線形代数学 I

§1. 平面・空間のベクトル
§2 行列
§3 行列式
§4 行列の基本変形と連立一次方程式

線形代数学 II

§5 線形空間
§6 線形写像
§7 固有値と固有ベクトル

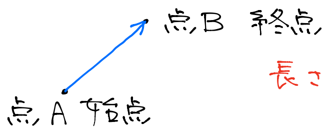
参考書　茂木勇, 横手一郎.「基礎 線形代数」裳華房

自然科学全般の基礎"言語"の1つ　　微積、線形代数, …
定量化, 数式化 の道具

§1 平面・空間のベクトル ～線形空間の身近な例～

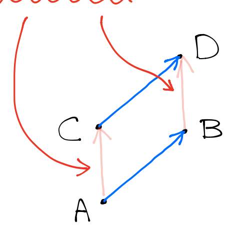
§§1-1 ベクトル

・平面，空間において　　　ベクトル $\overrightarrow{AB}$



長さと向きをもつ。　　長さを $\|\overrightarrow{AB}\|$ で表わす。

・平行移動して重なるベクトル同士は等しいという。



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$　　と表記する。

・ベクトルの表記　太字を用いることが多い。

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \cdots, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \cdots$ など。

・逆ベクトル

$\overrightarrow{BA}$ は $\overrightarrow{AB}$ の逆ベクトルという。　大きさが同じ　向きは逆。

ベクトル $\mathbf{a}$ の逆ベクトルを $-\mathbf{a}$ と表わす。したがって

$$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$$

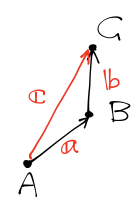
・ベクトルの加法・減法

2つのベクトル　$\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$，　$\mathbf{b}=\overrightarrow{BC}$

$\mathbf{c}:=\overrightarrow{AC}$ を $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の和と定義する。そして

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$$

と書く。



次の性質が成り立つ

交換法則　$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$

結合法則　$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

・零ベクトル

$\mathbb{a} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow -\mathbb{a} = \overrightarrow{BA}$

$\therefore\ \mathbb{a} + (-\mathbb{a}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \mathbb{0}$　零ベクトル

大きさ0のベクトル

次の性質をもつ.

$\|\mathbb{0}\| = 0,\quad \mathbb{a} + \mathbb{0} = \mathbb{a},\quad \mathbb{a} + (-\mathbb{a}) = \mathbb{0}$

・差

$\mathbb{a} + (-\mathbb{b}) = \mathbb{a} - \mathbb{b}$ と書き. これを $\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ の差という.

・ベクトルの実数倍

$m\mathbb{a}$　m…実数　$\mathbb{a}$…ベクトル

定義 (1) $\mathbb{a} \neq \mathbb{0}$ のとき

(i) $m > 0$ ならば、$m\mathbb{a}$ は $\mathbb{a}$ と同じ向きで、大きさが $m\|\mathbb{a}\|$ のベクトル

(ii) $m < 0$ ならば、$m\mathbb{a}$ は $\mathbb{a}$ と反対向きで、大きさが $|m|\|\mathbb{a}\|$ のベクトル.

m の絶対値!

(iii) $m = 0$ ならば. 零ベクトル.

(2) $\mathbb{a} = \mathbb{0}$ のとき. $m\mathbb{a}$ は零ベクトル.

次の性質が成り立つ.

結合法則　$(mn)\mathbb{a} = m(n\mathbb{a})$

分配法則 I　$(m+n)\mathbb{a} = m\mathbb{a} + n\mathbb{a}$

分配法則 II　$m(\mathbb{a} + \mathbb{b}) = m\mathbb{a} + m\mathbb{b}$

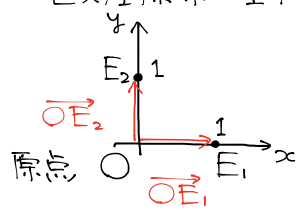
・単位ベクトル　大きさが 1

$\mathbb{a} \neq \mathbb{0}$ のとき　$\mathbb{e} := \dfrac{\mathbb{a}}{\|\mathbb{a}\|}$ は単位ベクトル.

