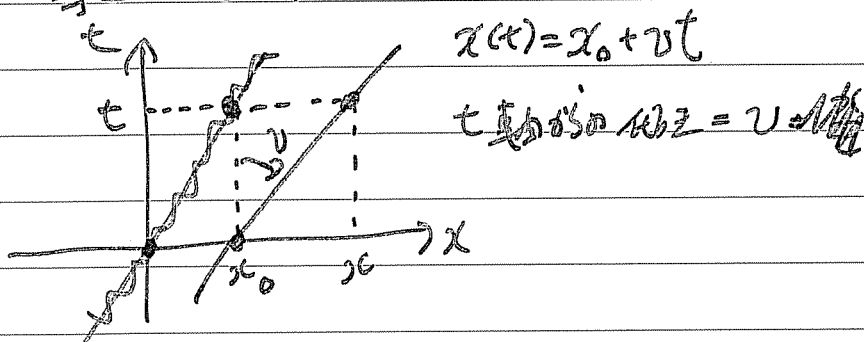
≡ 証明 $w=c \Rightarrow w'=c$ 光の速度は不変.

★時空図

① 時空図

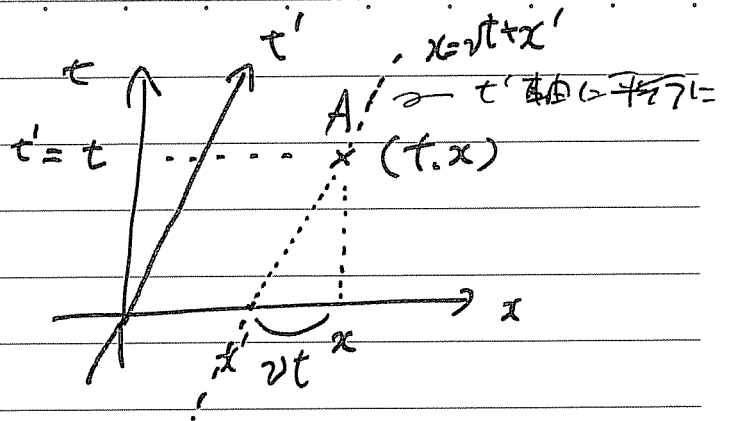


例 等速直線運動



(2) ガリレイ変換

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - vt \end{cases}$$



• $A: (t, x)$ は ~~静止~~
状態

• K' の座標軸

$$\begin{cases} t \text{ 軸} \Leftrightarrow x=0 \\ x \text{ 軸} \Leftrightarrow t=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t' \text{ 軸} \Leftrightarrow x'=0 \\ \Leftrightarrow x=vt \\ x' \text{ 軸} \Leftrightarrow t'=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t=0 \quad x \text{ 軸に} \Leftrightarrow$$

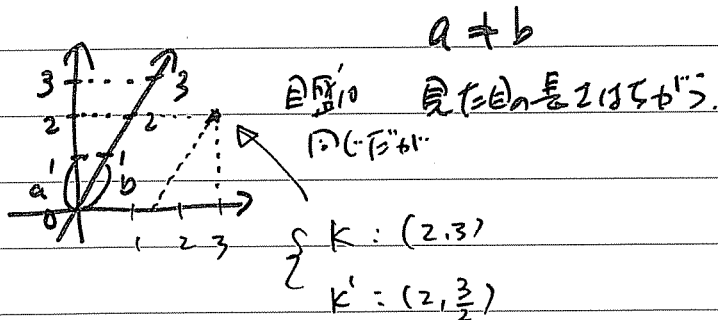
• 一般に

$$x' = \text{const} \Leftrightarrow x = vt + x'$$

• 座標の読み方: 軸に平行な直線との交点を読む ($y = ax + b$)

注

• 目盛の幅



③ D-リッツ変換

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \beta = v/c \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

