

2015年度数学アゴラ & 数学公開講座

講義C「素粒子論と現代数学」



名古屋大学 大学院多元数理科学研究科
 浜中真志 (はまなか まさし)

この資料は2015年8月 & 10月に名古屋大学多元数理科学研究科で行われた(主に)高校生向けの以下の公開講座での浜中の講演に基づく。(加筆修正有)²

数学アゴラ <http://www.math.nagoya-u.ac.jp/ja/public/agora/agora-2015.html>

- 8/5: 物理学と数学、微分・力学法則
- 8/6: トポロジー(オイラー数、モース理論)
- 8/7: 素粒子論と現代数学

秋の数学公開講座 http://www.math.nagoya-u.ac.jp/ja/public/2015/open_lecture.html

- 10/10: 物理学と数学, 相対性理論
- 10/24: 量子力学と素粒子論
- 10/31: 弦理論と現代数学

サポートページ: <http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hamanaka/Agora.html>

この資料の目次

1. イントロダクション(数学と物理学)
 2. 20世紀の物理学
 - 2.1 相対性理論
 - 2.2 量子力学
 - 2.3 ブラックホール物理学
 3. 素粒子論と現代数学(かなり偏った歴史紹介です)
 - 3.1 素粒子物理学(標準模型関連)
 - 3.2 弦理論と現代数学
- 巻末: 参考文献・出典一覧(スライド中の[数字]と対応)

1. イントロダクション(数学と物理学)

物理学(素粒子論含む)と数学の深い関わり

- ニュートン力学 \Leftrightarrow 微分積分
- 一般相対論 \Leftrightarrow リーマン幾何学
- ゲージ理論(素粒子の理論) \Leftrightarrow ファイバー束の幾何
- 弦理論 \Leftrightarrow 現代幾何学

(ミラー対称性、位相的弦理論、弦双対性、
インスタントン、ダイバーグ・ウィッテン理論、...)

素粒子論が現代数学に与えた影響は計り知れない

(宇宙は「良い」数学を採用している?)

物理と数学の相補的発展が弦理論では顕著である

物理学(素粒子論)とは何か

- **物理学**: 自然現象を支配する法則を、構成要素間の相互作用として捉えて解明する、自然科学の最も基礎的な分野。通常**数学的枠組み**でモデル化し、実験事実と照らし合わせて**定量的な説明**を与える
- **素粒子論**: 自然界の構成要素の中で「最小の」粒子とその相互作用を研究対象とする

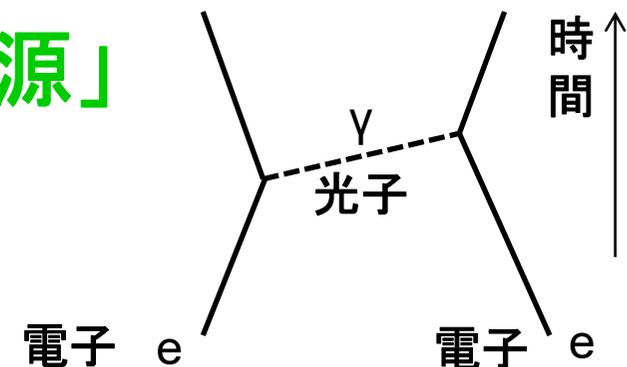
素粒子: 物質粒子(クォーク、レプトン): 構成要素

ゲージ粒子(重力子、光子、 \dots): 相互作用

ヒッグス粒子: 「質量の起源」

「粒子(particle)」=「場(field)」

素粒子の理論=場の理論



既知の素粒子一覧

物質粒子				力を伝える粒子	
	第1世代	第2世代	第3世代		
クォーク	 アップ	 チャーム	 トップ	強い力 グルーオン	
	 ダウン	 ストレンジ	 ボトム		
レプトン	 eニュートリノ	 μニュートリノ	 τニュートリノ		
	 電子	 ミューオン	 タウ	弱い力 Wボソン Zボソン	
ヒッグス場に伴う粒子				 ヒッグス粒子	

数学とは何か

- **数学**: 数量および空間に関して研究する学問。代数学・幾何学・解析学、ならびにそれらの応用を含む。[広辞苑第4版より]
- **注意1**: 物理学とは本来何の関係もない
- **注意2**: 思考を通じてのみ「見る」ことができる世界
- **素朴な疑問**: 数学の対象(数・図形など)はどこにあるのか?(そもそも存在するのか?)

ひとつの答え(立場)

- 数学の対象は「プラトンのアイデアの世界」にある。



プラトン
ウィキペディア[2]

- 数学の研究は登山によく例えられる。
- この文脈では、「プラトンのアイデアの世界」=山
- 「数覚」によって山を「見る」「登る」(by 小平邦彦)



[3]



小平邦彦
日本数学会HP[4]

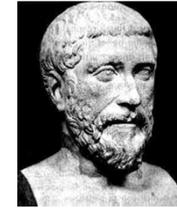
(例) ユークリッド山のピタゴラスの丘(定理)

- ピタゴラスの定理は「ユークリッド山」の見晴らしのよい「丘」の上にある

(cf. 大沢先生の講演)



[5]



ピタゴ
ラス [6]