§§1-2 座標系とベクトル

(i) 平面上

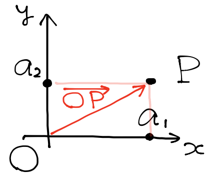
・直交座標系と基本ベクトル



$\overrightarrow{OE_1} = \mathbb{e}_1$: x軸方向の基本ベクトル
$\overrightarrow{OE_2} = \mathbb{e}_2$: y 〃

$$\|\mathbb{e}_1\| = \|\mathbb{e}_2\| = 1$$

∘位置ベクトル



$\mathbb{a} = \overrightarrow{OP}$ を点Pの位置ベクトルと呼ぶ。

$\mathbb{a} = a_1\mathbb{e}_1 + a_2\mathbb{e}_2$
a_1…x成分, a_2…y成分

$$\|\mathbb{a}\| = \|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ とも書く（$\mathbb{a}$の成分表示）.

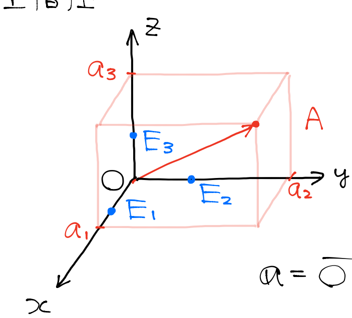
例） $\mathbb{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2つのベクトル $\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対して

$$\mathbb{a} = \mathbb{b} \iff a_1 = b_1,\ a_2 = b_2$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix},\ m\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma_1 \\ ma_2 \end{pmatrix}$$

(ii) 空間上



$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{OE_1} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbb{e}_1 \\ \overrightarrow{OE_2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbb{e}_2 \\ \overrightarrow{OE_3} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbb{e}_3 \end{aligned}\right\} \text{基本ベクトル}$$

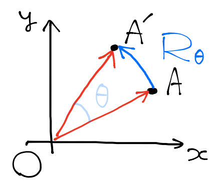
$$\mathbb{a} = \overrightarrow{OA} = a_1\mathbb{e}_1 + a_2\mathbb{e}_2 + a_3\mathbb{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i\mathbb{e}_i = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}_{\mathbb{a}\text{の成分表示}}$$

$$\|\mathbb{a}\| \underset{\text{ピタゴラスの定理}}{=} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

2つのベクトル $\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対して

$$m\mathbb{a} + n\mathbb{b} = m\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma_1 + nb_1 \\ ma_2 + nb_2 \\ ma_3 + nb_3 \end{pmatrix}$$

§§1-3 回転運動



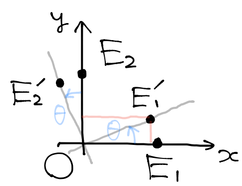
原点を中心とする平面 O-xy 内の回転運動
ベクトルの長さを保つ.

$$\overrightarrow{OA'} = R_\theta(\overrightarrow{OA})$$

次の性質が成り立つ[回転運動の線形性]

$$R_\theta(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = R_\theta(\mathbf{a}) + R_\theta(\mathbf{b})$$
$$R_\theta(m\mathbf{a}) = mR_\theta(\mathbf{a})$$

・基本ベクトルの回転運動



$$\overrightarrow{OE_1'} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} = R_\theta(\overrightarrow{OE_1}) = R_\theta(\mathbf{e}_1)$$
$$\overrightarrow{OE_2'} = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} = R_\theta(\overrightarrow{OE_2}) = R_\theta(\mathbf{e}_2)$$

任意のベクトル $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ に対して

$$R_\theta\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = R_\theta(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2)$$
$$= xR_\theta(\mathbf{e}_1) + yR_\theta(\mathbf{e}_2)$$
$$= x\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}x\cos\theta - y\sin\theta\\ x\sin\theta + y\cos\theta\end{pmatrix}$$

