関する**行列表示** [*75](matrix representation) と呼ばれる。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] & W \\ \mathbb{K}^n \arrow[u, "e"] \arrow[r, "{[A]}"'] & \mathbb{K}^m \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

問 11.15. 上の可換図式の意味を推測し、$L(V, W) \cong M_{m,n}(\mathbb{K})$ を示せ。

行列の場合の結果 (命題 9.5 =ほぼ掃き出し定理) を言いかえるか、そこでの直接証明を繰り返すことで、次がわかる。

定理 11.17. 有限次元ベクトル空間の間の線型写像 $\phi : V \to W$ について、$\dim \phi(V) = \dim V - \dim \ker \phi$. とくに、$\phi$ が全射であるための必要十分条件は $\dim W = \dim V - \dim \ker \phi$ である。

系 11.18. $\dim V = \dim W < \infty$ のとき、次は同値。

(i) ϕ は単射 ($\ker \phi = \{0\}$)。
(ii) ϕ は全射 ($W = \phi(V)$)。
(iii) ϕ は全単射。

問 11.16. ($\sharp$) これを確かめよ。

以上の基底を通じた線型写像と行列の間の対応はきわめて形式的なものなので、各自、必要に応じて確かめて使えればよい。必要でないかも知れないし、証明とかは敢えて授業で取り上げるほどのものでもない。

12 線型作用素

ここでは $V = W$ とする。この場合の線型写像は、とくに、**線型変換** (linear transformation) あるいは**線型作用素** (linear operator[*76]) と呼ばれる[*77]。線型変換のほかに**一次変換**という言い方も一般的である[*78]。以下では、とくにこだわりなく何れをも使うことにする。また、ベクトル空間 V における線型作用素全体を $L(V)$ で表し、それに応じて行列の方も $M_{n,n}(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K})$ と書くことにしよう。これのありがたいところは、写像の合成=積、が自由に行えること。以下において、V における恒等写像 (identity map) を I_V あるいは略して I と書くことにする。

線型作用素の行列表示には、基底は V のそれ $e = (e_1, \cdots, e_n)$ を一つ用意しておけばよいことにまず注意する。対応 $L(V) \ni \phi \mapsto [e]^{-1}\phi[e] \in M_n(\mathbb{K})$ は、ベクトル空間としての同型を与えるのみならず、積の構造も保つ：$([e]^{-1}\varphi[e])([e]^{-1}\psi[e]) = [e]^{-1}(\varphi\psi)[e]$ $(\varphi, \psi \in L(V))$.

[*75] representation の訳ということで行列表現とも呼ばれるが、ここでの意味合いは表示といったところ。

[*76] operator の訳語としては、作用素と演算子が同程度に使われる。前者は数学関係者に、後者はそれ以外で好まれるようであるが、どちらも硬すぎる。もっと日本語らしく「働き」と呼べぬものか。

[*77] 両者の使い分けであるが、変換の方は移されるものが主役で、作用素の方は作用素自体に注目している印象がある。例：座標変換と微分作用素、積分変換と積分作用素。

[*78] 統一がとれていないのは、連立一次方程式という言い方に引きづられたせいか。すべて線型でよいようにも思うが、習慣の力は強い。なお、線型という文字の代わりに線形を使うのが近年の風潮であるが、漢字本来の意味からすれば、線型が適切であろう。ちなみに中国語では線性という。型でもまだ具象に引きづられていると見たのであろうか。それとも、・・・。

例 12.1 (回転の行列)**.** 平面の幾何ベクトルからなるベクトル空間 V において角度 θ の回転を表す変換 ϕ を考えると、その幾何学的意味から、R は V の一次変換である。V における基準的な基底（正確には、正規直交基底という、§ 13 参照) (e_1, e_2) を取ってくると、

$$\phi(e_1) = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2, \quad \phi(e_2) = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2$$

となるので、その表現行列は、

$$R(\theta) = [e]^{-1}\phi[e] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

