計算情報学Ⅰ

名古屋大学　情報文化学部
自然情報学科３年
第４回

鈴木泰博
情報文化学部・大学院情報科学研究科
複雑系科学専攻

Science of
interactions

Agenda
計算情報学Ｉ 第４回

1. 前回の復習
2. 連立方程式
3. ガウスの消去法
4. ガウスの消去法のアルゴリズム
5. アルゴリズムの計算量による評価

Science of
interactions

アルゴリズムの数学的定義

チューリングマシン(A.Turing,1912 -54)
“計算 ” の数学的定義を与える

ＲＡＭモデル、λ計算、帰納関数、whileプログラミング, e.t.c
#ちなみにARMS, P systemsも
すべて計算能力はチューリングマシンと等価。

“チューリングマシンは実行可能な手続きという概念に対応し得る十分に汎用性のある形式的な計算モデルである“
(チャーチの提唱)：
つまり、チューリングマシンで表現される手続きをアルゴリズムの数学的な定義としよう。

Science of interactions

アルゴリズムの評価

入力のサイズが大きくなるに従って、アルゴリズムの時間効率がどのように変化するか？

評価のための単位時間には、
CPU, ALUの性能
コンパイラの特性
２次記憶、入出力処理のオーバーヘッド
プログラミング言語の特性
…
はすべて“無視”する。そして、
プログラムの“１命令”＝１単位時間
とみなす。

Science of interactions

計算量の計算
演習

次のアルゴリズムの計算量を見積もれ

```
for i = 1 to n
   {
    a:=(1+2)x4
   }
```

```
for i = 1 to n
   {
       b:=a+b
       for j=1 to n
           {
          a:=(1+2)x4
           }
   }
```

Science of
interactions

計算量の計算
解答

次のアルゴリズムの計算量を見積もれ

```
for i = 1 to n
   {
    a:=(1+2)x4
   }
```

Ans. $O(n)$

```
for i = 1 to n
   {
        b:=a+b
        for j=1 to n
              {
             a:=(1+2)x4
              }
   }
```

Ans. $O(n^2)$

Science of
interactions

計算ができないということ

演習

1. クレタ人は嘘つきだとクレタ人が言った。クレタ人は果たして嘘つきであるか、そうでないかを判定せよ。

2. “ このスクリーンに書いてあることは、すべて嘘です ” ではこの講義の内容はすべて嘘であるのか判定せよ。

自己言及のパラドクス

Science of interactions

計算量
計算の複雑さの理論

前提：アルゴリズムが“ある”問題において、そのアルゴリズムがどの程度複雑かを評価する理論

- 時間計算量
  - 解くのに必要な時間
- 領域計算量
  - 解くのに必要な記憶領域

Ｐ（多項式時間で答えが出る）、ＮＰ（Ｐではない場合）

ＮＰ困難：ＮＰのクラスの問題だが、Ｐのクラスに多項式時間で帰着可能
ＮＰ完全：ＮＰのクラスの問題で、Ｐに帰着できない場合（最も難しい問題）

（ＮＰ完全問題の例　→　ＳＡＴ問題）

Science of interactions

連立方程式の直接解法
〜ガウス法

Science of
interactions

なぜ、連立1次方程式？

結構、計算機にとってはハードな問題なのです。

- 数値計算の“ 得意技 ”は補間と近似計算であるが、連立一次方程式はそれらのどの局面にも現れる不可避な存在である。曲線補間、微分方程式、偏微分方程式のなどなど）。
- 実際の問題ではNが100万近い大規模な問題が多い。
- あらゆる連立１次方程式に対して計算量的にも効率が良い、オールマイティな解法は存在しない。