- 良い定理の丘からの景色はとても見通しが良く、他の丘(定理)・峠・山頂・山脈などが良く見える(例:「余弦定理丘」は目前につながっている)
- ピタゴラスの定理を自分の頭で考えて証明するのは、自分の「足」でピタゴラスの丘まで一步一步踏みしめて登頂することに他ならない。(人の話を聞くより自分の足で実際に登って爽快な気分を味わいたい！)

物理学の対象はどこにあるのか？

- **物理学**：自然現象を支配する法則を、構成要素間の相互作用として捉えて解明する、自然科学の最も基礎的な分野。通常**数学的枠組み**でモデル化し、実験事実と照らし合わせて**定量的な説明**を与える
- 物理学の対象＝現実の宇宙・大自然(の一部)
- ただし一旦モデル化したあとは、その**数学的モデル**(in **アイデアの世界**)を研究対象とする



数学的モデル (アイデアの世界)

←
モデル化



現実の宇宙 [59]

数学の対象 V.S. 物理学の対象



数学山 (アイデアの世界)



物理山 (アイデアの世界)

- 研究論文 = 登山レポート・登頂記録
- 教科書・参考書 = 山登りのガイド



by マロリー(登山家) [7]

- なぜ山に登るのか? → 「そこに山があるからだ」

cf. 研究論文の例

PRL **109**, 111808 (2012)

PHYSICAL REVIEW LETTERS

week ending
14 SEPTEMBER 2012

Complete Tenth-Order QED Contribution to the Muon $g - 2$

Tatsumi Aoyama,^{1,2} Masashi Hayakawa,^{3,2} Toichiro Kinoshita,^{4,2} and Makiko Nio²¹*Kobayashi-Maskawa Institute for the Origin of Particles and the Universe (KMI), Nagoya University, Nagoya, 464-8602, Japan*²*Nishina Center, RIKEN, Wako, Japan 351-0198*³*Department of Physics, Nagoya University, Nagoya, Japan 464-8602*⁴*Laboratory for Elementary Particle Physics, Cornell University, Ithaca, New York 14853, USA*

(Received 24 May 2012; published 13 September 2012)

We report the result of our calculation of the complete tenth-order QED terms of the muon $g - 2$. Our result is $a_\mu^{(10)} = 753.29 (1.04)$ in units of $(\alpha/\pi)^5$, which is about 4.5 s.d. larger than the leading-logarithmic estimate 663(20). We also improve the precision of the eighth-order QED term of a_μ , obtaining $a_\mu^{(8)} = 130.8794 (63)$ in units of $(\alpha/\pi)^4$. The new QED contribution is $a_\mu(\text{QED}) = 116\,584\,718\,951 (80) \times 10^{-14}$, which does not resolve the existing discrepancy between the standard-model prediction and measurement of a_μ .

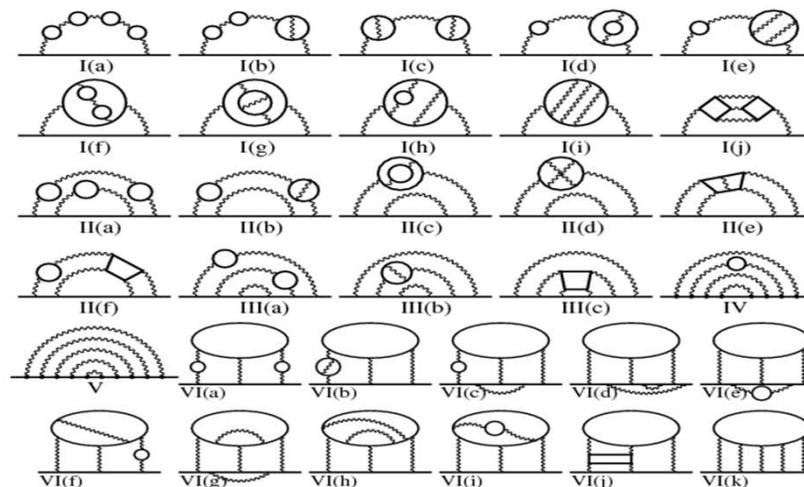
DOI: [10.1103/PhysRevLett.109.111808](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.111808)

The anomalous magnetic moment a_μ of the muon has been studied extensively both experimentally and theoretically since it provides one of the promising paths in exploring possible new physics beyond the standard model. For this purpose it is crucial to know the prediction of the standard model as precisely as possible.

On the experimental side the current world average of the measured a_μ is [1,2]:

$$a_\mu(\text{exp}) = 116\,592\,089 (63) \times 10^{-11} [0.5 \text{ ppm}], \quad (1)$$

New experiments designed to improve the precision further



木下東一郎
素粒子論
グループHP[8]

数学の対象 V.S. 物理学の対象

- 数学も物理学も、どちらも**アイデア**の世界に存在する
数式や性質を実際上は研究している
- **最終目標がまったく異なる！**
- **数学**→**数学的アイデアの世界(山)**そのものの解明
その手法は厳密な論証と計算に基づく
- **物理学**→**自然法則の解明(そのモデル化=山)**
その手法は論証と計算に基づくが、
(数学的厳密性はそこまで重視されず)
最終的に実験事実が説明できればよい
(**実験的検証が不可欠！**)

