

## 7 連立一次方程式

いささか唐突ではあるが鍵言葉の定義を：サイズの等しい有限個の列ベクトル  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_l$  に対して、 $\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_l \vec{x}_l$  ( $\lambda_1, \dots, \lambda_l$  はスカラー) の形のベクトルを  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_l$  の一次結合<sup>\*38</sup> (linear combination) という。この一次結合を許容することが線型性の肝とも言うべきもので、これまでも様々な形で経験したところであるが、これからもくり返し出会うことになる。

さて、 $A$  を  $m \times n$  行列とし、連立一次方程式<sup>\*39</sup> (a system of linear equations)

$$A\vec{x} = \vec{0}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

を考える。このように定数項が零である方程式を斉次型 (homogeneous) といい、列ベクトルの集合

$$S = \{\vec{x}; A\vec{x} = \vec{0}\}$$

をその解空間 (the space of solutions) とよぶ。解空間の基本的な性質として、解空間に属するベクトル  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_l$  の一次結合は再び解空間に属すること、を注意しておく。実際、 $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_l \in S$  であれば、行列の積についての分配法則を使って、

$$A(\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_l \vec{x}_l) = \lambda_1 A\vec{x}_1 + \dots + \lambda_l A\vec{x}_l = \vec{0}$$

より、 $\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_l \vec{x}_l \in S$  がわかる。

連立一次方程式の意味から、ベクトル  $\vec{x}$  に対して、

$$A\vec{x} = \vec{0} \iff B\vec{x} = \vec{0} \iff C\vec{x} = \vec{0} \iff D\vec{x} = \vec{0}.$$

ここで、 $B$  は  $A$  の 2 つの行を入れ替えた行列。 $C$  は  $A$  のどこかの行に別の行の定数倍を加えたもの。 $D$  は  $A$  のどれかの行に 0 でない数を掛けたものを表す。言い換えると、連立 1 次方程式  $A\vec{x} = 0$  の解空間は、行列  $A$  に次の 3 種類の操作を施して行列の形を変えていっても変化しない。

- (i)  $A$  の行を入れかえる。
- (ii)  $A$  のいずれかの行の定数倍を別の行に加える。
- (iii)  $A$  の何れかの行に 0 でない数を掛ける。

連立 1 次方程式の解法の基本は、この 3 種類の操作 = 行基本変形 (elementary row operation) を繰り返すことにより、与えられた行列を階段行列<sup>\*40</sup> (matrix of echelon form) に書き改める (掃き出し法<sup>\*41</sup>) というものである。ここで、階段行列とは、左下に 0 が並び、上から一段ずつ行成分が減っていく形のものをいう。階段の角が現れる列を小さい順に  $j_1, j_2, \dots, j_r$  とすると、0 でない行が  $r$  行続く階段行列ということになる。

<sup>\*38</sup> 線型結合ともいう。linear に対する日本語訳として、「一次」と「線型」が同程度に、しかも混在した形で使われる。「一次」の方は純一次式を意味する代数的形式を、「線型」の方は純一次式が示す性質を抽象化したものを、と言った感覚的な違いがあるか。

<sup>\*39</sup> 線型方程式系という言い方をする人もいるが、その翻訳調が何とも。

<sup>\*40</sup> 階段というよりは段々畑のイメージで段々行列と呼びたいところであるが、大勢にしたがって置く。ちなみに、英語の echelon は、フランス語の échelle (はしご) に由来する軍隊用語で、段々状の陣形を意味する。

<sup>\*41</sup> 欧米では、C. F. Gauss (1777–1855) にちなんで Gaussian elimination (ガウス消去法) などと称されるが、方法そのものは、紀元前 1 世紀ごろの中国で編纂された数学書「九章算術」に見られるという。掃き出しとは、めずらしくも粋な言い方。

$$\begin{pmatrix} & j_1 & & j_2 & & \dots & & j_r & \\ c_1 & \dots & & \vdots & & & & \vdots & \\ & & & c_2 & \dots & & & \vdots & \\ & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & & \vdots & \\ 0 & & & & & & & c_r & \dots \end{pmatrix}$$

