§4 行列の基本変形と連立1次方程式と逆行列

§§4-1 行列の基本変形

・基本行列

$$
I_n(i\,;k) \equiv
\begin{array}{c}
\text{第}i\text{列} \\
\begin{pmatrix}
1 & & & & & \\
& \ddots & & & 0 & \\
& & 1 & & & \\
& & & k & & \\
& 0 & & & 1 & \\
& & & & & \ddots \; 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\text{第}i\text{行}
\;\xleftarrow[\text{但し}k\neq 0]{\text{第}i\text{列を}k\text{倍}}\; I_n
$$

$$
I_n(i;k) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, k\mathbf{e}_i, \cdots, \mathbf{e}_n) \quad , \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$
I_n(i,j;k) \equiv
\begin{array}{c}
\text{第}i\text{列} \quad \text{第}j\text{列} \\
\begin{pmatrix}
1 & & & & \\
& \ddots & & & \\
& & 1 & k & \\
& & & \ddots & \\
& & & & 1 \\
& & & & \ddots \; 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\;\xleftarrow[\text{但し}i\neq j]{\text{第}i\text{列を}k\text{倍して第}j\text{列に加える}}\;
I_n =
\begin{array}{c}
k\text{倍して加える} \\
\begin{pmatrix}
1 & & & & \\
& \ddots & & & \\
& & 1 \rightarrow & 0 & \\
& & & \ddots & \\
& & & 1 & \\
& & & & \ddots \; 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
I_n(i,j;k) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_i, \cdots, \mathbf{e}_j + k\mathbf{e}_i, \cdots, \mathbf{e}_n)
$$

$$
I_n(i,j) \equiv
\begin{array}{c}
\text{第}i\text{列} \quad \text{第}j\text{列} \\
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 1 & & & & \\
& & & 0 & & 1 & \\
& & & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & 1 & \\
& & & 1 & & & 0 \\
& & & & & & & 1 \\
& & & & & & & & \ddots \; 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\;\xleftarrow[\text{但し}i\neq j]{\text{第}i\text{列と第}j\text{列と交換。}}\;
I_n
\begin{array}{c}
\text{交換} \\
\begin{pmatrix}
1 & & & & & \\
& \ddots & & & & \\
& & 1 & & & \\
& & & 1 & & \\
& & & & 1 & \\
& & & & & \ddots \\
& & & & & & 1 \\
& & & & & & & 1 \\
& & & & & & & & 1 \\
& & & & & & & & & \ddots \; 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
I_n(i,j) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_j, \cdots, \mathbf{e}_i, \cdots, \mathbf{e}_n)
$$

基本行列は正則行列である。

$\because \; |I_n(i;k)| = k, \; |I_n(i,j;k)| = 1, \; |I_n(i,j)| = -|I_n| = -1$ //

◦ 行基本変形

$A \in M(m,n)$ に対して

$I_m(i;k)A$ は A の第 i 行に数 k を掛けたものである

$I_m(i,j;k)A$ は A の第 j 行を k 倍して第 i 行に加えたものである.

$I_m(i;k)A$ は A の第 i 行と第 j 行を交換したものである.

$$\begin{array}{c} \\ \text{第}i\text{行} \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ kA_i \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & \text{第}i\text{列} & \text{第}j\text{列} & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & k & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i + kA_j \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & \text{第}i\text{列} & & \text{第}j\text{列} & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \text{第}i\text{行} \\ \\ \text{第}j\text{列} \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & & 1 & & \\ & & 1 & & 0 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$$

$\square$

◦ 列基本変形

$AI_n(i;k)$ は A の第 i 列に数 k を掛けたものである

$AI_n(i,j;k)$ は A の第 i 列を k 倍して第 j 列に加えたものである.