数学の対象 V.S. 物理学の対象



数学山 (アイデアの世界)

相補的
発展



物理山 (アイデアの世界)

- 物理山脈は数学山脈の断片的一部分
 - 高い山・美しい山といったものがある(主観)
 - 物理山脈の風景は予想以上に素晴らしかった！
- 新しい数学の予言→数学の発展→物理の発展→

重要なコメント

- 難しい数式・概念(以後「(祭)」マークで表示)に出くわしたときの対処法

→ (美しい)山脈の絵が描いてあると思おう！



2. 20世紀の物理学(「現代」物理学)

- 古典物理学(19世紀以前)

ニュートン力学 ⇔ 微分積分(ライプニッツなど)

解析力学(定式化を洗練)

⇔ 力学系・可積分系・
シンプレクティック幾何

マクスウェルの電磁気学

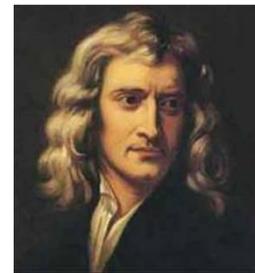
熱力学・流体力学

古典統計力学(ボルツマン)

- 1900年当時の現状:

数学: ヒルベルトの23の問題, ポアンカレ, ...

物理学: プランクの指導教員「物理学は大体完成した(誤)」



ニュートン[9]



マクスウェル[10]



ボルツマン[11]



ヒルベルト[12]



ポアンカレ [13]

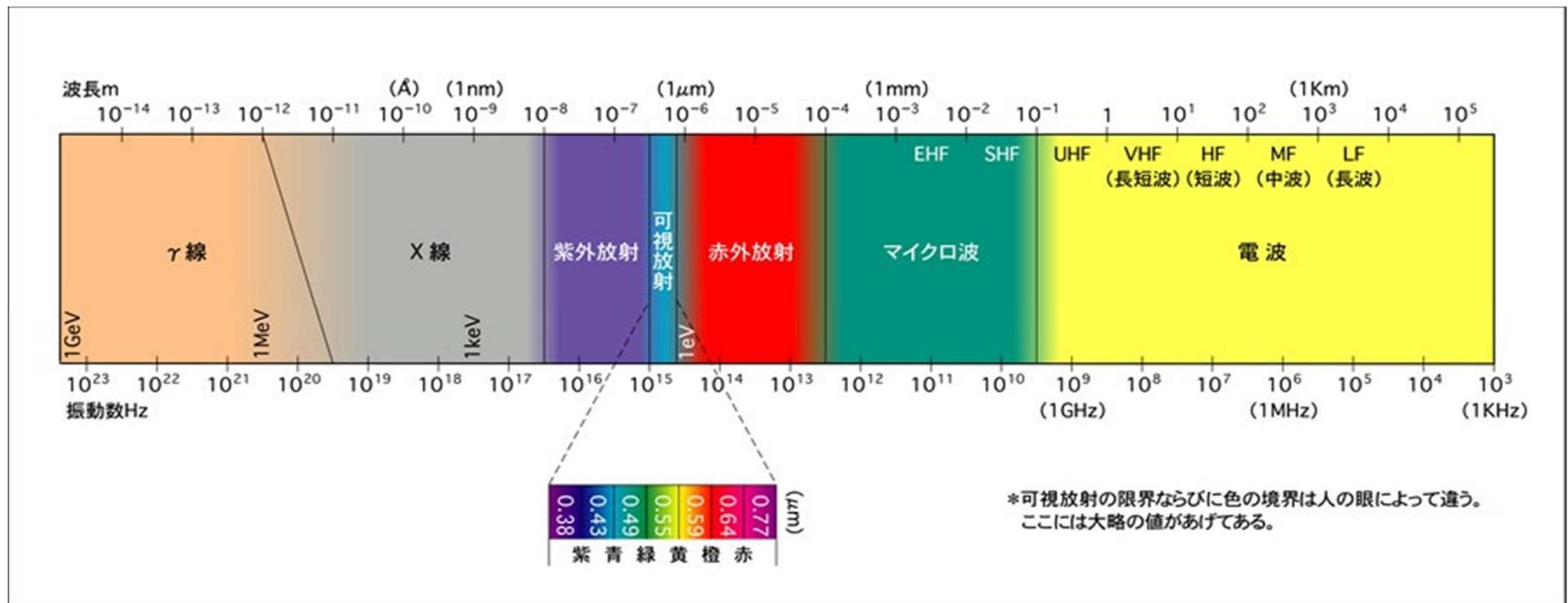
20世紀物理学の幕開け

- 19世紀物理学の2つの暗雲(1900年, ケルビン卿)
 - (i) 黒体輻射の問題(原子からの熱輻射のスペクトルが古典論での予言と合わない)
 - (ii) マイケルソン・モーレーの実験結果(1887年)
(光速度が誰から見ても一定で, エーテル仮説と矛盾する)
- (i)の解決→エネルギー量子仮説(プランク)・光量子仮説(アインシュタイン): **量子力学**の幕開け
- (ii)の解決→**特殊相対性理論**