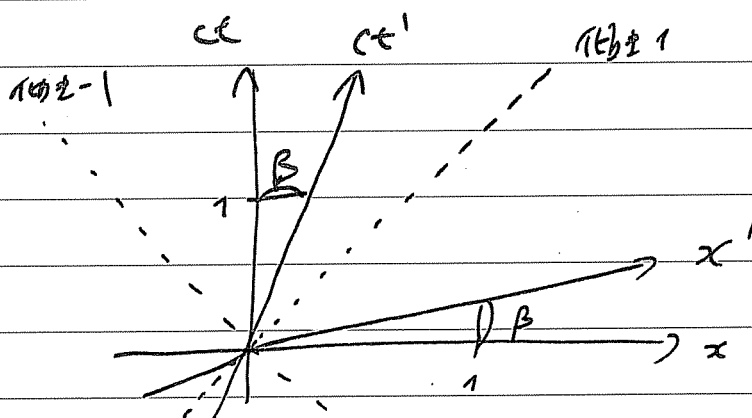
$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \end{cases}$$

• ct' 軸 $\Leftrightarrow x' = 0$

$\Leftrightarrow x = \beta ct$

• x' 軸 $\Leftrightarrow t' = 0$

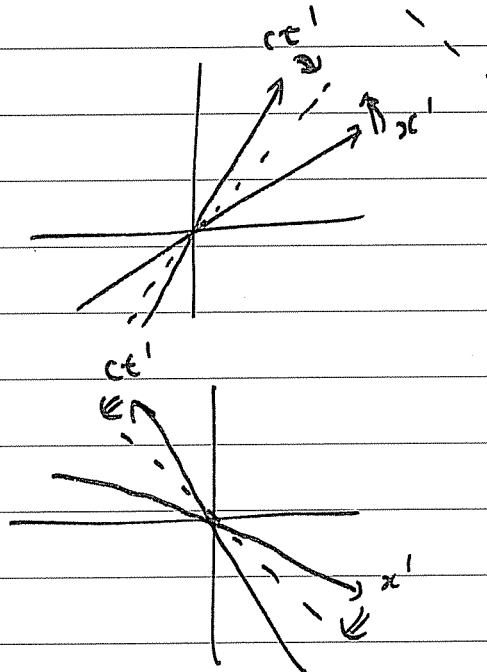
$\Leftrightarrow ct = \beta x$



$\Rightarrow |\beta| = |v/c| < 1$

$-1 < \beta < 1$

$\beta \rightarrow 1$
 $\beta \rightarrow -1$



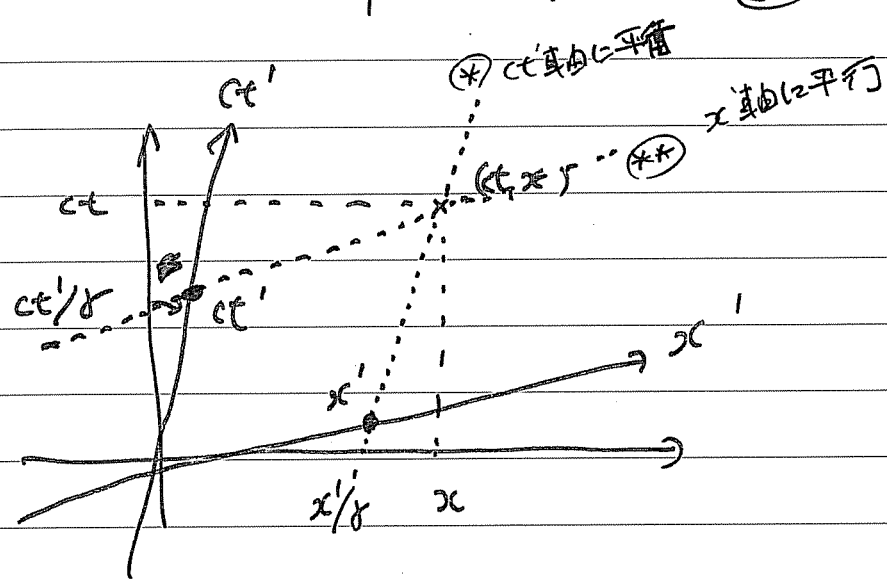
• ~~$\beta = 1$~~

~~$$\begin{cases} x' = \text{const} \Leftrightarrow x = \beta ct + x'/\gamma \\ ct' = \text{const} \Leftrightarrow ct = \beta x + ct'/\gamma \end{cases}$$~~