定理 7.1. 最初の二種類の操作をくり返すことで、全ての行列は階段行列に変形できる。さらに最後の操作も許すことで、階段の各コーナーの成分が 1 でコーナーを含む列の他の成分はすべて 0 であるような階段行列に変形することができる。このような階段行列を簡約された<sup>\*42</sup>(reduced) と呼ぶ。

*Proof.* 行列を階段化するとき、必要に応じて行の交換を適宜行い、左列から右列へと掃き出しを行う。階段行列を簡約する際は、右下の段列から左列へと掃き出す。□

例 7.2. 具体的な行列を上二種類の操作で階段化する。行列の掃き出し計算は場所をとるので、適宜まとめて計算する。ただし、やみくもに行くと堂々巡りに陥る。確実に進めるには、掃き出す軸足 (pivot という) を決めて、掃き切るようにする。

問 7.1. (#) 3 次正方行列の階段化として可能な形をすべて列挙せよ。

定義 7.3.  $m \times n$  行列  $A$  を階段行列に変形したときの 0 でない行の数を行列  $A$  の階数<sup>\*43</sup>(rank) と呼び rank( $A$ ) と書く。定義から、 $\text{rank}(A) \leq m$  かつ  $\text{rank}(A) \leq n$  である。階数が階段行列の作り方によらないことは、少し後で示す。

#### 連立一次方程式 (斉次型) の解法

階段行列に対しては、下の行から連立 1 次方程式を解いていく。まず  $r$  行の式から、 $x_{j_r}$  を変数  $x_{j_{r+1}}, \dots, x_n$  の 1 次式で表すことができる。次に、 $r - 1$  行の式から、 $x_{j_{r-1}}$  を  $x_{j_{r-1}+1}, \dots, x_n$  で表すことができるが、このうち  $x_{j_r}$  は、 $x_{j_{r+1}}, \dots, x_n$  で表されるので、この段階で自由に変える変数は、 $x_{j_{r-1}+1}, \dots, x_{j_r-1}$  の  $j_r - j_{r-1} - 1$  個。以下、これを繰り返すことで、 $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$  をそれ以外の変数について解ききった式が得られる。

階段行列が簡約された形的时候には、この議論は次のように簡単になる：ベクトル  $\vec{x}$  の成分を階段のコーナーとして現れる列成分  $x'$  とそれ以外の成分  $x''$  に分ければ、考えている連立一次方程式は、 $x'$  が  $x''$  の 1 次式で表される、という形になるので、 $x''$  を任意定数 (パラメータ) として即座に解くことができる。

例 7.4. 階段行列に対する連立一次方程式の解き方と解の一次結合による表示のさせ方を具体例で検証する。

問 7.2. (#) 各自、4 行 2 列の問題を作り計算練習を行う。また、求めた解空間の表示が正しいかどうかの検算方法についても確かめてみる。

問 7.3.  $m$  次の列ベクトル  $\vec{u} \neq 0$  と  $n$  次の行ベクトル  $\vec{v} \neq 0$  を使って  $\vec{u}\vec{v}$  と表される  $m \times n$  行列の階

<sup>\*42</sup> 学術用語としては、還元の訳語をあてることが多いのであるが、いずれも硬すぎる。「戻し」で済んだものを。

<sup>\*43</sup> 階数だと回数と区別がつかないこともあり、話す際は、外来語そのままにランクということが多い。行列の「位」で済んだものを。

数は 1 である。逆に、階数が 1 の  $m \times n$  行列は、この形である。

サイズの等しい列ベクトルの集まり  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d$  が、その中のどのベクトルも残りのベクトルの一次結合でかけないとき、言い換えると、

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}$$

をみたすような数  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$  が自明なもの ( $\lambda_1 = \dots = \lambda_d = 0$  の場合) に限るとき、ベクトルの集団  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d$  は 1 次独立 (linearly independent) であると言う。

