16　平面と空間の一次式変換

直交座標系とは、原点 o と変位ベクトル空間の正規直交基底を指定することに他ならない。その場合の座標は位置ベクトルの成分と同定される。2 次あるいは 3 次の実正方行列は、位置ベクトルへの作用を通じて、平面あるいは空間の一次変換を引き起こす。これは、座標原点を動かさないため特殊なものではあるが、これと平行移動を組み合わせることで、一般的な**一次式変換**（**アフィン変換**[*105]ともいう）が記述される。簡単のために平面の場合を考えて、移動前と移動後の点の座標を (x, y), (x', y') とすれば、一般的な一次式変換は、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

のようになる。x', y' が x, y の一次式で書けていることから、直線を直線（あるいは一点）に写すことは明らかである。また、これが全単射であるための必要十分条件は、行列部分が逆をもつこと、すなわち $ad - bc \neq 0$ ということ。このような変換は平行四辺形を平行四辺形に写し、その面積の比が $|ad - bc|$ であることは行列式のところで見たとおり。

問 16.1. 平面の一次式変換で $C = \{{}^t(x, y); |x| \leq y\}$ を C に移すものをすべて求めよ。

問 16.2. $\mathbb{Z}^2 = \{{}^t(x, y); x, y$ は整数 $\}$ とおくとき、平面の一次式変換による $\mathbb{Z}^2$ の像が $\mathbb{Z}^2$ と一致するための必要十分条件を求めよ。

さて、2 点間の距離を保つ一次式変換[*106]（＝**ユークリッド変換**）について調べよう。平行移動の部分はこの性質をもつので、行列部分を考えると、ベクトルの大きさを保つ線型変換となり、命題 14.11 から、直交変換である。そこで、2 次と 3 次の直交行列についてまず調べよう。

直交変換

2 次の直交行列 T は、$\mathbb{R}^2$ の正規直交基底 e, f を使って、$T = (e, f)$ と表わされる。e は単位ベクトルであるから、

$$e = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

と書ける。単位ベクトル f は、これに直交するので、

$$\pm \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

である。まず、

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

であるが、これは原点のまわりの角度 θ の回転を表す。実際、角度 θ だけ回転させる変換 R を考えると、R は平行四辺形を平行四辺形に移すので、加法的であり、さらに、正数 $r > 0$ に対して rv を $rR(v)$ に移すの

[*105] 英語の affine は姻戚関係者の意味であるが、ラテン語の affinis (ad+finis) に由来する言葉。affinis の意味は、「(土地の) 終わりへ＝周辺の」。今の場合、何の周辺かというと、linear の周辺らしい。苦し紛れの用語というべきか。式の上からは、linear ＝ 純一次式、affine ＝ 一般の一次式、であるから、「一次」という用語を affine の訳語に当てて良かったような。

[*106] 実は、二点間の距離を保つ変換は一次式変換であることが、分極等式を使えばわかる。各自試みよ。

で線型であることがわかる。また、基本ベクトルの移動先を考えると、

$$R : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

となって、T と R は一致する。

問 16.3. この回転の行列表示から、三角関数の加法定理を導け[*107]。

次に、

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

であるが、これは、直線 $y = x\tan(\theta/2)$ に関する折り返しを表す。実際、この対称かつ直交行列の固有値は ± 1 であり、それぞれの固有ベクトルが

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

であることからわかる。

あるいは、次のように座標幾何的に処理してもよい。(x, y) をこの直線に関して折り返したあとの点の座標を (x', y') で表せば、この 2 つの点の中点が直線上にあり、また、点の移動に伴うベクトル $(x' - x, y' - y)$ が、直線と直交することから、

$$\frac{y + y'}{2} = \frac{x + x'}{2}\tan(\theta/2), \quad (x - x')\cos(\theta/2) + (y - y')\sin(\theta/2) = 0.$$

これを x', y' について解けば、

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta, \quad y' = x\sin\theta - y\cos\theta$$

となるので、T に一致する。

問 16.4. 直線 $y = x\tan(\theta/2)$ に関する折り返しの行列を T_θ と書くとき、2 つの折り返しの合成 $T_\varphi T_\psi$ がどのような変換を表すか。