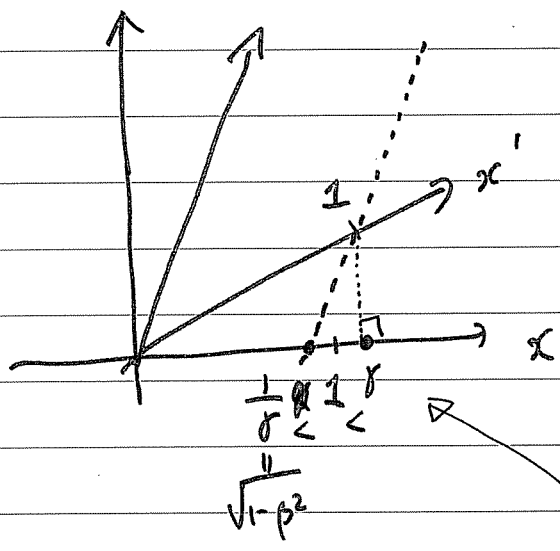
- 変換

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \text{const} \Leftrightarrow x = \beta ct + x'/\gamma \quad (*) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ct' = \text{const} \Leftrightarrow ct = \beta x + ct'/\gamma \quad (**)$$



注目点



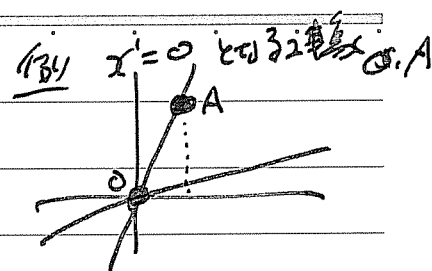
(b)

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} ct &= \beta x \\ \frac{1}{\gamma} &= x - \beta ct = (1 - \beta^2)x \\ &= \frac{x}{\gamma} \end{aligned}$$

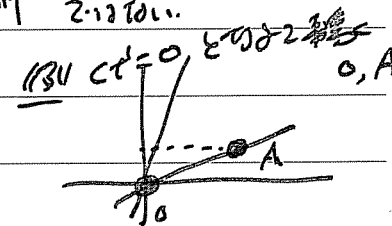
$$x = \frac{x}{\gamma}$$

④ ① 同時性のずれ



(*) $x' = \text{const}$ $\Leftrightarrow x = \beta ct + x'/\gamma$

↑ $x' = 0$ 静止 $(x = 0)$ から $x = \beta ct$ まで x' の変位 x'/γ だけずれる。
 ① $x = 0$ の x' 座標