問 12.1. ($\sharp$) n 次以下の多項式の作るベクトル空間における線型作用素 $\phi_a : p(t) \mapsto p(t+a)$ の基底 $1, t, \cdots, t^n$ に関する表現行列 S_a を求め、$S_a S_b = S_{a+b}$ を確かめよ。ここで、a, b はスカラーを表す。

冪級数と数列の線型代数をもう少し詳しく見ておこう。まず、形式的冪級数の作るベクトル空間 $\mathbb{K}[[t]]$ であるが、級数としての積を次のように定める。

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} y_k t^k\right) = \sum_{l=0}^{\infty}\Big(\sum_{j+k=l} x_j y_k\Big)t^l.$$

この級数としての積は、交換法則をはじめ、結合法則、分配法則が成り立ち、代数学の用語で言うところの環 (ring) になっている。

問 12.2. 結合法則を確かめよ。

命題 12.2. 形式的冪級数環 $\mathbb{K}[[t]]$ において、$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ が逆元をもつための必要十分条件は、$a_0 \neq 0$ である。実際、逆元 $\sum_k x_k t^k$ の係数は、次を $x_0, x_1, x_2, \cdots$ について順に解いていけば定められる。

$$\begin{aligned} a_0 x_0 &= 1, \\ a_0 x_1 + a_1 x_0 &= 0, \\ a_0 x_2 + a_1 x_1 + a_2 x_0 &= 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

例 12.3. 複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、形式的冪級数 $1 + \lambda t + \lambda^2 t^2 + \cdots$ は、

$$(1 - \lambda t)(1 + \lambda t + \lambda^2 t^2 + \cdots) = (1 + \lambda t + \lambda^2 t^2 + \cdots)(1 - \lambda t) = 1$$

をみたす。このことから $1 + \lambda t + \lambda^2 t^2 + \cdots = \frac{1}{1-\lambda t}$ という表記が正当化される。
また、$e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k$ を形式的冪級数と思うと、$e^{\lambda t} e^{\mu t} = e^{(\lambda+\mu)t}$ すなわち、

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} t^l\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n$$

であることが二項定理からわかるので、$e^{-\lambda t}$ は $e^{\lambda t}$ の逆元である。

形式的冪級数環 $\mathbb{K}[[t]]$ における微分 (作用素) $D : \mathbb{K}[[t]] \to \mathbb{K}[[t]]$ を $D(\sum_{k\geq 0} a_k t^k) = \sum_{k\geq 0}(k+1)a_{k+1}t^k$ で定めると、$D(fg) = (Df)g + f(Dg)$ を満たす (Leibnitz rule)。

例 12.4. テイラー写像 $T:\mathbb{C}[[t]]\to\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ は、微分 $D:\mathbb{C}[[t]]\to\mathbb{C}[[t]]$ と**ずらし作用素** (shift operator) $S:\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ $((Sa)_k=a_{k+1})$ の間を**取り持つ**[*79]:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}[[t]] & \xrightarrow{T} & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\
{\scriptstyle D}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S}. \\
\mathbb{C}[[t]] & \xrightarrow[T]{} & \mathbb{C}^{\mathbb{N}}
\end{array}
$$

とくに、c 漸化式の解空間 $\mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}=\ker(S^n-c_1S^{n-1}-\cdots-c_nI)$ と微分方程式の解空間 $\ker(D^n-c_1D^{n-1}-\cdots-c_nI)$ は、T により互いに移りあう。とくに、$\dim\ker(D^n-c_1D^{n-1}-\cdots-c_nI)=n$ である。

また、$S(\mathbb{C}_c^{\mathbb{N}})\subset\mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}$ であることと初期条件に注意して、S の $\mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}$ への制限を基底 $(\delta_0,\cdots,\delta_{n-1})$ に関して表せば、

$$
(S\delta_0,\cdots,S\delta_{n-1})=(\delta_0,\cdots,\delta_{n-1})C,\quad C=\begin{pmatrix}0&1&0&&\text{\Large 0}\\0&0&1&\ddots&\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&0&\dots&0&1\\c_n&c_{n-1}&\dots&c_2&c_1\end{pmatrix}
$$