問 7.4. 上の言い換えを確かめよ。

いま、行列  $A$  の階段行列への変形  $A'$  が一つ得られたとすると、解空間  $S$  に属するベクトルの一般形は、 $(t_1, \dots, t_d) = (x_1, \dots, x_n) \setminus \{x_{j_1}, \dots, x_{j_r}\}$  ( $d = n - \text{rank}(A)$ ) をパラメータとして、 $t_1 \vec{v}_1 + \dots + t_d \vec{v}_d$  の形である。このとき、 $S$  に属するベクトルの集まり  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d$  は一次独立で、 $S$  の勝手なベクトルは  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d$  の一次結合として表わされる。

例 7.5. ベクトル  $\vec{v}_i$  がパラメータ  $x_k$  に対応するとき、 $\vec{v}_i - \vec{e}_k$  が、 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{k-1}$  の一次結合であることを確かめ、 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d$  が一次独立であることを実例で検証する。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ * \\ * \\ * \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ * \\ * \\ * \\ 0 \\ * \\ 1 \end{pmatrix}.$$

一般に、解空間  $S$  の中から選んだベクトルの集まり  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d$  が

- (i) 一次独立である、
- (ii)  $S$  の勝手なベクトル  $\vec{v}$  が  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d$  の一次結合として書ける、

なる 2 条件を満たすとき、その集団を解空間  $S$  の基底 (basis<sup>\*44</sup>) とよぶ。連立一次方程式が自明であるとき、すなわち  $A = 0$  で解空間  $S$  がすべての列ベクトルから成るときは、 $S$  を省略して単に基底という言い方をする。基底の選び方には任意性が伴うことに注意する。

Remark 1. 基底といった場合には、配列の順番をも問題にするのが通例である。従って、 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_d$  と  $\vec{v}_2, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d$  とは別の基底であるを考える。このことを強調して、順序基底 (ordered basis) とか枠 (frame) と呼ぶこともあるが、正確には、順序というよりも基底を構成する個々のベクトルに識別するためのラベル (添字) を張りつけるという意味のものである。

例 7.6. 基本ベクトルを並べたもの  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  は基底である。これを標準基底 (standard basis) と呼ぶ。

問 7.5. (♯) 階段行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

\*44 意味は土台。というか、土台と呼んで不都合があるのか。規定やら規程やら既定やらと区別するためにも土台と呼んであげたい。

に行の操作を施して、すべての成分が零とならない行列  $A$  を一つ作れ。その作った行列に再度行の操作を施して、階段行列に変形し、斉次型連立一次方程式  $A\vec{x} = \vec{0}$  の解空間の基底を一組求めよ。

補題 7.7.  $A$  を  $m \times n$  行列、 $B$  を  $n \times m$  行列とし、 $AB = I_m$  とすると、 $m \leq n$  である。

*Proof.* 仮に、 $m > n$  としよう。 $B$  の階段行列への変形を考えれば、 $B\vec{x} = \vec{0}$  となる  $m$  次の列ベクトル  $\vec{x} \neq \vec{0}$  が存在する。ところが、 $AB\vec{x} = I_m\vec{x} = \vec{x}$  だから矛盾。

[別解]  $m > n$  と仮定する。行列  $A$  にサイズ  $m$  の零列ベクトルを  $m - n$  個付け加えた  $m \times m$  行列を  $A'$  とし、行列  $B$  にサイズ  $m$  の零行ベクトルを  $m - n$  個付け加えた  $m \times m$  行列を  $B'$  で表せば、簡単な計算で  $AB = A'B'$  であることがわかるので、

$$1 = |I_m| = |A'B'| = |A'| |B'| = 0$$

となって矛盾である。 □

定理 7.8 (掃き出し定理).