回転はこの2つのベクトルによって記述されている。

表にまとめると

$$\left(\begin{array}{cc}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{array}\right)$$
$$\begin{array}{cc}\updownarrow & \updownarrow\\ R_\theta(\mathbf{e}_1) & R_\theta(\mathbf{e}_2)\end{array}$$

行列とよぶ.

$$\therefore \boxed{R_\theta\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\cos\theta - y\sin\theta\\ x\sin\theta + y\cos\theta\end{pmatrix}} \quad \text{—(1.3.1)}$$

一般に, 表 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ を行列という(今の場合, 2次の正方行列)

行列 $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ とベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ に対して 積 を次のように定義する.

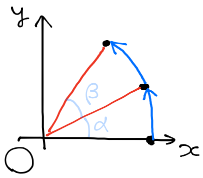
$$\boxed{A\mathbf{x} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax+by\\ cx+dy\end{pmatrix}} \quad \text{—(1.3.2)}$$

(1.3.1)は

$$R_\theta\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

と表わされる.

・回転の合成



$$R_{\alpha+\beta}(\mathbf{e}_1) = R_\beta(R_\alpha(\mathbf{e}_1))$$

$$R_{\alpha+\beta}(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \quad —(1.3.3)$$

一方で $R_{\alpha+\beta}(\mathbf{e}_1) = R_\beta(R_\alpha(\mathbf{e}_1)) = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$ −(1.3.4)

(1.3.3), (1.3.4)より

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \end{cases}$$ (三角関数の加法公式)

・1次変換

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 平面上のベクトル $\boldsymbol{x}$

写像 $f: \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ [1次変換]

fは以下の性質を満足する.

$$\begin{cases} f(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b}) \\ f(m\mathbf{a}) = m f(\mathbf{a}) \end{cases}$$

例えば

$$f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

・行列の積

ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$

$$B(A\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (pa+qc)x + (pb+qd)y \\ (ra+sc)x + (rb+sd)y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} pa+qc & pb+qd \\ ra+sc & rb+sd \end{pmatrix}}_{\text{行列}}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{ベクトル}}$$

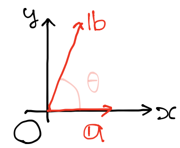
そこで

$$\boxed{BA = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa+qc & pb+qd \\ ra+sc & rb+sd \end{pmatrix}}$$

と積を定義する。すると

$$B(A\boldsymbol{x}) = BA\boldsymbol{x}$$

§§1-4 内積



定義　$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle\equiv a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}$$

座標系を上手に選ぶと一般性を失うことなく図のようになる。このとき

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}a_1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\|\mathbf{a}\|\\0\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\|\mathbf{b}\|\cos\theta\\\|\mathbf{b}\|\sin\theta\\0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\theta}$$

性質

(i) $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ または $\mathbf{b}=\mathbf{0}$ のとき $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$

(ii) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$

(iii) $-1\leq\cos\theta\leq 1$ なので $-\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\leq\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\leq\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|$

(iv) $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ のとき $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=\|\mathbf{a}\|^2$

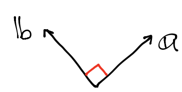
(v) ベクトル $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}',\mathbf{b}'$，実数 k に対して

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{b}')=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}'$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{a}')\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}$$

$$(k\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=k(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$$

幾何学的意味



$\mathbf{a},\mathbf{b}$ のが直交しているとき $\cos\theta=0$

$\therefore\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$

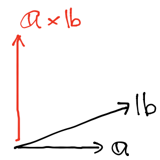
逆に、$\mathbf{a}\neq\mathbf{0},\ \mathbf{b}\neq\mathbf{0}$ のとき、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ ならばベクトル $\mathbf{a},\mathbf{b}$ は直交する。

§§1-5 外積

2つの空間のベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ に対して外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を

$$\boxed{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\equiv\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}}$$

と定義する.