となり、$T^{-1}\delta_j\in\ker(D^n-c_1D^{n-1}-\cdots-c_nI)$ のみたすべき初期条件は、$(T^{-1}\delta_j)^{(k)}(0)=\delta_{j,k}$ $(0\le j,k\le n-1)$ である。行列 C を c 漸化式の連れ行列 (companion matrix) と呼ぶ。

問 12.3. 行列 C の形および $\det(tI_n-C)=t^n-c_1t^{n-1}-\cdots-c_n$ を確かめよ。

次に、$\lambda\in\mathbb{C}$ に対して、$e^{\lambda t}=\sum_k\frac{\lambda^k}{k!}t^k\in\mathbb{C}_\infty[[t]]$ とおくと、二項定理から $e^{\lambda t}e^{\mu t}=e^{(\lambda+\mu)t}$ がわかる。そこで、$\mathbb{C}[[t]]$ における線型作用素 Q_λ を $Q_\lambda(f(t))=e^{\lambda t}f(t)$ で定めると、$Q_\lambda Q_\mu=Q_{\lambda+\mu}$ が成り立つ。 とくに、$Q_\lambda^{-1}=Q_{-\lambda}$ である。さらに Leibnitz rule から、$DQ_\lambda=Q_\lambda D+\lambda Q_\lambda$、すなわち $Q_\lambda DQ_\lambda^{-1}=D-\lambda I$ がわかる。このことと、$\ker D^m=\langle 1,t,\cdots,t^{m-1}\rangle$ から、$\ker(D-\lambda I)^m=e^{\lambda t}\langle 1,t,\cdots,t^{m-1}\rangle$ もわかる。$D\ker(D-\lambda I)^m\subset\ker(D-\lambda I)^m$ にも注意。さらに、$\ker(D-\mu I)\cap\ker D^m=\{0\}$ $(\mu\ne 0)$ を Q_λ で移せば、$\ker(D-\mu' I)\cap\ker(D-\lambda I)^m=\{0\}$ $(\lambda\ne\mu')$、すなわち、$D-\mu' I$ $(\lambda\ne\mu')$ の $\ker(D-\lambda I)^m$ への制限は単射的である。

補題 12.5. 互いに異なる複素数の列 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ に対して、部分空間の集まり $e^{\lambda_1 t}\mathbb{C}[t],\cdots,e^{\lambda_r t}\mathbb{C}[t]$ は独立である。

Proof. 実際、$e^{\lambda_1 t}p_1(t)+\cdots+e^{\lambda_r t}p_r(t)=0$ ($p_j(t)\in\mathbb{C}[t]$ は m_j 次式) とすると、$D-\lambda I$ が互いに交換することから、

$$
\begin{aligned}
0&=(D-\lambda_1 I)^{1+m_1}\cdots(D-\lambda_{r-1})^{1+m_{r-1}}(e^{\lambda_1 t}p_1(t)+\cdots+e^{\lambda_r t}p_r(t))\\
&=(D-\lambda_1 I)^{1+m_1}\cdots(D-\lambda_{r-1})^{1+m_{r-1}}e^{\lambda_r t}p_r(t).
\end{aligned}
$$

ここで、$D-\lambda_1 I,\cdots,D-\lambda_{r-1}I$ が $\ker(D-\lambda_r I)^{1+m_r}\ni e^{\lambda_r t}p_r(t)$ を不変にし、かつその上で単射的であることから、$e^{\lambda_r t}p_r(t)=0$ がわかる。 □

系 12.6. $\{e^{\lambda t}t^l;\lambda\in\mathbb{C},l\ge 0\}$ は $\mathbb{C}[[t]]$ で一次独立。