コメント

- 2章で登場する「輻射」「光」などの言葉はすべて電磁波(マクスウェル方程式の解)の一つである

電磁波一覧(波長に応じて名前が異なる)



ウシオ株式会社HP「電磁波と光」[14]より

2.1 アインシュタインの相対性理論

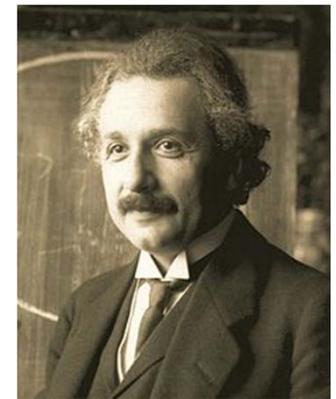
特殊相対性理論(アインシュタイン, 1905年)

- 以下の2つの仮説に基づく

(I) すべての物理法則は任意の慣性系で同じ形をとる
(特殊相対性原理)

(II) 光速は任意の慣性系で一定の値をとる
(光速不変の原理)

慣性系 = 宇宙の重心に対して
等速直線運動をしている観測者



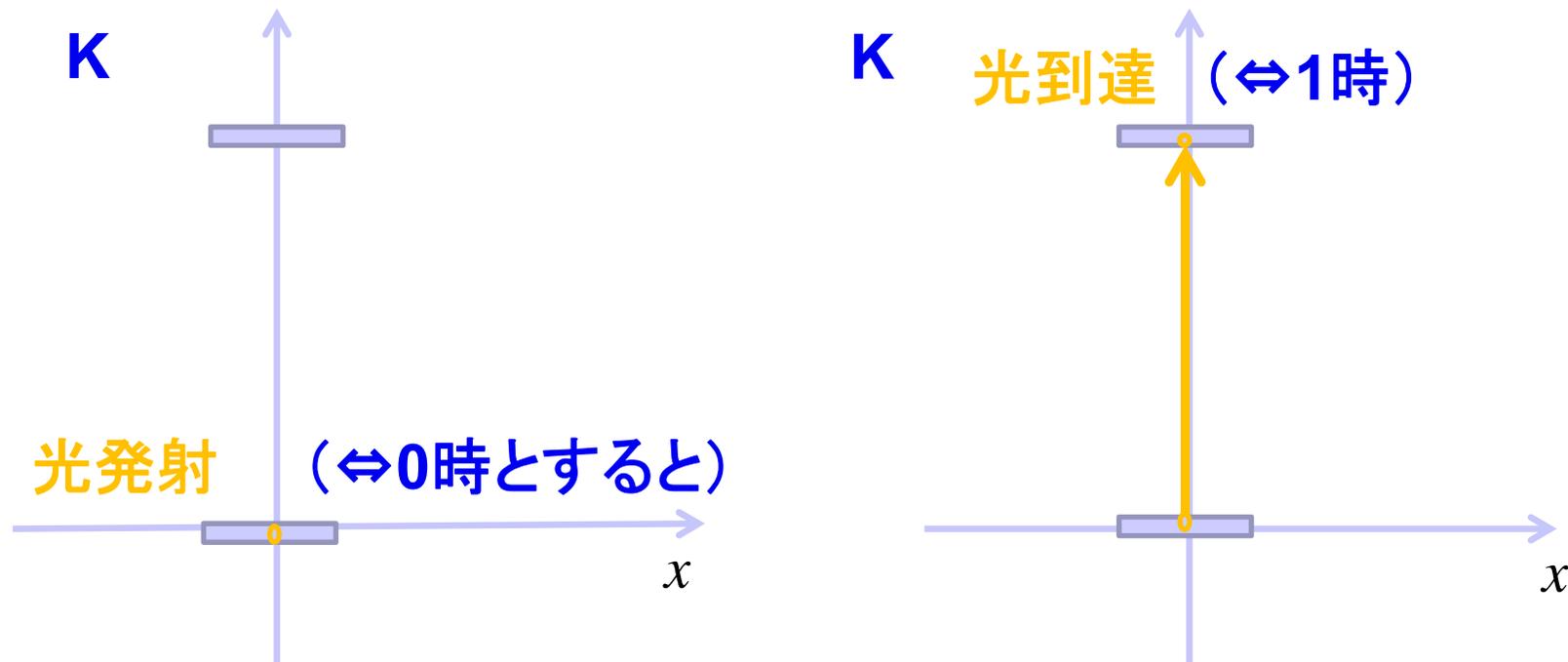
Albert Einstein
ウィキペディア[15]

(II)の根拠:

- ・実験事実(マイケルソン・モーレーの実験)
- ・マクスウェル方程式の対称性(ローレンツ対称性)