性質

(i) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に直交している.

(ii) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$

(iii) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすれば $\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\||\sin\theta|$

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が張る平行四辺形の面積

(iv) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$

(v) $(k\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=k(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(k\boldsymbol{b})$

(vi) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$

∵

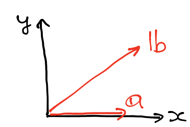
(i)

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=a_1(\cancel{a_2b_3}-\cancel{a_3b_2})+a_2(\cancel{a_3b_1}-\cancel{a_1b_3})+a_3(\cancel{a_1b_2}-\cancel{a_2b_1})=0$$

(ii)

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}b_2a_3-b_3a_2\\b_3a_1-b_1a_3\\b_1a_2-b_2a_1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

(iii) x, y 軸を上手に選ぶと



$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\|\boldsymbol{a}\|\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta\\\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta\\0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\0\\a_1b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\||\sin\theta|$$

(iv)

(ii)より $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})$. よって, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ //

(v), (vi) 自明

レビ・チビタ記号

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} 1 & (i=1,\ j=2,\ k=3 \text{ あるいはその偶置換}) \\ -1 & (i=1,\ j=2,\ k=3 \text{ からの奇置換}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

具体的には $\varepsilon_{123}=1,\ \ \varepsilon_{231}=1,\ \ \varepsilon_{213}=-1,\ \ \varepsilon_{112}=0,\ \cdots$

$\mathbb{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \mathbb{e}_i,\ \mathbb{b} = \sum_{i=1}^{3} b_i \mathbb{e}_i$ に対して、外積 $\mathbb{a} \times \mathbb{b} = \sum_{i=1}^{3} (\mathbb{a} \times \mathbb{b})_i \mathbb{e}_i$ の成分 $(\mathbb{a} \times \mathbb{b})_i$ $(i=1,2,3)$ は

$$\boxed{(\mathbb{a} \times \mathbb{b})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_j b_k}$$

と書くことができる.

$$\because \quad (\mathbb{a} \times \mathbb{b})_1 = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{1jk} a_j b_k = \underbrace{\varepsilon_{123}}_{=1} a_2 b_3 + \underbrace{\varepsilon_{132}}_{=-1} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

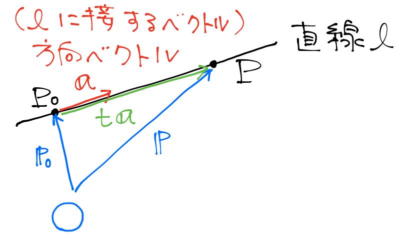
$$(\mathbb{a} \times \mathbb{b})_2 = \underbrace{\varepsilon_{231}}_{=1} a_3 b_1 + \underbrace{\varepsilon_{213}}_{=-1} a_1 b_3 = a_3 b_1 - a_1 b_3$$

$$(\mathbb{a} \times \mathbb{b})_3 = \underbrace{\varepsilon_{312}}_{=1} a_1 b_2 + \underbrace{\varepsilon_{321}}_{=-1} a_2 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

//

§§1-6 直線と平面の方程式

・直線の方程式



空間の1点P_0を通り、方向ベクトル$\mathbf{a}$である直線ℓ上で

$$\boxed{\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + t\,\mathbf{a}}$$ (直線の方程式)

が成り立つ。ここで$\mathbf{p}_0$は点P_0の位置ベクトル、$\mathbf{p}$はℓ上の任意の点Pの位置ベクトル、tは実数である。
パラメータと呼ばれる。

座標表示

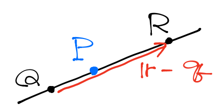
$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ \mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},\ \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0+ta \\ y_0+tb \\ z_0+tc \end{pmatrix} \rightarrow t = \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

2つの等式

⇒ 3(次元) − 2 = 1(次元)