[*79] T intertwines D and S の訳。T を intertwiner という。取り持ちであるか。動詞に動詞を重ねて動詞を作る、わかるか。

多項式 $t^n - c_1 t^{n-1} - \cdots - c_{n-1} t - c_n$ を $(t-\lambda_1)^{m_1} \cdots (t-\lambda_r)^{m_r}$ と因数分解すると、

$$\ker(D-\lambda_1 I)^{m_1} + \cdots + \ker(D-\lambda_r I)^{m_r} \subset \ker(D^n - c_1 D^{n-1} - \cdots - c_n I)$$

であるが、両者の次元が一致するので、等しいことがわかる。したがって、$\{e^{\lambda_j t} t^l / l!; 1 \le j \le r, 0 \le l < m_j\}$ を並べたものが $\ker(D^n - c_1 D^{n-1} - \cdots - c_n I)$ の基底となる。特定の j のところを抜き出せば、

$$D(e^{\lambda t}, e^{\lambda t} t, \cdots, e^{\lambda t} t^{m-1}/(m-1)!) = (e^{\lambda t}, e^{\lambda t} t, \cdots, e^{\lambda t} t^{m-1}/(m-1)!) \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \text{\huge 0} \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \text{\huge 0} & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

また、漸化式の解空間 $\mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}$ の基底として、

$$e_{j,l} = \left(\frac{k!}{l!(k-l)!} \lambda_j^{k-l} \right)_{k \ge 0}, \quad 1 \le j \le r,\ 0 \le l < m_j$$

を得る[*80]ので、

$$(Se_1, \cdots, Se_r) = (e_1, \cdots, e_r) \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} + N_{m_1} & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & \lambda_r I_{m_r} + N_{m_r} \end{pmatrix}, \quad Se_j = (Se_{j,0}, \cdots, Se_{j,m_j-1}).$$

ただし、N_m は、つぎのような m 次正方行列を表す。

$$N_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \text{\huge 0} \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \text{\huge 0} & & & 0 \end{pmatrix}.$$

かくして、連れ行列 C の固有多項式が $t^n - c_1 t^{n-1} - \cdots - c_{n-1} t - c_n$ であることの別証明も得られた。

微分方程式と差分方程式、難しきは差分なれど、線型の交わりの深さよ。

例 12.7. $n=2$ の場合の結果を詳しく書いておこう。$c=(a,b)$ $(b \neq 0)$ とおくと、漸化式、微分方程式はそれぞれ

$$x_{k+2} = a x_{k+1} + b x_k, \quad \frac{d^2}{dt^2} f(t) = a \frac{d}{dt} f(t) + b f(t)$$

のようになる。固有多項式 $x^2 - ax - b$ が重解 (重根) をもつかどうかで分けて扱う。

(i) 重根をもたない場合 $(a^2 + 4b \neq 0)$ 、その根を $\lambda \neq \mu$ とすれば、一般解は

$$x_k = \alpha \lambda^k + \beta \mu^k, \quad f(t) = \alpha e^{\lambda t} + \beta e^{\mu t}.$$

(ii) 重根の場合 $(a^2 + 4b = 0)$ 、$\lambda = a/2$, $m=2$ に注意すれば、$a \neq 0$ のときの一般解が

$$x_k = (\alpha + \beta k) \lambda^k, \quad f(t) = (\alpha + \beta t) e^{\lambda t}.$$

[*80] $\lambda_j = 0$ のときは、$e_{j,l} = \delta_l$ $(l = 0, 1, \ldots, m_j - 1)$ と解釈する。

問 12.4. (♯) これを確かめよ。

直和と射影分解

直和分解の内容を作用素の言葉で表現してみよう。直和分解 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ において、V のベクトル v は、$v = v_1 + \cdots + v_r$ $(v_i \in V_i)$ という表示をもち、しかも表示の仕方はひと通りしかない。このことから、v に対して、その V_i 成分 v_i を取り出す写像 $v \mapsto v_i$ は、V から V_i の上への線型写像を定める。今、各 V_i は V の部分空間であるから、この写像を V から V への作用素 E_i と思うことができる。作用素としての E_i は、$E_i v_i = v_i$ $(v_i \in V_i)$ となるので、$E_i^2 = E_i$ をみたす。一般に、$E^2 = E$ となる線型作用素を**射影**[*81] (projection) とよぶ。上で導入した射影 E_i は、$E_j v_i = 0$ $(j \neq i)$ となることから、代数関係 $E_i E_j = \delta_{i,j} E_i$ をみたす。さらに、$v = E_1 v + \cdots + E_r v$ $(v \in V)$ であることから、$E_1 + E_2 + \cdots + E_r = I_V$ もわかる。