$AI_n(i;j)$ は A の第 i 列と第 j 列を交換したものである.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \text{第}i\text{列} & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} = (a_1, \cdots, ka_k, \cdots, a_n)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jm} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m} \end{pmatrix}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & \text{第}i\text{列} & \text{第}j\text{列} & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & k & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} = (a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j + ka_i, \cdots, a_n)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & \text{第}i\text{列} & & \text{第}j\text{列} & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & & 1 & & \\ & & 1 & & 0 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} = (a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_i, \cdots, a_n)$$

$\square$

定理4.1

$A \in M(m,n)$に対して有限回の行/列基本変形を行った結果得られた行列Bは

$$B = PAQ$$

と書けている。ここで$P \in M(m,m)$, $Q \in M(n,n)$で各々正則行列。

証明）変形は基本行列を左と右から有限回掛けることによって行われる。基本行列は正則であり、その掛け合わせたものも正則であるから、P, Qが正則であることは自明

□

上記の行列AとBの関係を

$$A \sim B$$

で表わすと、

$A \sim A$　（反射律）

$A \sim B \Rightarrow B \sim A$　（対称律）

$A \sim B$ かつ $B \sim C \Rightarrow A \sim C$（推移律）

を満たすことが容易にわかる。このような関係を同値関係という。

行列が見た目は異なっていても、ある量に注目すると実質同じであることが後にわかる。

§§4-2 行列の階数

定理 4.2

$A=(a_{ij})\in M(m,n)$ に有限回の基本変形を行って

$$I(r)=\begin{array}{cc} \overbrace{}^{r} & \overbrace{}^{n-r} \end{array}\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \}r \\ \}m-r \end{array}$$

と変形できる。ここで r は基本変形の仕方に依らない整数であり、行列 A の**階数**といい、$r=\mathrm{rank}(A)$ と表わす。

注意

$$A=(a_{ij})=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n)\in M(m,n),\quad \mathbf{a}_1=\begin{pmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix},\ \mathbf{a}_2=\begin{pmatrix} a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{m2}\end{pmatrix},\cdots,\ \mathbf{a}_n=\begin{pmatrix} a_{1n}\\ a_{2n}\\ \vdots\\ a_{mn}\end{pmatrix}$$

に対して**階数(rank)**とは $\{\mathbf{a}_i\}_{i=1,\cdots,n}$ のうち1次独立なベクトルの個数である。

手順

$$A\xrightarrow{\text{(i) 基本変形}} B(r)=\left(\begin{array}{c|c} I_r & C \\ \hline 0 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{\text{(ii) 列基本変形}}\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{\text{(iii)}} r\text{ が }A\text{ のみに依ること}$$

証明) (i) $A=O$ のとき $B(0)=A$ で自明。このとき基本変形に関係なく $r=0$。

例) $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

そこで $A\neq O$ とする。このとき a_{ij} で 0 でないものがあるので、たとえ $a_{11}=0$ であっても基本変形後に $(1,1)$ 成分が 0 でないようにとることができる。よって、以下では $a_{11}\neq 0$ とする。

まず第1行を $\frac{1}{a_{11}}$ 倍して

$$A\sim\begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

次に第1行に a_{21} を掛けて第2行から引くことにより $(2,1)$ 成分を 0 に。

$$A\sim\begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}}\\ 0 & a_{22}-\frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21} & \cdots & a_{2n}-\frac{a_{1n}}{a_{11}}a_{21}\\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

繰り返して $(i,1)$ $(3\leq i\leq m)$ 成分も 0 に。

$$A\sim\begin{pmatrix} 1 & a_{12}' & \cdots & a_{1n}'\\ 0 & a_{22}' & \cdots & a_{2n}'\\ 0 & a_{32}' & \cdots & a_{3n}'\\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{m2}' & \cdots & a_{mn}'\end{pmatrix}$$

今度は第二行に $\frac{1}{a'_{22}}$ を掛けて（但し $a'_{22}\neq 0$ とした．）

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & \boxed{a'_{12}} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & a'_{2n}/a'_{22} \\ 0 & a'_{32} & \cdots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

先と同様にこの部分を0にできる.
（※）

結局、基本変形後に

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & a''_{13} & \cdots & a''_{1n} \\ 0 & 1 & a''_{23} & \cdots & a''_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{m3} & \cdots & a''_{mn} \end{pmatrix}$$

となる。同様の変形を対角成分が0になるまで行う。

$$A \sim \begin{pmatrix} I_r & & a'''_{1\,r+1} & \cdots & a'''_{1n} \\ & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & & \\ & \vdots & a'''_{r+2\,r+1} & 0 & \\ & & & & \ddots \\ 0 \cdots & 0 & a'''_{m\,r+1} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

この部分は行の交換によりすでに0となっている
0でなかったとすると行の入れ替えで

$$\begin{pmatrix} I_r & & a'''_{1\,r+1} & \cdots & a'''_{1n} \\ & & \vdots & & \vdots \\ & 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & a'''_{r+2\,r+1} & 0 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ 0 \cdots & 0 & a'''_{m\,r+1} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} I_r & & a'''_{1\,r+1} & \cdots & a'''_{1n} \\ & & \vdots & & \vdots \\ & 0 & a'''_{r+2\,r+1} & 0 & \\ \vdots & 0 & 0 & a'''_{r+1\,r+2} & \\ & \vdots & \vdots & & \ddots \\ 0 \cdots & 0 & a'''_{m\,r+1} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

と(r+1, r+1)成分が0でなくなる. これはおかしい.