⇔ 線



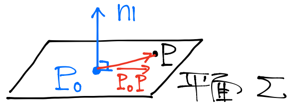
異なる2点Q, Rを通る直線ℓの方程式は

$$\mathbf{p} = \mathbf{q} + t(\mathbf{r} - \mathbf{q})$$

と書ける。ここで$\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$はそれぞれ点Q, Rの位置ベクトル、$\mathbf{p}$はℓ上の任意の点Pの位置ベクトル、tは実数である。

∵ 直線ℓの方向ベクトルが$\mathbf{r} - \mathbf{q}$で与えられることから自明。//

◦平面の方程式



$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とする. 法線ベクトル

$P_0 \ (x_0, y_0, z_0)$

$P \ (x, y, z)$ … 平面Σ上の任意の点

$\mathbf{n}$ と $\overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$ は垂直なので

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

$$\therefore \boxed{a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0}$$ (平面の方程式)

逆に, x, y, z の1次方程式

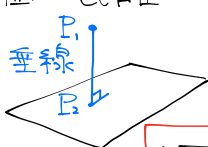
$$ax + by + cz + d = 0$$ 1つの等式 ⇒ 3(次元) − 1 = 2(次元) ⇔ 面

は平面を表わす.

∵ $c \neq 0$ とすると $ax + by + c\left(z + \frac{d}{c}\right) = 0$

これは $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = -\frac{d}{c}$ を通る $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ に垂直な平面.

◦点と平面の距離



平面Σ: $ax + by + cz + d = 0$

$$\boxed{\|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

∵ 法線ベクトル $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. 明らかに $\overrightarrow{P_1P_2} = t\mathbf{n}$. ここで t はパラメータ

として $P_2 : (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + ta, y_1 + tb, z_1 + tc)$

このtを決めたい!

P_2 はΣ上にあるので

$$ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0$$

$$\therefore a(x_1 + ta) + b(y_1 + tb) + c(z_1 + tc) + d = 0$$

$$\therefore t = -\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\therefore \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = |t| \|\mathbf{n}\| = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad //$$

平面Σが原点 $(O : (0, 0, 0))$ を通る場合, $d = 0$ なので

$$\boxed{\|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OP_1}|}{\|\mathbf{n}\|}}$$

となる.

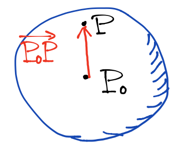
・球面の方程式

点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ を中心にもつ半径 a の球面 S 上の点 $P(x, y, z)$ を考えると明らかに

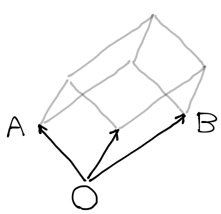
$$\|\overrightarrow{P_0P}\| = a$$

が成り立つ(球面の方程式)。或いは

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2$$



・平行六面体の体積



$\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c}=\overrightarrow{OC}$ が張る平行六面体の体積は

$$\boxed{V=|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}|}$$

∵ $S :=$ ($\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が張る平行四辺形の面積) $= \|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|$

$l :=$ (点 C から OAB を通る平面まで下ろした垂線の距離)

$$\underset{\mathbf{n}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{=} \frac{|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}|}{\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|}$$

$$\therefore V = Sl = |(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}| \quad /\!/$$

・行列式 $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$, $\mathbf{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \sum_{i=1}^{3}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_i c_i = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}a_j b_k\right)c_i = \sum_{i,j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}c_i a_j b_k$$

$$= (a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3$$

この式を

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{または} \quad |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}| \quad (\text{3次の行列式})$$

と表わす

§§1-7 数ベクトルと1次独立性

□ n項数ベクトル　"空間ベクトルの一般化" ⇝ n次元空間
本当の空間である必要なし

定義

- n項数ベクトル … n個の実数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を順序づけて並べた組
- n項列ベクトル … $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 成分　縦に並べた組
- n項行ベクトル … $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 横に並べた組
- n項数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ … n項列ベクトル全体の集合

ここで、単なる実数はスカラーという。

ベクトルの演算

(i) 和と差　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ に対して

和 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \equiv \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$, 差 $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \equiv \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{pmatrix}$