逆に、V における射影の集まり $\{E_i\}_{1 \leq i \leq r}$ (ただし $E_j \neq 0$) が $E_i E_j = \delta_{i,j} E_i$ を満たせば、部分空間の集まり $\{V_i = E_i V\}$ は一次独立となり、さらに $E_1 + \cdots + E_r = I_V$ もみたせば、$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ がわかる。このような射影の集まりを I_V の**射影分解** (resolution) と呼ぶことにすれば、V の直和分解と I_V の射影分解が一対一に対応することがわかる。

例 12.8. 2 個の射影による分解を詳しく見ておこう。この場合は、$I_V = E_1 + E_2$, $E_1^2 = E_1$, $E_2^2 = E_2$, $E_1 E_2 = E_2 E_1 = 0$ が必要な関係式であるが、このうち、$E_1^2 = E_1$ (あるいは $E_2^2 = E_2$) があれば、$E_2 = I_V - E_1$ と置くことで、残りの関係式がすべて出てくる。この意味で、2 個の場合の分解は、一つの射影を与えることと同等の内容である。

問 12.5. V における射影作用素 E に対して、$(I - E)V = \ker E$ である。

次に、行列の対角化に相当することを作用素 (変換) の言葉で表現してみよう。そのために必要な概念と言葉をさらにいくつか補充する。まずは固有値と固有ベクトル。線型作用素 $\phi : V \to V$ とスカラー λ に対して、ベクトル方程式 $\phi v = \lambda v$ が自明でない解 $0 \neq v \in V$ もつとき、λ を ϕ の**固有値**とよび、そのときの自明でない解 v を**固有ベクトル**という。また、固有値 λ に付随した固有空間を $V_\lambda = \ker(\phi - \lambda I) = \{v \in V; \phi v = \lambda v\}$ で定める。

問 12.6. (♯) $\mathbb{C}[[t]]$ における微分作用素 D は、勝手な複素数 λ を固有値としてもち、その固有空間は $\mathbb{C}e^{\lambda t}$ である。

さらに、部分空間 $W \subset V$ が、ϕ で**不変** (invariant) であるとは、$\phi(W) \subset W$ となることと定める。この場合、ϕ を W に制限したものが W での線型変換 (W から W への線型写像) を引き起こすことに注意。

固有空間 V_λ は不変部分空間であり、異なる固有値に属する固有空間の集まりは一次独立となる。また、行列の場合の対角化可能条件は、V が固有空間の直和に分解されることと言い換えられる。行列と同様、線型変換においても、この条件は多くの場合に成り立つのであるが、そうならない場合でも、不変部分空間への直和分解を考えることは、線型変換を調べる上で重要な手がかりを与えてくれる。不変部分空間という窓を通じて、線型変換全体ではなくそのうちの興味ある部分を取り出してみることが可能、といった仕組みである。

問 12.7. 以上の固有空間に関する主張を行列の場合の証明 (§10) を参考に確かめよ。

[*81] ここでは、射影の記号として E を使う。行列単位あるいは単位行列の記号と混同しないように注意。

命題 12.9. 不変部分空間 W に対して、その基底 $(e_1, \cdots, e_m)$ を含むような V の基底 $e = (e_1, \cdots, e_n)$ を用意する $(m = \dim W < n = \dim V)$ と、不変性 $\phi(W) \subset W$ により、

$$[e]^{-1}\phi[e] = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad A \in M_m(\mathbb{K}),\ B \in M_{n-m}(\mathbb{K}).$$