Science of interactions

連立1次方程式
～線形代数の復習

つるかめ算

問題：つるとかめが合計5匹いる。足の数は合計16本である。
　　　つるとかめはそれぞれ何匹いるか。

つるとかめの数をそれぞれx,yとすると。

$$x + y = 5 \quad ①$$

$$2x + 4y = 16 \quad ②$$

$$\downarrow \quad ② - ① \times 2$$

$$x + y = 5$$

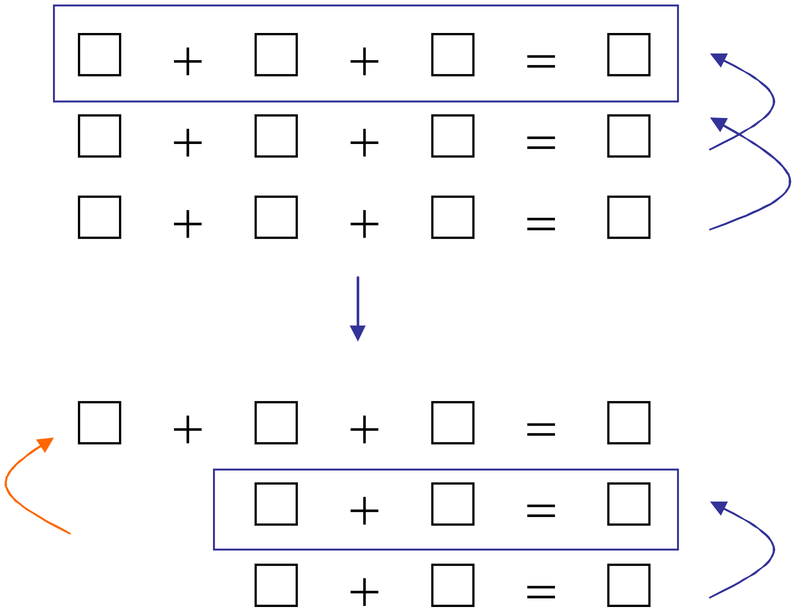
$$2y = 6$$

y=3, x=2

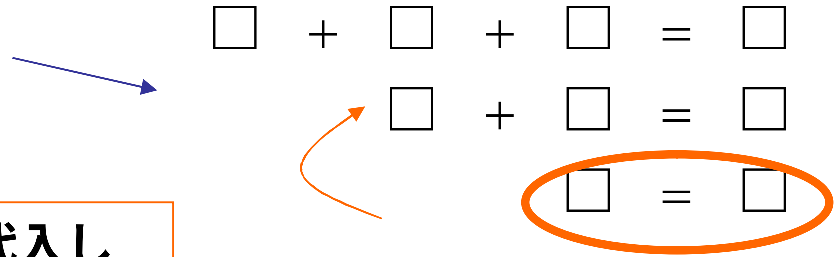
Science of interactions

ガウスの消去法
～線形代数の復習

素直に順番にただ未知数を消去し、与えられた問題を簡単な形に書き換えて解く



①“下の式”から“上の式”の何倍かを引き、左から順に未知数を消してゆく。
（前進消去）



②求まった未知数を下の式から代入し順番に未知数を求めていく。
（後退代入）

Science of interactions

ガウスの消去法
～線形代数の復習

ガウスの消去法：“ 下の式 ” から “ 上の式 ” の何倍かを引く。

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
\boxed{2x & + & y & + & z & = & 15 & \cdots & ①} \\
4x & + & 6y & + & 3z & = & 41 & \cdots & ② \\
8x & + & 8y & + & 9z & = & 83 & \cdots & ③
\end{array}
$$

②−① x 2

③−① x 4

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
2x & + & y & + & z & = & 15 & \cdots & ① \\
 & & 4y & + & z & = & 11 & \cdots & ② \\
 & & 4y & + & 5z & = & 23 & \cdots & ③
\end{array}
$$

Science of interactions

ガウスの消去法
〜線形代数の復習

ガウスの消去法：“ 下の式 ” から “ 上の式 ” の何倍かを引く。

$$
\begin{aligned}
2x + y + z &= 15 \quad \cdots \text{①}\\
\boxed{4y + z = 11} & \quad \cdots \text{②}\\
4y + 5z &= 23 \quad \cdots \text{③}
\end{aligned}
$$

