が

$$\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{x} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ -1 \end{pmatrix}$$

という形の解をもつかどうか調べる。

- 行列 B の階段形で、最下段の角が $n+1$ 列に現れた場合には、このような解は存在しない（$y_{n+1} = 0$ となってしまうので)。
- それ以外の場合には、y_{n+1} の値を自由に選べるので、$y_{n+1} = -1$ である解が存在する。さらに、そのように選んでもなお $n - \mathrm{rank}(B) = n - \mathrm{rank}(A)$ だけの個数の自由に選べるパラメータが残る。

問 7.6. ($\sharp$) 具体例で上の方法を確認せよ。

問 7.7. $\mathrm{rank}(B) - \mathrm{rank}(A)$ は 0 または 1 であり、方程式 $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ に解が存在するための必要十分条件は、$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$ となることである。

とくに、未知数の数と方程式の数が一致する $m = n$ の場合で、A の階数が n であるとき（最も普通の場合）には、B の簡約階段行列が

$$C = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & c_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & c_n \end{pmatrix}$$

の形になるので、

$$C \begin{pmatrix} \overrightarrow{x} \\ -1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

が求める解である。すなわち、解はちょうど一つ存在し、それが C の右端に現れる。

問 7.8. (*) 与えられた $m \times n$ 行列 A の簡約階段行列は一つしかないことを n についての帰納法で示せ。とくに、階段の段差を生じる列の場所 $(j_1, j_2, \cdots, j_r)$ は、階段行列のとり方によらず A だけで決まる。

8 逆行列と基底

$n \times n$ 行列 A に対して

$$AB = BA = I_n$$

となる $n \times n$ 行列 B を A の**逆行列** (inverse matrix) という。A の逆行列は、あっても一つしかない。実際、C も A の逆行列であったとすると、$I = AC$ に左から B をかけて、$B = BAC = IC = C$ となって一致する。A だけで決まるので A^{-1} と書く。逆行列が存在する行列のことを可逆 (invertible) とか正則 (non-singular) と称するのだが、以下では「逆 (行列) をもつ」ということにする。

例 8.1. 連立一次方程式 $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ の係数行列 A が逆をもてば、連立一次方程式はちょうど一つ解をもち、解は $\overrightarrow{x} = A^{-1}\overrightarrow{b}$ で与えられる。

命題 8.2. 逆行列について、以下が成り立つ。

(i) 逆行列の逆行列：$(A^{-1})^{-1} = A$.
(ii) 積の逆行列：$(A_1A_2\cdots A_r)^{-1} = A_r^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$.
(iii) 転置と逆行列：${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.

逆をもつ行列に対しては、その負冪を $A^{-n} = (A^{-1})^n$ で定め、$A^0 = I$ とおくことで、指数法則が整数指数についても成り立つ。すなわち、整数 k, l に対して、$A^kA^l = A^{k+l}$, $(A^k)^l = A^{kl}$ である。

問 8.1. 以上を確かめよ。

問 8.2. n 次正方行列 A, B が $AB = BA$ を満たし、A が逆をもてば、$A^kB = BA^k$ (k は整数) である。

定義 8.3. 自然数 $1 \le i, j \le n$ に対して、(i, j) 成分のみが 1 で残りの成分が 0 である正方行列を $E_{i,j}$ と書き、**行列単位**[*46](matrix unit) と呼ぶ。また、$S_{i,j}(s) = I_n + sE_{i,j}$ $(i \ne j)$、$D_i(r) = I_n - E_{i,i} + rE_{i,i}$ $(r \ne 0)$ および $T_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$ の形の行列を**基本行列** (elementary matrix) とよぶ。

$$S_{i,j}(s) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \dots & s & \\ & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad T_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & \dots & 1 & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & 1 & \dots & 0 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

例 8.4. 基本行列は逆をもち、その逆行列も基本行列である。

$$S_{i,j}(s)^{-1} = S_{i,j}(-s), \quad D_i(r)^{-1} = D_i(r^{-1}), \quad T_{i,j}^{-1} = T_{i,j}.$$

また、行列に対する 3 種類の**行基本変形**は、これら基本行列を左から掛けることで実現される。

命題 8.5 (Sylvester)**.** $m \times n$ 行列 A と $n \times m$ 行列 B に対して、$\det(I_m - AB) = \det(I_n - BA)$.