(ii) スカラー倍　$k \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$k\boldsymbol{x} \equiv \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ \vdots \\ kx_n \end{pmatrix}$$

特に、$k=-1$ のとき $-\boldsymbol{x}$ と表わす。また $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ と表わし、これを
n項零ベクトルという。

(iii) $h, k \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$$
$$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$$
$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = (-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$
$$k(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = k\boldsymbol{x} + k\boldsymbol{y}$$
$$(h+k)\boldsymbol{x} = h\boldsymbol{x} + k\boldsymbol{x}$$
$$(hk)\boldsymbol{x} = h(k\boldsymbol{x})$$
$$1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$$

が成立つ。

□ 1次独立性

・1次結合

定義　$k_1, k_2, \cdots, k_r \in \mathbb{R}$,　$v_1, v_2, \cdots, v_r \in \mathbb{R}^n$

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_r v_r$$

を数ベクトル $v_1, v_2, \cdots, v_r$ の1次結合という

・1次独立と1次従属

定義　$k_1, k_2, \cdots, k_r \in \mathbb{R}$,　$v_1, v_2, \cdots, v_r \in \mathbb{R}^n$

$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_r v_r = \mathbb{0}$ が成り立つとする。このとき

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$$

の場合のみであるとき、$\{v_1, \cdots, v_r\}$ は1次独立であるという。

1次独立でない場合、1次従属であるという。

注）$\{v_1, v_2, \cdots, v_r, v_{r+1}\}$: 1次独立 $\Rightarrow \{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$: 1次独立

$\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$: 1次従属 $\Rightarrow \{v_1, v_2, \cdots, v_r, v_{r+1}\}$: 1次従属

例）空間のベクトル

基本ベクトル $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ は1次独立

例）$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}$

(i) $\{v_1, v_2\}$ は1次独立である。

$\because$ $k_1 v_1 + k_2 v_2 = \mathbb{0}$ とする。

$$k_1 \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k_1 + k_2\\2k_1 + 3k_2\\3k_1 + 5k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

容易に $k_1 = k_2 = 0$ となることが示される //

(ii) $\{v_1, v_2, v_3\}$ は1次従属である。

$\because$ $k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = \mathbb{0}$ とする。

$$\begin{pmatrix}k_1 + k_2 + 4k_3\\2k_1 + 3k_2 + 3k_3\\3k_1 + 5k_2 + 2k_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \begin{matrix}—①\\—②\\—③\end{matrix}$$

①×3−② より　$k_1 + 9k_3 = 0$

②×3−③×2 より　$-k_2 + 5k_3 = 0$

$\rightarrow k_1 = -9k_3,\ k_2 = 5k_3$

このとき、任意の $k_3 \neq 0$ に対して①〜③は成り立つ。よって非自明な $k_1 \sim k_3$ が存在 //

定理1.1 $r(\geq 2)$個のベクトル $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \cdots, \mathbb{v}_r$ が1次従属

$\Longleftrightarrow$ 少なくとも1個のベクトルを、残りの $r-1$ 個のベクトルの1次結合として表わされる。

証明 $\Rightarrow$) $k_1\mathbb{v}_1 + k_2\mathbb{v}_2 + \cdots + k_r\mathbb{v}_r = \mathbb{0}$ を満たす係数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ の中で0でないものが存在する。そこで $k_r \neq 0$ としよう。すると

$$\mathbb{v}_r = -\frac{k_1}{k_r}\mathbb{v}_1 - \frac{k_2}{k_r}\mathbb{v}_2 - \cdots - \frac{k_{r-1}}{k_r}\mathbb{v}_{r-1}$$

$\Leftarrow$) $\mathbb{v}_r = l_1\mathbb{v}_1 + l_2\mathbb{v}_2 + \cdots + l_{r-1}\mathbb{v}_{r-1} \quad (l_1, l_2, \cdots, l_{r-1} \in \mathbb{R})$