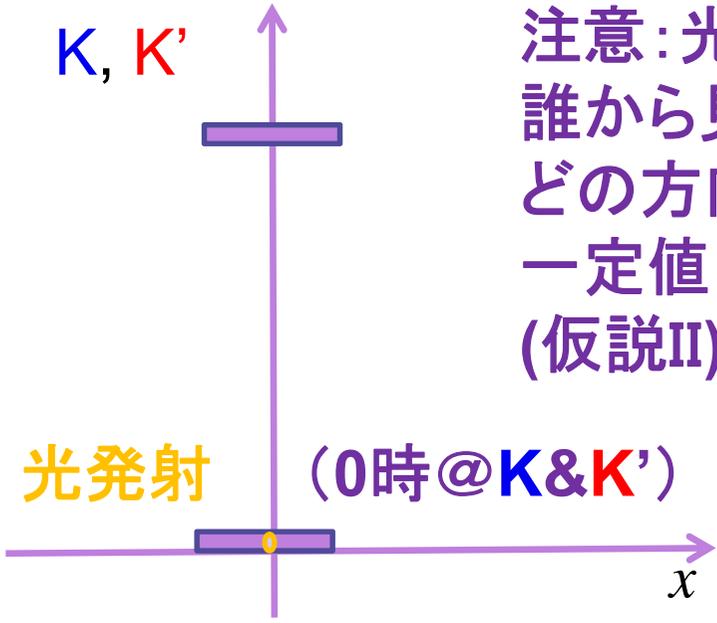
簡単な帰結：時間の遅れ

- 光時計で時間を測る（観測者Kの時計）

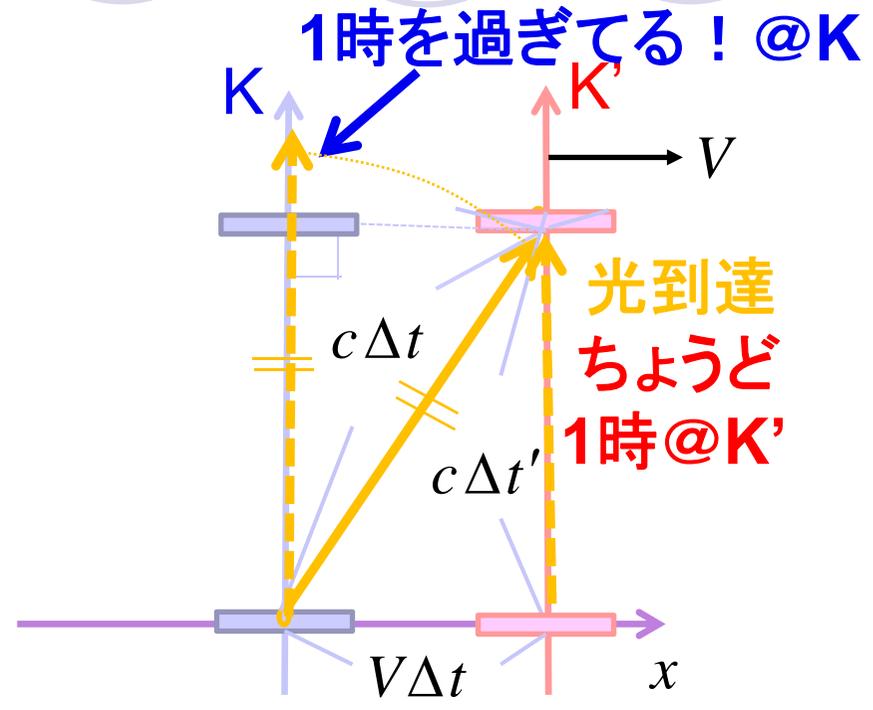


(静止系**K**での)光到達までの時間
(=例えばこれを1時間と定める)

● **K**に対して V の速度で等速運動している **K'**を考え
 両者の時計を比較 $\Delta t'$: (K'系での)光到達までの経過時間
 =K'の1時間とする



注意: 光速は誰から見てもどの方向へも一定値 c !
 (仮説II)



Δt : K'系で光が到達した瞬間のK系での時刻(経過時間)とする

ピタゴラスの定理より:
 $(c\Delta t')^2 + (V\Delta t)^2 = (c\Delta t)^2$

$$\therefore \Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \Delta t'$$

(例) $V = c \times \sqrt{3} / 2$ のとき
 $\Delta t = 2\Delta t'$

Kの2時 ⇔ K'の1時
 Kから見ると K'の時計が遅れている!

座標変換と物理法則の対称性

	ニュートン力学	マクスウェルの 電磁気学
ガリレイ変換 (「直観的」座標変換)	不変 (OK)	変わる (ダメ)
ローレンツ変換 (「妙な」座標変換)	形が変わる (ダメ)	不変 (OK)

→方程式が修正

アインシュタインは
こちらを採用！

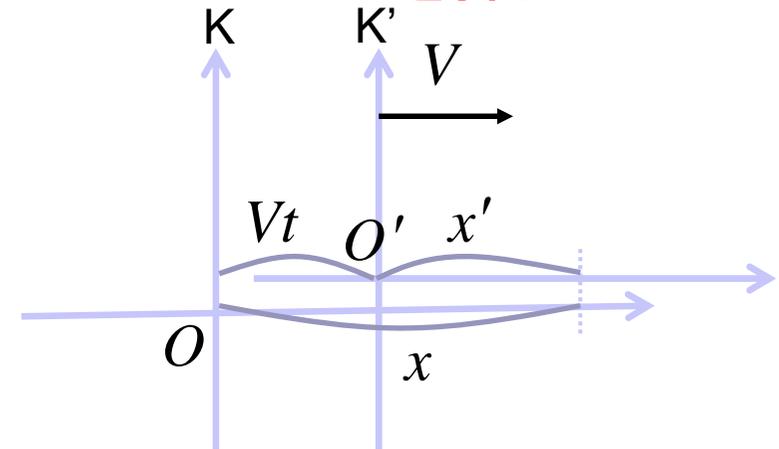
ガリレイ変換:

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ t' = t \end{cases}$$

ローレンツ変換:
(仮説IIを尊重)
導出は参考資料
問題3

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - Vt) \\ ct' = \gamma(-\beta x + ct) \end{cases}$$

$$\left(\beta := \frac{V}{c}, \gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)$$



ローレンツ変換: 1つの事象に対する, K系の観測値 (t, x) と K'系の観測値 (t', x') との対応関係

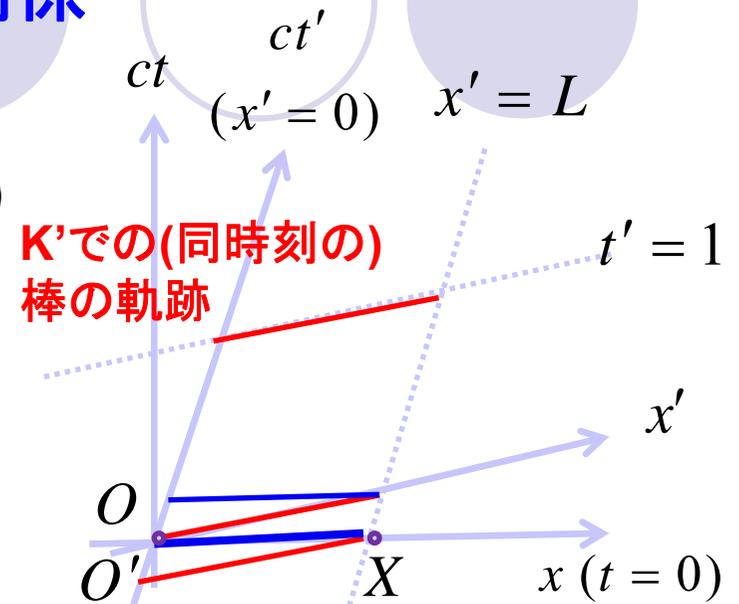
$$\begin{cases} x' = \gamma(x - Vt) \\ ct' = \gamma(-\beta x + ct) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \gamma(x' + Vt') \\ ct = \gamma(\beta x' + ct') \end{cases}$$

- 時間の遅れ: ローレンツ変換の式において $(t', x') = (1, 0)$ に対応する (t, x) は:

$$t = \gamma t' = \frac{1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} 1$$

- 長さの「収縮」

K'系において棒の長さを測定すると L だったとする. K系から見た棒の長さは(時刻 $t=0$ で測定するとして) $x'=L$ と x 軸 ($t=0$) との交点の座標 X に等しい:

$$L = \gamma X$$


K'での(同時刻の)棒の軌跡

Kでの(同時刻の)棒の軌跡
(棒の長さとは同時刻での両端の座標値の差)

(例) $V = c \times \sqrt{3} / 2$ のとき

$\gamma = 2$ より $X = L / 2$

Kでは1m \Leftrightarrow K'では2m

その他の話題

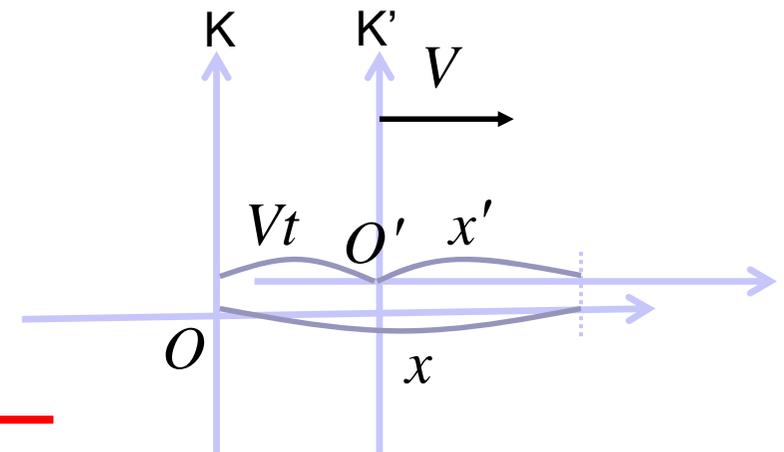
- ローレンツ変換のもと不変な運動方程式(あります)
- 運動エネルギーの表式

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}$$

$$\downarrow V/c \rightarrow 0$$

$$E = mc^2$$

質量とエネルギー
の等価性



- すべての運動は光速を超えない(質量ゼロ \Leftrightarrow 光速)

cf.
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \xrightarrow{V \rightarrow c} \infty$$

一般相対性理論(アインシュタイン, 1915年)

● 以下の2つの仮説に基づく

(I) すべての物理法則は任意の座標系で同じ形をとる

(一般相対性原理)

(II) 局所的には重力は適当な加速度運動により打ち

消すことができる。(等価原理) cf. アインシュタインの
エレベーター(思考実験)

アインシュタイン方程式(重力の古典論)(祭):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

右辺: 物質(星)の分布
左辺: 時空の曲がり具合

リーマン幾何学に基づく「最も美しい方程式」

一般相対性理論の予言・応用

- 重力レンズ(cf.エディントンの観測1919年)
- 水星の近日点移動の説明
- 重力波(追記:2015年9月14日ついに検出!!!)
- 膨張宇宙解(ビッグバン・インフレーション)
- ブラックホール解(→2.3節で詳しく議論)
- ワームホール
- GPS衛星
- 光格子時計による「測量」
- ...