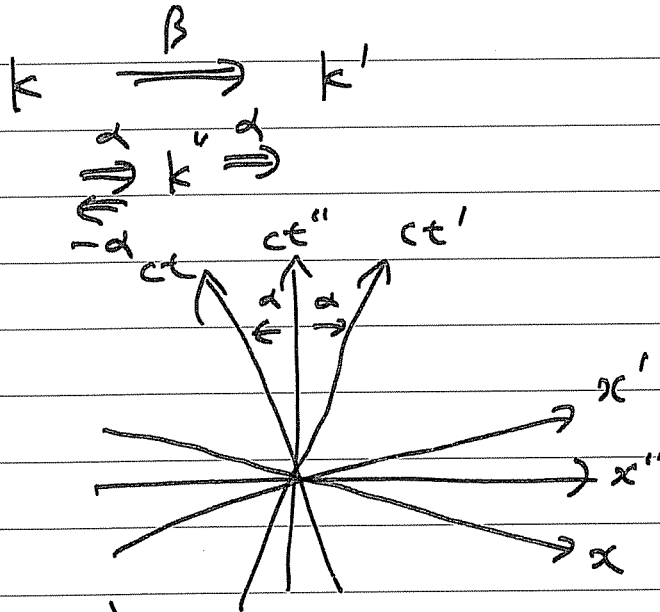


(*) $ct' = \text{const}$ $\Leftrightarrow ct = \beta x + ct'/\gamma$

↑ $ct' = 0$ 静止 $(ct = 0)$ から $ct = \beta x$ まで ct' の変位 ct'/γ だけずれる。
 ① $ct = 0$ の ct' 座標

(5) K と K' と K'' に対し. に 画く

$$\begin{cases} K' : K \text{ に対し } \beta \\ K'' : K \text{ に対し } \alpha \\ K' : K'' \text{ に対し } \alpha \end{cases}$$



K と K' の

注意 全順序の成立は保証されない

(6) α と β 2. 素数. $(\alpha + \frac{\beta}{2})$

例 4 $\frac{w'}{c} = \frac{w/c - v/c}{1 - wv/c^2}$

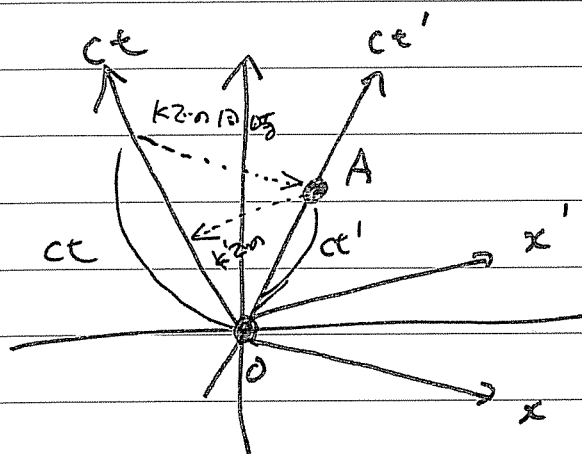
$$\alpha = \frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha\beta} \iff (\alpha\beta)^2 - 2(\alpha\beta) + \beta^2 = 0$$

$$\iff \alpha\beta = 1 \pm \sqrt{1 - \beta^2}$$

① 時刻のズレ

※ K の γ の γ だけズレ

$$A: \begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ct \\ 0 \end{bmatrix}$$



※ K では

$$ct > ct'$$

ct' : 0 から A までの距離の感 (時刻)
(固有時間)

運動する時計の内部から見たら

時計の進みが遅く見える

例 π^+ 粒子の寿命

$\mu^+ \approx 1/\mu$

π^+

$$\begin{cases} t' = 2.6 \times 10^{-8} \text{ sec} \\ t = \frac{t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