③−②x 1

$\downarrow$

2x+2+3=15よりx=5

$$
\begin{aligned}
2x + y + z &= 15 \quad \cdots \text{①}\\
4y + z &= 11 \quad \cdots \text{②}\\
4z &= 12 \quad \cdots \text{③}
\end{aligned}
$$

4y+3=11よりy=2

Z=3

後退代入

以上より、x=5, y=2, z=3

Science of interactions

演習問題
～ガウスの消去法

以下の連立一次方程式を解きなさい。

$$
\begin{aligned}
2x + y + z &= 15 \quad \cdots \quad ① \\
4x + 6y + 3z &= 41 \quad \cdots \quad ② \\
8x + 8y + 9z &= 83 \quad \cdots \quad ③
\end{aligned}
$$

Science of
interactions

演習問題
解答

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
2x & + & y & + & z & = & 15 & \cdots ① \\
4x & + & 6y & + & 3z & = & 41 & \cdots ② \\
8x & + & 8y & + & 9z & = & 83 & \cdots ③
\end{array}
$$

$\downarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} ②-①\times 2 \\ ③-①\times 4 \end{array}}$

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
2x & + & y & + & z & = & 15 & \cdots ① \\
 & & 4y & + & z & = & 11 & \cdots ② \\
 & & 4y & + & 5z & = & 23 & \cdots ③
\end{array}
$$

$\downarrow$ $\boxed{③-②\times 1}$

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
2x & + & y & + & z & = & 15 & \cdots ① \\
 & & 4y & + & z & = & 11 & \cdots ② \\
 & & & & 4z & = & 12 & \cdots ③
\end{array}
$$

$z = 3,\ y = 2,\ x=5$

Science of interactions

演習問題
～ガウスの消去法

以下の連立一次方程式を解きなさい。

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
x & + & y & + & z & = & 6 & \cdots & ① \\
2x & + & 2y & - & z & = & 3 & \cdots & ② \\
-x & + & 3y & + & z & = & 8 & \cdots & ③
\end{array}
$$

Science of
interactions

演習問題
解答

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 6 \quad \cdots ① \\
2x + 2y - z &= 3 \quad \cdots ② \\
-x + 3y + z &= 8 \quad \cdots ③
\end{aligned}
$$

↓ ②−①x 2
③−①x 1

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 6 \quad \cdots ① \\
-3z &= -9 \quad \cdots ② \\
4y + 2z &= 14 \quad \cdots ③
\end{aligned}
$$

0が現れたら入れ替える

↓

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 6 \quad \cdots ① \\
4y + 2z &= 14 \quad \cdots ③ \\
-3z &= -9 \quad \cdots ②
\end{aligned}
$$

部分ピボット選択

z = 3, y = 2, x=1

Science of interactions

部分ピボット選択
桁落ち

$$\begin{aligned} \varepsilon x_1 + x_2 &= 1 - r \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned} \longrightarrow x_2 = \frac{1 - r - \varepsilon}{1 - \varepsilon} \longrightarrow x_2 = 1 - r, x_1 = 0$$

しかし、実際は $x_2 \cong 1 - r, x_1 \cong r$

ε <<なので1/ ε >>となり桁落ちが発生

そこで、部分ビボッド交換をすると、

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ \varepsilon x_1 + x_2 &= 1 - r \end{aligned} \longrightarrow (1 - \varepsilon) x_2 = 1 - r - \varepsilon \longrightarrow x_2 = 1 - r, x_1 = r$$

Science of interactions

連立1次方程式
～線形代数の復習

$$\begin{aligned} x &+ y &= 5 \\ 2x &+ 4y &= 16 \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix} \longrightarrow Ax = y$$