従って

$$A''' = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{r} & \overbrace{\quad}^{n-r} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} I_r & C \\ \hline O & O \end{array}\right) \begin{array}{l} \}r \\ \}m-r \end{array} \end{array}$$

と変形できた。

(ii)

$$A \sim B(r) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & \begin{matrix} a_{1\,r+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{r\,r+1} & \cdots & a_{rn} \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

次の列基本変形を考える

$$B(r) \sim \left(\begin{array}{c|c} I_r & \begin{matrix} a_{1\,r+1} & \cdots & a_{1\,r+j-1} & 0 & a_{1\,r+j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{r\,r+1} & \cdots & a_{r\,r+j-1} & 0 & a_{r\,r+j+1} & \cdots & a_{rn} \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \quad (1 \leq j \leq n-r)$$

（j-列）

$$\therefore\ A \sim B(r) \sim I(r) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{r} & \overbrace{\quad}^{n-r} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right) \begin{array}{l} \}r \\ \}m-r \end{array} \end{array}$$

(iii) 最後に r が 唯一に決まることをみる.

そのために 他の有限回の基本変形を行い $I(p)$ が得られたとする.
すると $I(p) = P\,I(r)\,Q$ を満たす ある m次正則行列P, n次正則行列Q が存在する.

ここで

$$P = \begin{array}{cc} \overbrace{\phantom{P_{11}}}^{r} & \overbrace{\phantom{P_{12}}}^{m-r} \\ \end{array}\! \left(\begin{array}{c|c} P_{11} & P_{12} \\ \hline P_{21} & P_{22} \end{array}\right), \quad Q = \begin{array}{cc} \overbrace{\phantom{Q_{11}}}^{r} & \overbrace{\phantom{Q_{12}}}^{n-r} \\ \end{array}\! \left(\begin{array}{c|c} Q_{11} & Q_{12} \\ \hline Q_{21} & Q_{22} \end{array}\right)$$

と書いておくと

$$I(p) = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & O \\ P_{21} & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}Q_{11} & P_{11}Q_{12} \\ P_{21}Q_{11} & P_{21}Q_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

ここで $r < s$ として一般性を失うことはない.

$$P_{11}Q_{11} = I_r, \quad P_{11}Q_{12} = O, \quad P_{21}Q_{11} = O, \quad P_{21}Q_{12} \neq O$$

P_{11}, Q_{11} は正則行列で逆行列が存在

$$Q_{12} = P_{11}^{-1}\,O = O$$

$$P_{21} = O\,Q_{11}^{-1} = O$$

$$P_{21}\,Q_{12} = O$$

矛盾 $\Rightarrow r = p$

□

- 定義から明らかなように $r \leq m$ かつ $r \leq n$
- rank(A)は

階段行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & & \\ 0 & & \ddots\ a_{rr} & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ の形まで変形できればわかる.

定理4.3

$A \in M(n,n)$ が正則 $\iff$ $\mathrm{rank}(A) = n$

証明)

$\Rightarrow$) $\mathrm{rank}(A) = r < n$ とする. すると n次のある正則行列 P, Q が存在して

$$I(r) = PAQ$$

が成り立つ. そして PAQ も正則であるから定理3.10より

$$|PAQ| \neq 0$$

一方で $|I(r)| = 0$. これは

r<nとしているので

$$|I(r)| = |PAQ|$$

であることと矛盾. したがって $r = n$.

$\Leftarrow$) $I(r) = I_n$. よって $PAQ = I_n$. そして $A = P^{-1}Q^{-1}$ と正則行列の積としてAが書けるので, Aは正則である.