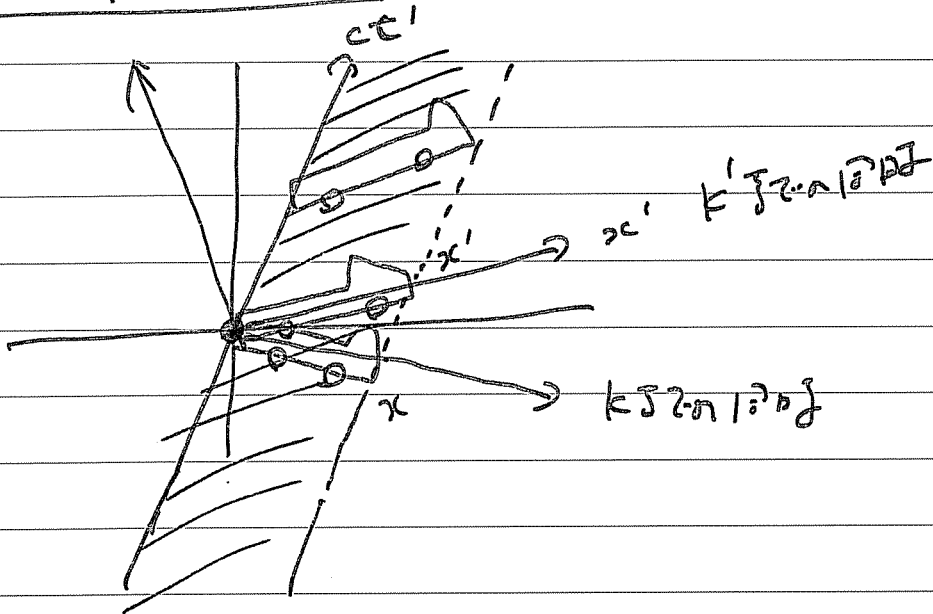
遅く見える

地表

(2) 特殊相対性

{ Fitz Gerald 1889
 Lorentz 1895

* 静止系に於ける



• $x < x'$

運動する物体は短く

☆ 時空図

① ママのパラドクス

ママの太郎の世界線を $\vec{OA}$, $\vec{AB}$,

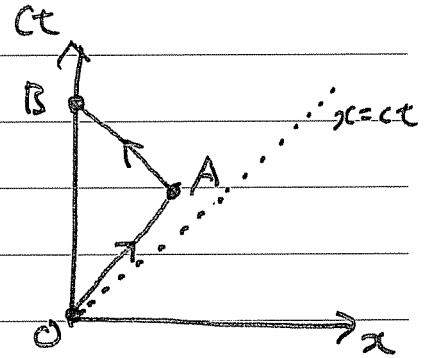
次郎の $\vec{OB}$ とする。

次郎が静止している系では太郎は運動している。

時間の流れに比べ、Bで再び同じ時刻には太郎の足が若いはず。

逆に太郎の系では次郎が運動しており、次郎の足が若いはず。

どちらが正しいか?



② トランクのパラドクス

倉と車の 穴とトラックを考慮。

トラックを x 方向へ走らせる。

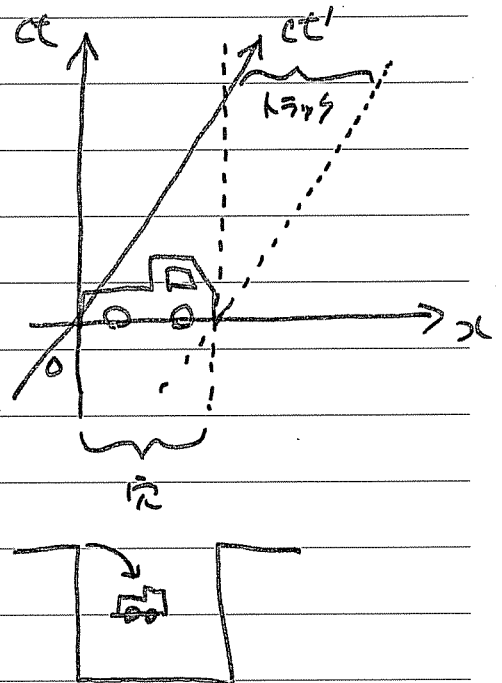
穴の系では トラックは運動しているため、穴は落ちるはず。

トラックの系では 穴は運動しているため、穴は落ちないはず。

どちらが正しいか?