- (i) 連立一次方程式  $A\vec{x} = \vec{0}$  の解空間には基底がかならず存在する<sup>\*45</sup>。
- (ii) 解空間  $S$  の基底を構成するベクトルの個数は基底の選び方によらずに一定である。
- (iii) 行列の階数は、階段行列の作り方によらない。

*Proof.* (i) はすでに見た。(ii) を見るために  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_s$  を 2 組の基底としよう。基底の性質 (ii) により、

$$\vec{x}_i = \sum_j b_{ji} \vec{y}_j, \quad \vec{y}_j = \sum_i c_{ij} \vec{x}_i$$

と書ける。これらを相互に代入して基底の性質 (i) を使うと、

$$BC = I_s, \quad CB = I_r$$

という関係が得られる。ここで、上の補題を使えば、 $r \leq s, s \leq r$ , すなわち  $r = s$  である。

(iii) は、階数とパラメータの個数との関係および (ii) の主張よりわかる。 □

系 7.9. 解空間の基底を構成するベクトルの個数と行列の階数の和は  $n$  に等しい。

定義 7.10. 解空間  $S$  の基底を構成するベクトルの個数を  $S$  の次元 (dimension) とよび、記号  $\dim S$  で表す。 $S = \{\vec{0}\}$  のときは、 $\dim S = 0$  であることに注意。

連立一次方程式 (非斉次型) の解法

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

を解くには、 $m \times n$  型行列  $A$  の右側に列ベクトル  $\vec{b}$  を付け加えた  $m \times (n + 1)$  行列  $B = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b})$  を階段行列に変形し、方程式

$$B\vec{y} = \vec{0}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$$

<sup>\*45</sup>  $S = \{0\}$  のときも 0 個のベクトルからなる基底が存在すると思う。空集合から空集合への写像がちょうど一つ存在する ( $0! = 1$ )。

が

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ -1 \end{pmatrix}$$

という形の解をもつかどうか調べる。

- 行列  $B$  の階段形で、最下段の角が  $n+1$  列に現れた場合には、このような解は存在しない ( $y_{n+1} = 0$  となってしまうので)。
- それ以外の場合には、 $y_{n+1}$  の値を自由に選べるので、 $y_{n+1} = -1$  である解が存在する。さらに、そのように選んでもなお  $n - \text{rank}(B) = n - \text{rank}(A)$  だけの個数の自由に選べるパラメータが残る。

問 7.6. (#) 具体例で上の方法を確認せよ。

問 7.7.  $\text{rank}(B) - \text{rank}(A)$  は 0 または 1 であり、方程式  $A\vec{x} = \vec{b}$  に解が存在するための必要十分条件は、 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$  となることである。

とくに、未知数の数と方程式の数一致する  $m = n$  の場合で、 $A$  の階数が  $n$  であるとき (最も普通の場合) には、 $B$  の簡約階段行列が

$$C = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & c_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & c_n \end{pmatrix}$$

の形になるので、

$$C \begin{pmatrix} \vec{x} \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

が求める解である。すなわち、解はちょうど一つ存在し、それが  $C$  の右端に現れる。

問 7.8. (\*) 与えられた  $m \times n$  行列  $A$  の簡約階段行列は一つしかないことを  $n$  についての帰納法で示せ。とくに、階段の段差を生じる列の場所  $(j_1, j_2, \dots, j_r)$  は、階段行列のとり方によらず  $A$  だけで決まる。

## 8 逆行列と基底

$n \times n$  行列  $A$  に対して

$$AB = BA = I_n$$

となる  $n \times n$  行列  $B$  を  $A$  の逆行列 (inverse matrix) という。 $A$  の逆行列は、あっても一つしかない。実際、 $C$  も  $A$  の逆行列であったとすると、 $I = AC$  に左から  $B$  をかけて、 $B = BAC = IC = C$  となって一致する。 $A$  だけで決まるので  $A^{-1}$  と書く。逆行列が存在する行列のことを可逆 (invertible) とか正則 (non-singular) と称するのだが、以下では「逆 (行列) をもつ」ということにする。

例 8.1. 連立一次方程式  $A\vec{x} = \vec{b}$  の係数行列  $A$  が逆をもてば、連立一次方程式はちょうど一つ解をもち、解は  $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$  で与えられる。