2.2 量子力学

- 19世紀物理学の2つの暗雲(1900年, ケルビン卿)
 - (i) 黒体輻射の問題(原子からの熱輻射のスペクトルが古典論からの予言と合わない)
 - (ii) マイケルソン・モーレーの実験結果(1887年)
(光速度が誰から見ても一定で, エーテル仮説と矛盾する)
- (i)の解決→エネルギー量子仮説(プランク)・光量子仮説(アインシュタイン): **量子力学**の幕開け
- (ii)の解決→**特殊相対性理論**

2.2 量子力学

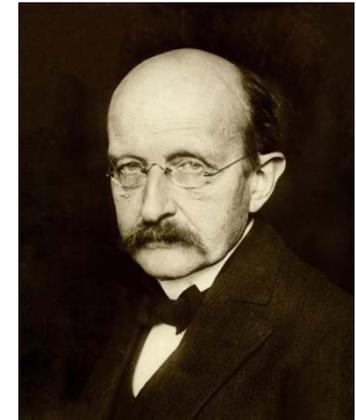
- プランクのエネルギー量子仮説(1900年)

振動数 ν の熱輻射がとりうるエネルギーは $h\nu$ の整数倍に限られる。 $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$: プランク定数

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{nh\nu}{kT}}} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

cf. 等比数列の無限和(参考資料の問題5, 6)

: プランク分布(の本質的部分): (祭)



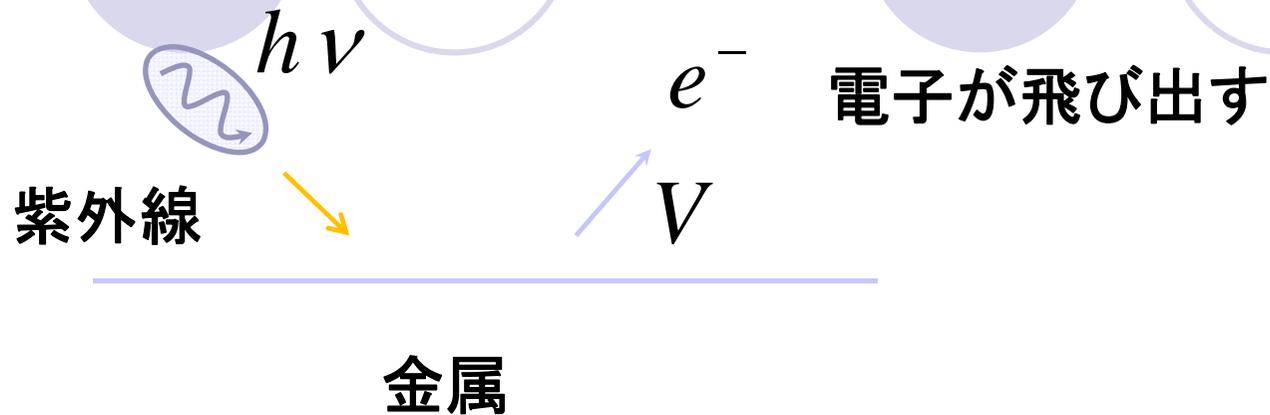
Max Planck [16]

- アインシュタインの光量子仮説(1905年)

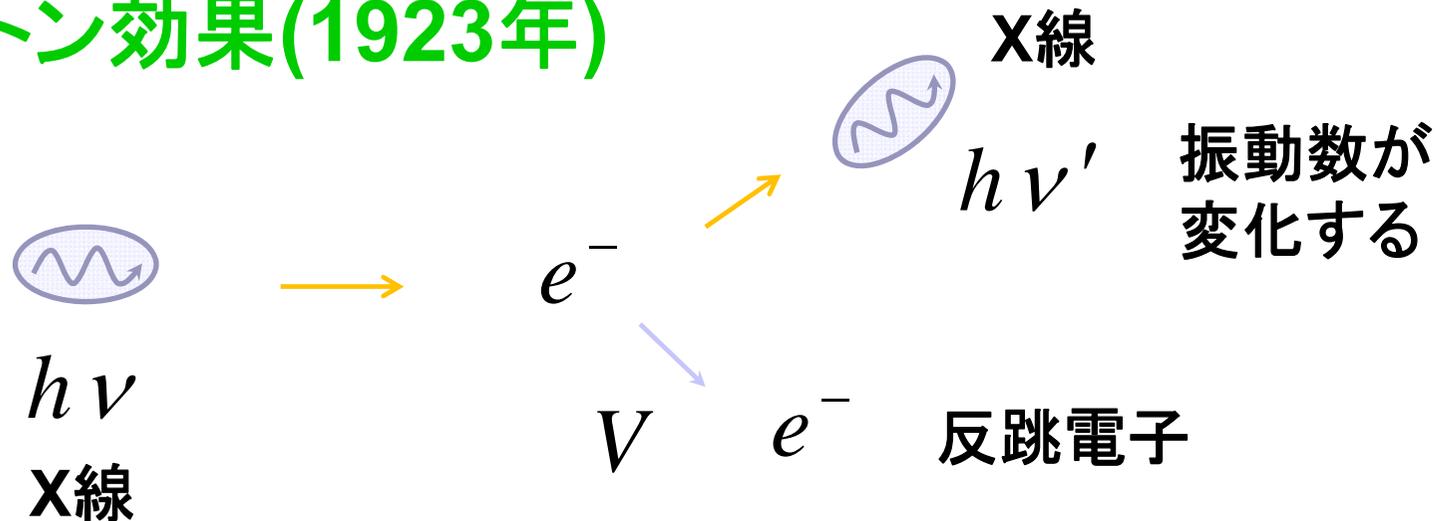
振動数 ν の光はエネルギー $h\nu$ を持つ粒子(光子)として振る舞う(光の粒子性)