ただし穴の系では、トラックが落ちる場合は 衝撃のため

トラックは曲がる。 水平のまま落ちると仮定する。



③ (t, x, y) 時空 (2+1次元) において

x 方向, y 方向の長さが共に 1 の正方形 ABCD を

x 方向に 等速直線運動させる。

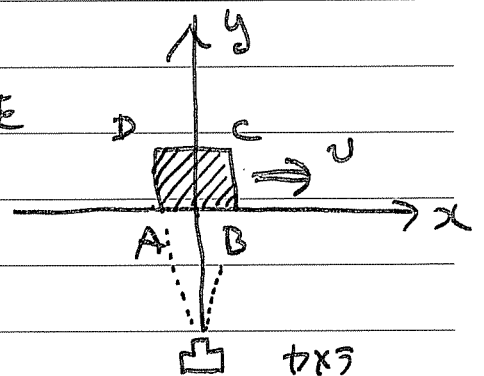
とき $(x, y) = (0, -1)$ で y 方向を向いている

カメラで 写真を撮ると、どのような写真になるか?

→ カメラは 同時に届いた光 の像をキョクする。

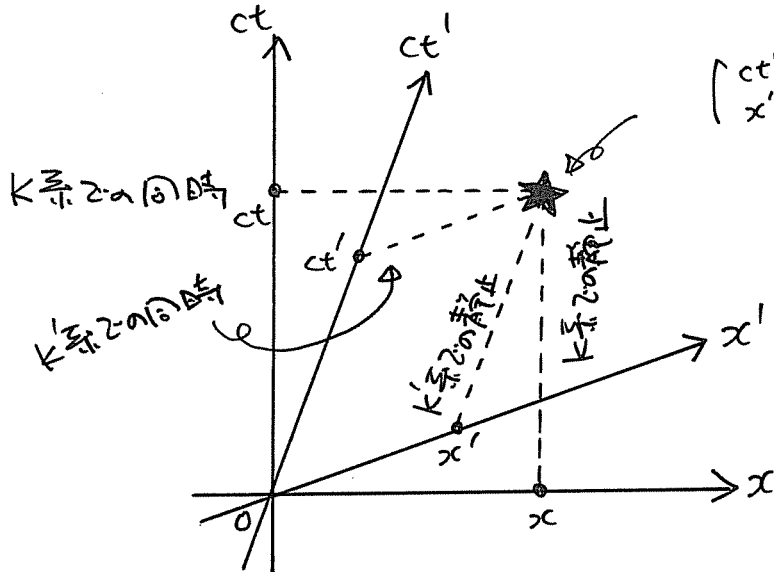
→ x 方向の長さが 0 の場合、つまり AD が

どのように "見えるか" を考えてみる。



☆ 時空図...