逆に、行列 $[e]^{-1}\phi[e] \in M_n(\mathbb{K})$ が、上記のような三角型ブロックで表わされるならば、$\{e_1, \cdots, e_m\}$ の一次結合全体 $\langle e_1, \cdots, e_m \rangle$ は不変部分空間となる。

命題 12.10. 部分空間 W の基底 $e' = (e_1, \cdots, e_m)$ を用意すれば、W が ϕ で不変のとき、$\phi e' = e'A$ となる行列 $A \in M_m(\mathbb{K})$ が存在する。逆にこのような行列 A があれば、W は ϕ 不変である。

命題 12.11. 線型変換 $\phi : V \to V$ に対して、不変部分空間による直和分解 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ があると、その直和分解に合わせた基底に関して ϕ を行列表示したものは

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix}$$

のように対角型ブロック行列で与えられる。逆に、このような対角型ブロック表示を与える基底があれば、各ブロックごとの構成要素の一次結合全体 V_i は不変部分空間となり、V は $\{V_i\}$ の直和に分解される。

問 12.8. 以上３つの命題を確かめよ。

最後に、不変部分空間による直和分解を射影の言葉で言い換えておこう。２つの作用素 $\varphi, \psi : V \to V$ が**交換する** (commute) あるいは**可換である** (commutative) であるとは、$\varphi\psi = \psi\varphi$ となること。

命題 12.12. 射影 E に対して、部分空間 EV および $(I - E)V$ が ϕ 不変であるための必要十分条件は、E と ϕ が交換すること。

問 12.9. これを確かめよ。

確率行列

３点間の確率的移動について考える。点１にいたものが、次に点１，２，３に移動する確率を a_1, a_2, a_3 とする。同様に点２、点３からの移動確率をそれぞれ b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 としよう。ある時点で点１，２，３にいる確率を x, y, z とすれば、次の時点での存在確率分布は

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

となる。このような行列 T を**確率行列** (stochastic matrix) と呼ぶ。時間の経過とともに確率分布がどのように変化するかを、行列 T の対角化の観点から調べてみよう。状況設定から、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \iff {}^tT \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので、${}^tT$ は 1 を固有値として持つ。したがって、系 10.2 により、1 は T の固有値でもある。以下、簡単のために、$a_1 = b_2 = c_3 = 0$ とし、$a_2 = a$, $b_3 = b$, $c_1 = c$ とおいて、その固有ベクトルを求めると、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1-b & c \\ a & 0 & 1-c \\ 1-a & b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} bc-b+1 \\ ac-c+1 \\ ab-a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc-b+1 \\ ac-c+1 \\ ab-a+1 \end{pmatrix}$$

となり、固有値 1 の固有空間への射影（作用素）で T と可換なものとして

$$E = \frac{1}{ab+bc+ca-a-b-c+3} \begin{pmatrix} bc-b+1 \\ ac-c+1 \\ ab-a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

をとることができる。（係数は $E^2 = E$ となるように調整。）

そこで、２次元不変部分空間 $(I_3 - E)\mathbb{R}^3 = \ker E = \{x+y+z=0\}$ の基底として、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

をとると、

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (1-a-c)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (b+c-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (c-1)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となって、そこでの $[T]$ の表示行列は

$$\begin{pmatrix} T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} & T\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c & b+c-1 \\ 1-a-c & c-1 \end{pmatrix}$$

で与えられる。その固有値の情報は

$$\begin{vmatrix} t+c & 1-b-c \\ a+c-1 & t+1-c \end{vmatrix} = t^2 + t + ab + bc + ca - a - b - c + 1$$

に集約されるので、$\sigma = ab+bc+ca-a-b-c+1$ から読み取れる。ここで、

$$\{ab+bc+ca-a-b-c+1; 0 \leq a,b,c \leq 1\} = [0,1]$$

および、最大値 $\sigma = 1$ を取る点は、$a = b = c = 1$ または $a = b = c = 0$ であり、最小値 $\sigma = 0$ を取る点は、$\{0,1\} \subset \{a,b,c\}$ である。