Proof. ブロック行列に掃き出し法を適用すると

$$\begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m - AB & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n - BA \end{pmatrix}$$

のようになるので、分解型行列式 (命題 6.6) を使えば、

$$|I_m - AB| = \begin{vmatrix} I_m - AB & 0 \\ B & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n - BA \end{vmatrix} = |I_n - BA|.$$

□

逆行列と行列式の関係について調べよう。正方行列 A が逆をもてば $|A|\,|A^{-1}| = |AA^{-1}| = |I_n| = 1$ から $|A| \ne 0$ であり、$|A^{-1}| = |A|^{-1}$ がわかる。反対に $|A| \ne 0$ のとき、A は逆行列もつことを示そう。そのために、基本行列の積 B を左から掛けることで A を簡約階段行列 C に変形しておくと、$|C| = |BA| = |B|\,|A| \ne 0$

[*46] 単位行列 (unit matrix) と混同しないように。これを嫌って最近は identity matrix という言い方もする。「まま行列」であるか。

($|B| \neq 0$) である。したがって、階段行列が三角行列になっていることに注意すれば、$\mathrm{rank}(A) = n$ でなければならず、このとき、C は単位行列 I_n に一致するので、B (は基本行列の積として逆行列 B^{-1} をもつ) が $A = B^{-1}C = B^{-1}$ の逆行列である。

問 8.3. i 行 j 列を除いた $n-1$ 次の行列 A_{ij} から n 次の行列 C (adjugate[*47] matrix という) を $C = ((-1)^{i+j}|A_{ji}|)$ で定めるとき、$AC = CA = |A|I_n$ を示せ。とくに $|A| \neq 0$ のとき、$A^{-1} = \frac{1}{|A|}C$ である。

定理 8.6 (行列代数の基本定理)**.** $n \times n$ 行列 A について、次は同値。

(i) A は逆行列をもつ。
(ii) $|A| \neq 0$.
(iii) 行列 A の縦割りを $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ とすると、$\{\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}\}$ は一次独立。
(iv) $\mathrm{rank}(A) = n$.

Proof. (i) $\iff$ (ii) $\iff$ (iv) は上で示した。(iii) $\iff$ $S = \{0\}$ であり、これが (iv) と同値であることは、掃き出し定理のところで見た。 □

系 8.7. n 次正方行列 A が逆行列をもつための条件は、さらに次のように言い換えられる。

(i) 勝手な列ベクトルが、行列 A の列ベクトルを並べたもの $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ の一次結合で書ける。
(ii) $AB = I_n$ となる正方行列 B が存在する。
(iii) $BA = I_n$ となる正方行列 B が存在する。

Proof. 逆行列をもつ A に対しては、$B = A^{-1}$ と取ることで (ii), (iii) が成り立つ。逆に、(ii), (iii) が成り立てば、両辺の行列式を比較することで、$|A| \neq 0$ がわかるので、A は逆行列をもつ。

(ii) $\Longrightarrow$ (i): 勝手な列ベクトル $\overrightarrow{x}$ に対して、$B\overrightarrow{x}$ の成分を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とすれば、

$$\overrightarrow{x} = AB\overrightarrow{x} = A\begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix} = \lambda_1\overrightarrow{a_1} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{a_n}.$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii): 基本ベクトルを $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ の一次結合で表した係数を並べた行列 B を考えると $AB = I_n$。 □

問 8.4. ($\sharp$) 行列

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 \\ t & 1 & 0 \\ 1 & t & 1\end{pmatrix}$$

が逆行列をもたないような t をすべて求めよ。

問 8.5. ($\sharp$) 座標空間において、

$$\begin{pmatrix}x \\ y \\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a \\ b \\ c\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}a' \\ b' \\ c'\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}a'' \\ b'' \\ c''\end{pmatrix}$$

[*47] これは、ラテン語由来の ad と jugate を組み合わせた数学業界の造語らしいが、ラテン語の用法にかなっているのかどうか。

とパラメータ表示される平面の方程式は

$$\begin{vmatrix} x-a & a' & a'' \\ y-b & b' & b'' \\ z-c & c' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