□

系

$A \in M(n,n)$ が正則 $\iff$ $A \sim I_n$

∵ 定理の証明過程から

$$I_n = PAQ$$

が成り立つことがわかっている. ここで P, Q はn次正則行列. //

§§4-3 連立1次方程式の解法

$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$, $A=(a_{ij})\in M(m,n)$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m$ —(4.3.1)

係数行列

$$\tilde{A}\equiv(A,\mathbf{b})=(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n,\mathbf{b})\in M(m,n+1)$$: 拡大係数行列 —(4.3.2)

さて $\tilde{A}$ に行基本変形を行うと

$$\tilde{B}=P\tilde{A}=(PA,P\mathbf{b})=(B,\mathbf{c}) \quad \text{—(4.3.3)}$$

ここで P はある m次正則行列。また

$$B=PA,\ \mathbf{c}=P\mathbf{b}\ (\text{逆に } A=P^{-1}B,\ \mathbf{b}=P^{-1}\mathbf{c}) \quad \text{—(4.3.4)}$$

とおいた。$\tilde{B}$ に対応する連立1次方程式は

$$B\mathbf{x}=\mathbf{c} \quad \text{—(4.3.5)}$$

であるが、(4.3.1)の解とこの解は一致する。

∵ $A\mathbf{x}=\mathbf{b}\longrightarrow PA\mathbf{x}=P\mathbf{b}\rightarrow B\mathbf{x}=\mathbf{c}$

$B\mathbf{x}=\mathbf{c}\longrightarrow P^{-1}B\mathbf{x}=P^{-1}\mathbf{c}\rightarrow A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ //

よって $\tilde{B}$ の具体形が簡単な形にとっておけば、式(4.3.5)は簡単に解け式(4.3.1)の解が容易に得られる。

定理4.4

(i) (4.3.1)が解をもつ $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(\tilde{A})$。

特に

(ii) 解が唯一 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(\tilde{A})=n$

証明) $\tilde{A}$ に行基本変形を行って

$$\tilde{A}\sim\tilde{B}=\left(\underbrace{\begin{matrix}\overbrace{I_r}^{r} & \overbrace{*}^{n-r}\\ O & O\end{matrix}}_{B}\;\middle|\;\begin{matrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_r\\ \beta_{r+1}\\ \vdots\\ \beta_m\end{matrix}\right)\begin{matrix}\}\,r\\ \}\,m-r\end{matrix}$$

とできる。方程式は $B\mathbf{x}=\boldsymbol{\beta}$, $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}$ を解くことと等価であるが

$\beta_{r+1},\cdots,\beta_m$ のなかで 0でないものがあれば

$(m-r)\times(n-r)\rightarrow O\,\mathbf{x}^{(-)}=\boldsymbol{\beta}^{(-)}$, $\mathbf{x}^{(-)}=\begin{pmatrix}x_{r+1}\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}^{(-)}=\begin{pmatrix}\beta_{r+1}\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}$

から明らかなように解は持たない。よって $\beta_{r+1}=\cdots=\beta_m=0$ であれば解をもつ。

従って $\mathrm{rank}(\tilde{B})=\mathrm{rank}(\tilde{A})=\mathrm{rank}(A)$。逆は上の議論から明らか。

$\boldsymbol{\beta}^{(-)}=\mathbf{0}$ のとき、$\mathrm{rank}(A)<n$ とすると解が唯一に定まらない。$\Longleftrightarrow$ $\mathbf{x}^{(-)}$が勝手

従って $\mathrm{rank}(A)=n$ のときに限り解が唯一に定まる。 □

同次または斉次連立1次方程式

$$Ax = \mathbb{0} \quad (A \in M(m,n),\ x \in \mathbb{R}^n,\ \mathbb{0} \in \mathbb{R}^m) \quad —(4.3.6)$$

これは自明な解

$$x = \mathbb{0}$$

をもつ.

定理4.5

(4.3.6)が自明ではない解をもつ $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A) < n$.

証明)

定理4.4

(4.3.6)が自明ではない解をもつ $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(\tilde{A})$

もし $\mathrm{rank}(A) = n$ の場合, 唯一解が存在し, 今の場合自明な解である.

従って $\mathrm{rank}(A) < n$.