$\therefore l_1\mathbb{v}_1 + l_2\mathbb{v}_2 + \cdots + l_{r-1}\mathbb{v}_{r-1} + (-1)\mathbb{v}_r = \mathbb{0}$

□

定理1.2 r個のベクトル $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \cdots, \mathbb{v}_r$ が1次独立であるとする。このとき $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \cdots, \mathbb{v}_r, \mathbb{p}$ が1次従属になるならば、$\mathbb{p}$ は $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \cdots, \mathbb{v}_r$ の1次結合として唯一に表わされる。

証明

$$k_1\mathbb{v}_1 + k_2\mathbb{v}_2 + \cdots + k_r\mathbb{v}_r + k\mathbb{p} = \mathbb{0}$$

を満たす少なくとも1つは0でない $r+1$ 個の係数の組 $k_1, k_2, \cdots, k_r, k$ が存在。ここで $k=0$ とすると仮定より $k_1 = k_2 = \cdots = k = 0$ となり、1次従属であることに反する。よって $k \neq 0$ としてよい。すると

$$\mathbb{p} = \left(-\frac{k_1}{k}\right)\mathbb{v}_1 + \left(-\frac{k_2}{k}\right)\mathbb{v}_2 + \cdots + \left(-\frac{k_r}{k}\right)\mathbb{v}_r$$

と $\mathbb{v}_1, \cdots, \mathbb{v}_r$ の1次結合で書ける。次に

$$\mathbb{p} = l_1\mathbb{v}_1 + \cdots + l_r\mathbb{v}_r, \quad \mathbb{p} = m_1\mathbb{v}_1 + \cdots + m_r\mathbb{v}_r$$

と2通り書けたとする。両辺の差をとると

$$(l_1 - m_1)\mathbb{v}_1 + \cdots + (l_r - m_r)\mathbb{v}_r = \mathbb{0}$$

1次独立性より

$$l_1 = m_1, \cdots, l_r = m_r$$

よって唯一。

□

空間のベクトルと1次独立性 ～幾何学的意味～

3次元

$$\mathbb{a} = \overrightarrow{OA},\ \mathbb{b} = \overrightarrow{OB},\ \mathbb{c} = \overrightarrow{OC}$$

定理1.3

(i) 2個のベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{b}$ が1次従属 $\Longleftrightarrow$ 3点 O, A, B が同一直線上にある.

(ii) 3個のベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}$ が1次従属 $\Longleftrightarrow$ 4点 O, A, B, C が同一平面上にある.

証明) (i) $\mathbb{a}, \mathbb{b}$ が1次従属 $\Longleftrightarrow \exists k (\neq 0) \in \mathbb{R}$ s.t. $\mathbb{a} = k\mathbb{b}$

$\Longleftrightarrow$ 3点 O, A, B が が同一直線上にある.

(ii) $\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}$ が1次従属 $\Longleftrightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ s.t. $\mathbb{a} = k_1\mathbb{b} + k_2\mathbb{c}$

$\Longleftrightarrow$ 4点 O, A, B, C が同一平面上にある. □

系

(i) 2個のベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{b}$ が1次独立 $\Longleftrightarrow$ 3点 O, A, B は同一直線上にない.

(ii) 3個のベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}$ が1次独立 $\Longleftrightarrow$ 4点 O, A, B, C は同一平面上にない.

定理1.4

空間で4個以上のベクトルの組は常に1次従属である.

証明) $\mathbb{a} = \overrightarrow{OA},\ \mathbb{b} = \overrightarrow{OB},\ \mathbb{c} = \overrightarrow{OC},\ \mathbb{d} = \overrightarrow{OD}$ のうちで, どの3個も1次独立の場合を考えればよい. このとき 適当に k_1, k_2, k_3 を選べば

$$\mathbb{d} = k_1\mathbb{a} + k_2\mathbb{b} + k_3\mathbb{c}$$

と書ける. □