最大値に対応する確率行列は巡回置換に対応し、最小値をとるのは互換に相当する。$0 < \sigma < 1/4$ のときの固有値は実数で、$(-1,-1/2)$ と $(-1/2,0)$ の間に一つずつある。$1/4 < \sigma < 1$ のときは、互いに共役な絶対値が 1 より小さい複素数が固有値。最後に、固有値 $-1/2$ が重なっている

$$\sigma = \frac{1}{4} \iff (a-1/2)(b-1/2) + (b-1/2)(c-1/2) + (c-1/2)(a-1/2) = 0$$

のときは、$(1/2,1/2,1/2)$ を頂点とし $(1,1,1)$ 方向に延びた円錐を表す[*82]。このうち対角化可能であるのは、

$$\begin{pmatrix} -c & b+c-1 \\ 1-a-c & c-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

[*82] σ を (a,b,c) の関数とみたとき、点 $(1/2,1/2,1/2)$ は $(+,-,-)$ 型の鞍点になっている。例 15.4 参照。

すなわち、頂点のみ。それ以外は、固有値 $-1/2$ の対角化できない 2 次行列であるから、基底を取り替えて、

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

という表示を得る。したがって、

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-1/2)^n & n(-1/2)^{n-1} \\ 0 & (-1/2)^n \end{pmatrix} \to 0 \ (n \to \infty)$$

に注意すれば、$0 < \sigma < 1$ のとき、

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 0 & 1-b & c \\ a & 0 & 1-c \\ 1-a & b & 0 \end{pmatrix}^n = \frac{1}{ab+bc+ca-a-b-c+3} \begin{pmatrix} bc-b+1 \\ ac-c+1 \\ ab-a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

これは、初期分布 ${}^t(x, y, z)$ のとり方に係わらず、時間が経過すると、確率分布

$$\frac{1}{ab+bc+ca-a-b-c+3} \begin{pmatrix} bc-b+1 \\ ac-c+1 \\ ab-a+1 \end{pmatrix}$$

に急速に近づくことを意味する。

問 12.10. ($\sharp$) 細部を検証せよ。また、$c = 1/2$, $\sigma = 2/9$ の場合を詳しく調べよ。

問 12.11. 3 次の確率行列で、すべての固有値が有理数で互いに異なるものを具体的に一つ作れ。

Remark 5. 同様の結果が、正成分をもつ正方行列について広くなりたつ (Perron-Frobenius の定理)。

13 内積空間

ここからは純粋の代数（＝等号の数学）から離れることになるが、現代物理の根幹をなす量子論を定量的に記述する上でも欠かせない内積の数学について、その基礎的な部分を見ていこう。以下、数の範囲としては $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ のいずれかとし、$\mathbb{C}$ における複素共役を $\overline{z}$ のように表す。$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V における**内積** (inner product) とは、2 つのベクトル $v, w \in V$ に数 $(v|w) \in \mathbb{K}$ を対応させる関数で、以下の条件を満たすものをいう。

(i) $(v|w)$ は w について線型。
(ii) $(v|w) = \overline{(w|v)}$.
(iii) $(v|v) \geq 0$ であり (正値性)、$(v|v) = 0$ となるのは $v = 0$ の場合に限る (定値性)。

(i) と (ii) から、内積 $(v|w)$ は v について共役線型[*83](conjugately linear) であることがわかる。
内積が指定されたベクトル空間を**内積空間** (inner product space) と称する。

問 13.1. 複素ベクトル空間の場合に、内積の性質 (ii), (iii) を、(ii)' $(v|w)$ は v についても線型、(iii)' $(v|v) \geq 0$、で置き換えると、$(v|w) = -(w|v)$ $(v, w \in V)$ がしたがう。

[*83] $(v' + \alpha v|w) = (v'|w) + \overline{\alpha}(v|w)$ が成り立つこと。反線型 (anti-linear) ともいう。