□

定理4.6

$m=n$ のとき, (4.3.6)の解は自明な解のみ $\Longleftrightarrow$ Aは正則 $\Longleftrightarrow$ $|A| \neq 0$

例）

$$\begin{pmatrix}1&5&-13&5\\2&5&-11&5\\-1&7&-23&3\\3&1&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\13\\17\end{pmatrix}$$

基本変形で0に。

$$\hat{A}=\begin{pmatrix}1&5&-13&5&3\\2&5&-11&5&6\\-1&7&-23&3&13\\3&1&3&-1&17\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{(4行)-3(1行)}]{\substack{(2行)-(1行)\times 2\\(3行)+(1行)}}\begin{pmatrix}1&5&-13&5&3\\0&-5&15&-5&0\\0&12&-36&8&16\\0&-14&42&-16&8\end{pmatrix}$$

約分できるものを整理

0に。

$$\xrightarrow[\substack{(4行)\times(-\frac{1}{2})}]{\substack{(2行)\times(-\frac{1}{5})\\(3行)\times\frac{1}{4}}}\begin{pmatrix}1&5&-13&5&3\\0&1&-3&1&0\\0&3&-9&2&4\\0&7&-21&8&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{(4行)-7(2行)}]{\substack{(1行)-5(2行)\\(3行)-3(2行)}}\begin{pmatrix}1&0&2&0&3\\0&1&-3&1&0\\0&0&0&-1&4\\0&0&0&1&-4\end{pmatrix}$$

入れ替え

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&2&3\\0&1&1&-3&0\\0&0&-1&0&4\\0&0&1&0&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{1に}\begin{pmatrix}1&0&0&2&3\\0&1&1&-3&0\\0&0&1&0&-4\\0&0&1&0&-4\end{pmatrix}$$

0に。

$$\xrightarrow[(4行)-(3行)]{(2行)-(3行)}\begin{pmatrix}1&0&0&2&3\\0&1&0&-3&4\\0&0&1&0&-4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

以上より

$$\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-3\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_4\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\-4\\0\end{pmatrix}$$ を解けばよい。

途中で第3列と4列の入れ替えを行っているので。

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}x_1+2x_3=3\\x_2-3x_3=4\\x_4=-4\\0\cdot x_3=0\end{cases}$$

$\therefore\ x_3=c$（任意定数）

$\therefore\ x_1=3-2c,\ x_2=4+3c,\ x_3=c,\ x_4=-4$

§§4-4 逆行列の計算

A : n次の正則行列

$$PAQ = I_n$$

$$QPA\underbrace{QQ^{-1}}_{=I_n} = QI_nQ^{-1} = QQ^{-1} = I_n$$

$$\therefore QPA = I_n$$

$$\therefore A^{-1} = QP$$

また $(QP)I_n = A^{-1}I_n = A^{-1}$

左から掛けているので

即ち、I_n を行基本変形することで A^{-1} が得られる。

具体的には $(n, 2n)$ 行列 (A, I_n) を行基本変形を施し

$$(A, I_n) \sim (QPA, QPI_n) = (I_n, A^{-1})$$

となるまで変形すれば A^{-1} が求められる。

例)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 8 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow (A, I_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0に

1にしたいため第4行を加える

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -17 & 7 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -14 & 8 & -8 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0にするため(第2行)×2を加える

1にするため8倍し第4行目を引く

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -14 & 8 & -8 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -25 & 17 & -16 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -14 & 8 & -8 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -8 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & -25 & 17 & -16 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

0にするため(第3行)×25を加える

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -14 & 8 & -8 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -8 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -216 & -48 & 200 & -72 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -14 & 8 & -8 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -8 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 27 & 6 & -25 & 9 \end{pmatrix}$$

1にするため$\left(-\frac{1}{8}\right)$を掛ける

0にするため"−(第3行)×2 −(第4行)"を加える

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -10 & -2 & 9 & -3 \\ 0 & 1 & -14 & 8 & -8 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -8 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 27 & 6 & -25 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -10 & -2 & 9 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 42 & 9 & -38 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -8 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 27 & 6 & -25 & 9 \end{pmatrix}$$

0にするため"(第3行)×14 +(第4行)×6"を加える

0にするため第4行を加える

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -10 & -2 & 9 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 42 & 9 & -38 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 19 & 4 & -17 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 27 & 6 & -25 & 9 \end{array}\right) = (I_4, A^{-1})$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & -2 & 9 & -3 \\ 42 & 9 & -38 & 13 \\ 19 & 4 & -17 & 6 \\ 27 & 6 & -25 & 9 \end{pmatrix}$$