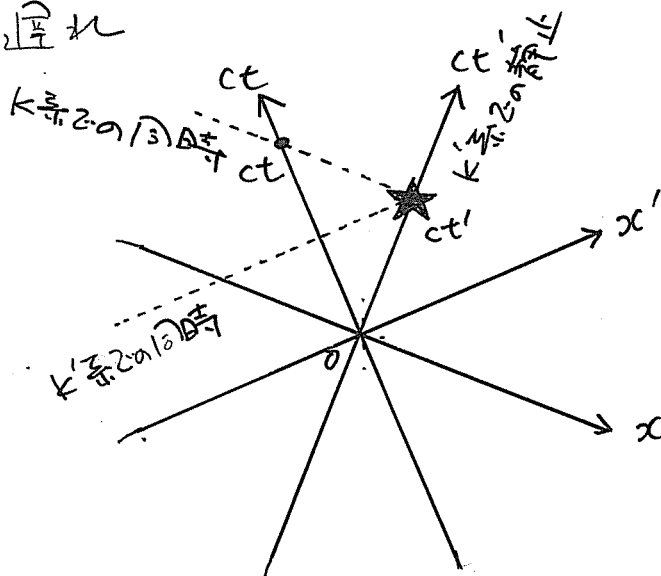
① 同時性の破れ



$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix}$$

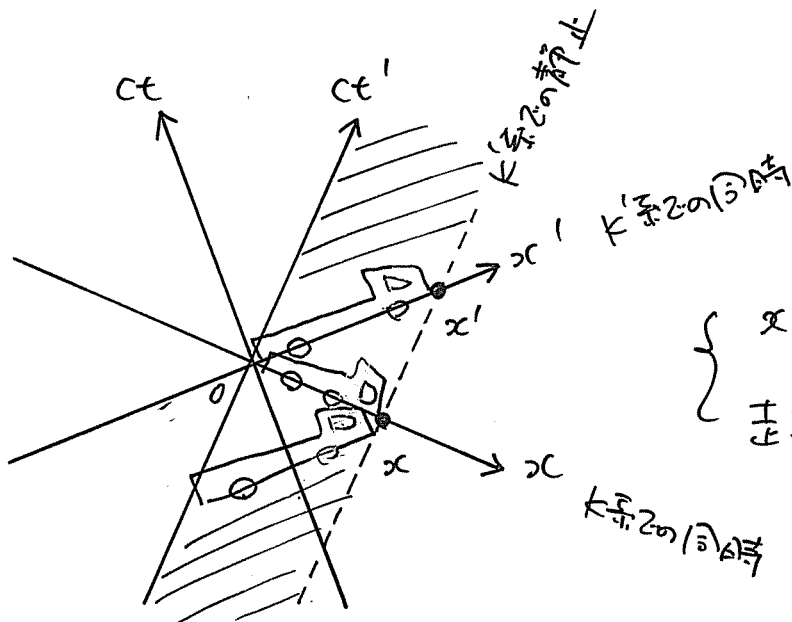
$$\begin{cases} \beta = v/c \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

② 時間の遅れ



$$\begin{cases} ct > ct' \\ \text{静止と寿命がのびる} \end{cases}$$

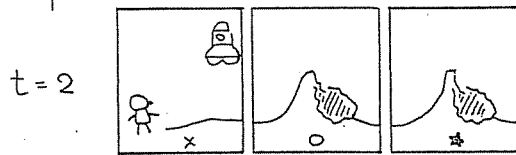
③ 長さの収縮



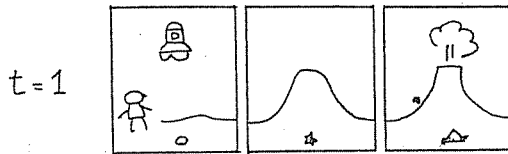
$$\begin{cases} x < x' \\ \text{静止と空間がたぶる} \end{cases}$$

★ 同時性のずれ

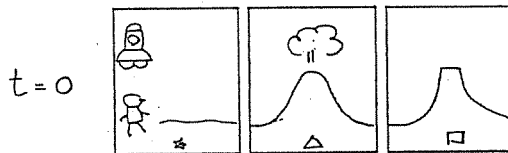
《 原始人世界 》



縦軸は時間軸
横軸は空間軸

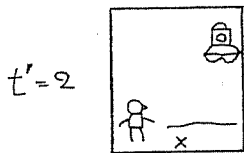


UFO は左から右へ
原始人は同地点

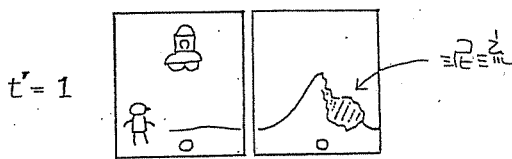


泥流は同時
噴火は左から

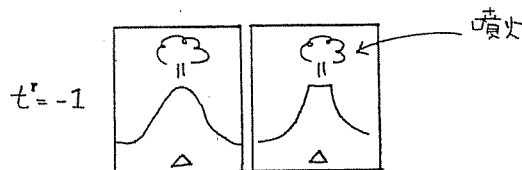
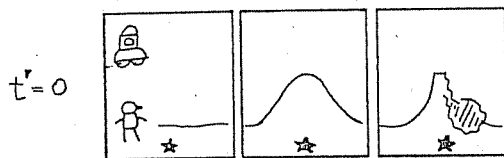
《 UFO世界 》



UFO は同地点
原始人は右から左へ



泥流は右から
噴火は同時



(図 1)
時空パズルのズレ