と書けることを論証せよ。

問 8.6. n 次正方行列 A, B が $AB = A + B$ を満たせば、$A - I_n$ は逆をもち $AB = BA$ である。

最後に、掃き出し法による逆行列の計算方法*48について触れておこう。逆行列をもつ行列 A を行基本操作により、階段行列 A' に変形すると、A' は対角成分に 0 でない数が並ぶ三角行列となる。そこで、さらに行基本操作を施して簡約しておくと、A' は単位行列 I_n となる。一方、A' は、左から基本行列を何個か掛けることで実現されるので、$I_n = A' = BA$ の形、ただし B は有限個の基本行列の積、である。これは、$B = A^{-1}$ を意味する。さて、行列 B の具体的な計算方法であるが、ブロック等式 $B(A\ I_n) = (BA\ B) = (I_n\ B)$ に着目し、この左辺が行列 $(A\ I_n)$ に行基本変形を施したものであること、右辺が（簡約）階段行列の形であることに注意すれば、$n \times 2n$ 行列 $(A\ I_n)$ から得られる簡約階段行列の右半分が B すなわち A の逆行列に他ならない。すなわち、$(A\ I_n) \sim (I_n\ A^{-1})$ である。

特殊な形の掃き出し計算ではあるが、説明の途中で出てきた事実の方がより重要なので、抜き出しておくと、

命題 8.8. n 次正方行列 A が逆行列を持てば、それは n 次基本行列を何個か掛けた形で書ける。

9 部分空間の双対性

本来、行列も行列式も、縦横の違いは見かけの形式に過ぎず、本質的ではない。それにも係わらず、掃き出し法とそれに伴う階段行列・階数は行に偏ったものとして導入された。この節で、その歪みを取り除いておくことにする。なお、ここで扱う内容のうち、補題 9.3 と命題 9.5 以外は後の議論に直接の影響を及ぼさないので、省略して次に進むことも可能である。というよりも、飛ばして、後で必要になってから戻ることを勧める。

以下、列ベクトル、行ベクトルの集まりが頻繁にそして対等に登場するので、それらを表す記号をまず導入しておこう。その際、スカラーとして何を考えるかを明示する必要に迫られるので、今まで何となく、数＝実数、のようにしていたものを、次の対角化へ向けた準備も兼ねて、複素数にまで範囲を広げて考えることにする。これまでに学んだ行列計算も連立一次方程式の構造解析も、数の性質のうち使っているのは、加減乗除が可能であることだけであるので、複素数を成分あるいは係数にする場合でも何ら問題なく有効*49であることを強調しておく。

そこで、複素数を成分とする $m \times n$ 行列全体を $M_{m,n}(\mathbb{C})$ という記号であらわし*50、とくに $M_{n,1}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n$, $M_{1,n}(\mathbb{C}) = {}^t\mathbb{C}^n$ とおく。それぞれ、n 次元列ベクトル全体、行ベクトル全体を表す。また、列ベクトルと行ベクトルを矢印の向きで区別する代わりに、今後は列ベクトル $v \in \mathbb{C}^n$ を基本に, 行ベクトルを ${}^tv \in {}^t\mathbb{C}^n$ のようにも書くことにする。

さて、零ベクトルを含む n 次元列ベクトルの集まり $V \subset \mathbb{C}^n$ が $\mathbb{C}^n$ の**部分空間***51 (subspace) であるとは、

*48 掃き出し法で逆行列を計算させることにいかほどの意味ありや、他に経験すべきことを差し置いてまで。

*49 もっと一般のもの、体 (field) とよばれる、であってもよい。逆に、数の範囲を有理数に制限して考えることも可能で、これはこれで意味のあることである。

*50 本当は、$M_{m,n}(\mathbb{C}) = {}^m\mathbb{C}^n$, $M_{n,1}(\mathbb{C}) = {}^n\mathbb{C}$, $M_{1,n}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n$ と書きたかったのだが、散々迷った挙句、断念。

*51 接頭辞 sub に「部分」を訳語として当てるのが慣例であるが、どうだろう。「下部」の方が音も似ていてよいと思うのだが。