係数行列A　ベクトルx　**ベクトル**y

連立方程式は一般にN**変数、**N**方程式だから**A**は**N**次の正方行列**

答えは一つとは限らない

ないかもしれないし。。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$$

x=1, y=1, z=1 でもいいし、x=3, y= -3, z=3でも、x=0,y=3, z=0でもＯＫ

ガウスの消去法で計算してみてください。

z = tとおくと、y = 3 – 2t, x = t より、z = x, y = 3 – 2t

$\boxed{\text{連立一次方程式の解が一意である＝係数行列が正則}}$

だが、正則の判定には計算量がかかるので、予め正則か否かの判定を行なわず、計算の過程でアルゴリズム的に判断するのが普通。

Science of
interactions

ガウスの消去法のアルゴリズム
前進消去

“下の式”から“上の式”の**何倍**かをひく

$\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ 4÷2=2倍

$$
\begin{aligned}
\boxed{2x} + y + z &= 15 \quad \cdots ① \\
\boxed{4x} + 6y + 3z &= 41 \quad \cdots ② \\
8x + 8y + 9z &= 83 \quad \cdots ③
\end{aligned}
$$

$\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ 8÷2=4倍

$$
\begin{aligned}
\boxed{2x} + y + z &= 15 \quad \cdots ① \\
4x + 6y + 3z &= 41 \quad \cdots ② \\
\boxed{8x} + 8y + 9z &= 83 \quad \cdots ③
\end{aligned}
$$

第１行の $\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}, i = 2,3,\ldots n$ を第ｉ行から引く。

Science of interactions

ガウスの消去法のアルゴリズム
前進消去

第 k 行 (k=1,2,…n)の $\dfrac{a_{ik}}{a_{kk}}, i = 2,3,\ldots n$ を第 i 行から引く

$$
\begin{aligned}
2x + y + z &= 15 \quad \cdots \text{①} \\
4y + z &= 11 \quad \cdots \text{②} \\
4y + 5z &= 23 \quad \cdots \text{③}
\end{aligned}
$$

第2行の $\dfrac{a_{32}}{a_{22}}$ を第3行から引く

→第1列からk列までは既に0

またk列も、$a_{ik} - \left(\dfrac{a_{ik}}{a_{kk}}\right) \times a_{kk} = 0$

アルゴリズム

for k=k+1 to N

引き算

を繰り返す

$$y_i - \left(\frac{a_{ik}}{a_{kk}}\right) \times y_k = y_i$$

Science of interactions

ガウスの消去法のアルゴリズム
前進消去

k =1,2,…,N **の順に**

i = k+1,k+2, … N **の順に**

$$p := \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$$

j = k+1, k+2, … N **の順に**

$$a_{ij} := a_{ij} - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \times a_{kj}$$

を繰り返す

$$y_i - \left(\frac{a_{ik}}{a_{kk}}\right) \times y_k = y_i$$

を繰り返す

を繰り返す

Science of interactions

ガウスの消去法のアルゴリズム
後退代入

前進消去完了後

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1N}x_N & = & y_1 \\
 & & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2N}x_N & = & y_2 \\
 & & & & \cdots & & & & \\
 & & & & a_{N-1N-1}x_{N-1} & + & a_{N-1N}x_N & = & y_{N-1} \\
 & & & & & & a_{NN}x_N & = & y_N
\end{array}
$$

$$x_N = \frac{y_N}{a_{NN}}$$

$$x_{N-1} = (y_{N-1} - a_{N-1N}x_N)/a_{N-1N-1}$$

$$x_i = (y_i - \sum_{k=i+1}^{N} a_{ik}x_k)/a_{ii}$$

Science of interactions

ガウスの消去法のアルゴリズム
後退代入

アルゴリズム

$$x_N := \frac{y_N}{a_{NN}}$$

i = N-1, N-2, …, 1の順に

$$x_i = \left(y_i - \sum_{k=i+1}^{N} a_{ik} x_k\right) / a_{ii}$$

を繰り返す

Science of interactions

ガウスの消去法のアルゴリズム
計算量

k =1,2,…,N の順に

i = k+1,k+2, … N の順に

$$p := \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$$ **（割り算１回）**

j = k+1, k+2, … N の順に

$$a_{ij} := a_{ij} - p \times a_{kj}$$ **（掛け算(N-k)回）**

を繰り返す

$$y_i - p \times y_k = y_i$$ **（掛け算１回）**

を繰り返す

を繰り返す

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1} (n-k+2)(n-k) \cong \frac{n^2}{3}}$$

Science of interactions