2 次がわかったので、3 次の直交行列 T について調べよう。T の固有多項式 $f(t) = \det(tI - T)$ は t の最高次の係数が 1 の 3 次関数であるので、$\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = \pm\infty$ である。したがって、中間値の定理により、$f(t) = 0$ となる実数が存在し、固有方程式の自明でない解を $v \in \mathbb{R}^3$ とすれば $Tv = tv$ である。一方、T は、ベクトルの大きさを変えないので、$|t| = 1$ でなければならない。そこで、$\boldsymbol{k} = v/|v|$ を含む正規直交基底 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ をとってきて、それに関する T の行列表示を改めて T とおけば、

$$T = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

であることがわかる。ここで、T が直交行列であることから、2 次の正方行列 S も直交行列である。そこで 4 つの場合に分ける。

(i) $t = 1$, S が回転の行列。この場合の T は、座標軸 $\boldsymbol{k}$ の周りの回転を表す。

[*107] その是非は別にして、一次変換世代における加法定理の典型的な証明方法であった。

(ii) $t = 1$, S が折り返し変換の場合。折り返し直線の方向を $\boldsymbol{j}$ に一致させると、T は、ベクトル $\boldsymbol{i}$ に垂直な平面に関する折り返しを表す。

(iii) $t = -1$, S が回転の場合。座表軸 $\boldsymbol{k}$ のまわりに回転を施した後に、$\boldsymbol{k}$ に垂直な平面に関する折り返しを続けて行う変換（映転）。

(iv) $t = -1$, S が折り返しの場合。折り返しの直線のまわりの角度 π の回転を表す。

まとめると、3 次の直交行列は、$\det(T) = \pm 1$ に応じて、ある直線のまわりの回転か映転を表す。

問 16.5. 問 14.5 から $T = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & \det(T) \end{pmatrix}$ という表示を導くことで、場合分けをすることなく結論を導け。

ユークリッド変換

次に、これらと平行移動を組み合わせた一般のユークリッド変換について調べよう。そのためには、デカルト表示よりも位置ベクトル表示がわかりやすい。直交変換 T とベクトル $\boldsymbol{t}$ による平行移動を組み合わせた、ユークリッド変換

$$\Phi : o + \boldsymbol{r} \mapsto o + T\boldsymbol{r} + \boldsymbol{t}$$

において、基準点を o から o' に変更してみよう。$o + \boldsymbol{r} = o' + \boldsymbol{r'}$

$$o' + \boldsymbol{r'} \mapsto o + T\boldsymbol{r} + \boldsymbol{t} = o' + T\boldsymbol{r'} + (T - I)(o' - o) + \boldsymbol{t}$$

であるから、直交変換部分は変わらず、平行移動部分が $\boldsymbol{t}$ から

$$\boldsymbol{t'} = (T - I)(o' - o) + \boldsymbol{t}$$

に変化する。

(i) T が 2 次元回転の場合：$\det(R - I) = (\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta > 0$ であるから、o' を $\boldsymbol{t'} = 0$ であるように選ぶことができる。すなわち、Φ は、ある点のまわりの回転を表す。

(ii) T が 2 次元折り返しの場合：$(I - T)/2$ は、折り返し軸に垂直な方向への射影を表すので、その成分のみ $\boldsymbol{t}$ から取り除くことができる一方で、折り返し軸方向の成分は不変である。ということで、ある直線に関する折り返しとその直線方向の平行移動の合成となる。これを映進 (glide reflection) という。

(iii) T が 3 次元回転の場合： $T - I$ の像は、回転軸と直交するベクトル全体となるので、平行移動部分が回転軸方向になるように o' を選ぶことができる (Chasles の定理)。このような変換を回進 (screw displacement*[108]) とよぶ。

(iv) T が映転の場合： $-\Phi$ が回進となるので、Φ は、逆回進と回進軸に垂直な平面に関する折り返しを組み合わせたもの (反回進) となる。

問 16.6. ユークリッド変換のうち、恒等変換を連続的に変化させることで実現できるのは $\det T = 1$ の場合である。

Remark 12. 映転とか回進とかの用語は、ここで適当にこしらえたものなので、人前で使わないのが無難。回進の代わりに転進でもよかったのであるが、戦中の軍隊用語（転進、その心は退却）とかぶるのでやめにした。

*[108] screw drive と呼んであげたいような。

そもそも、３次元ユークリッド変換の分類自体が、その簡明さにもかかわらず世間の教科書から漏れているようで、不思議なことである。察するに、一次変換はやっても一次式変換に触れることは稀で、ましてやアフィン座標変換やそれに連なるユークリッド変換は、ということなのだろう。ユークリッド空間は数を並べたものだと思っている輩が多すぎるような。