光量子仮説の応用

● 光電効果(アインシュタイン、1905年)



● コンプトン効果(1923年)



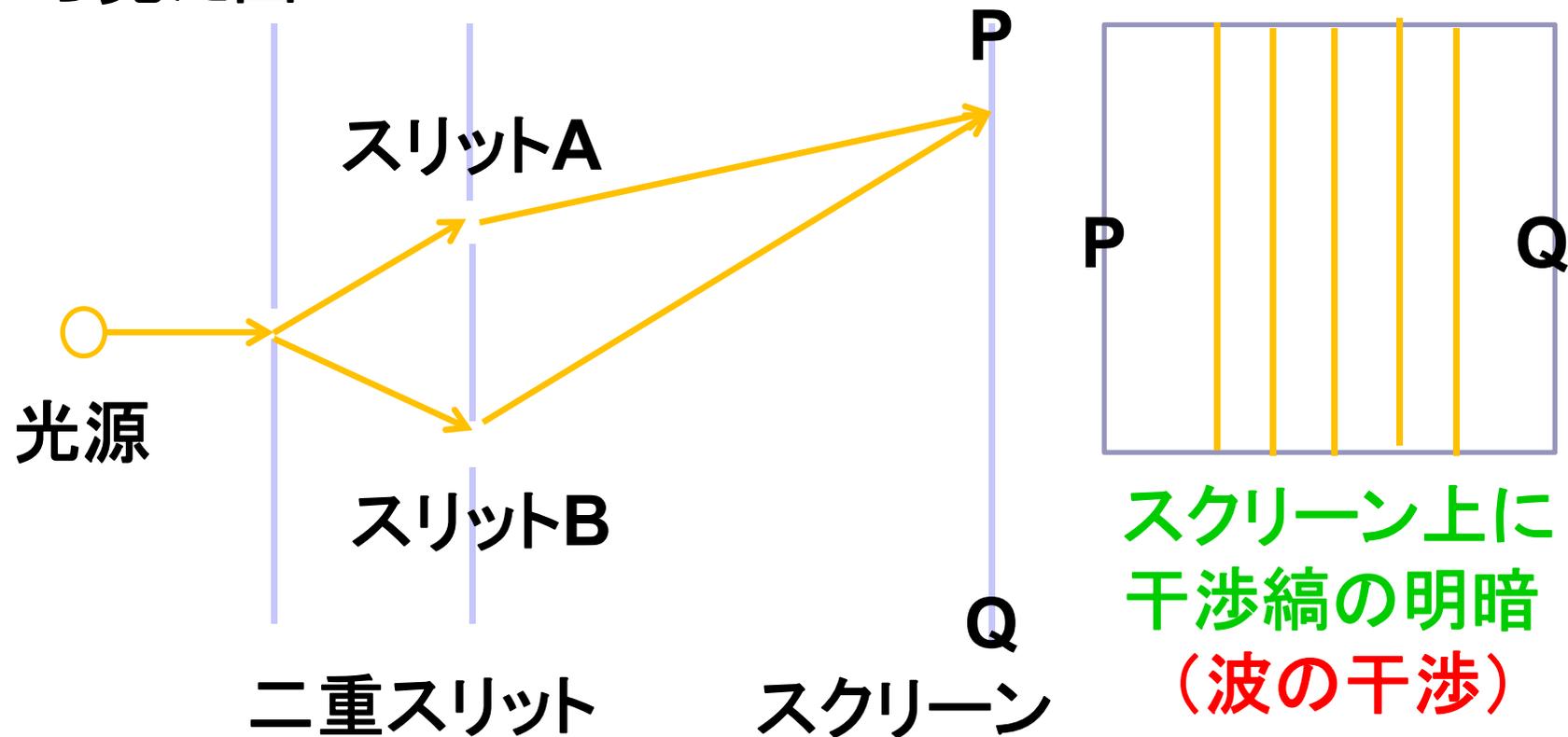
● 質量とエネルギーの等価性の証明(参考資料4)

粒子性と波動性

- 光は波であるが粒子的性質を持つことが分かった。
- 粒子が波動的性質を持つか？

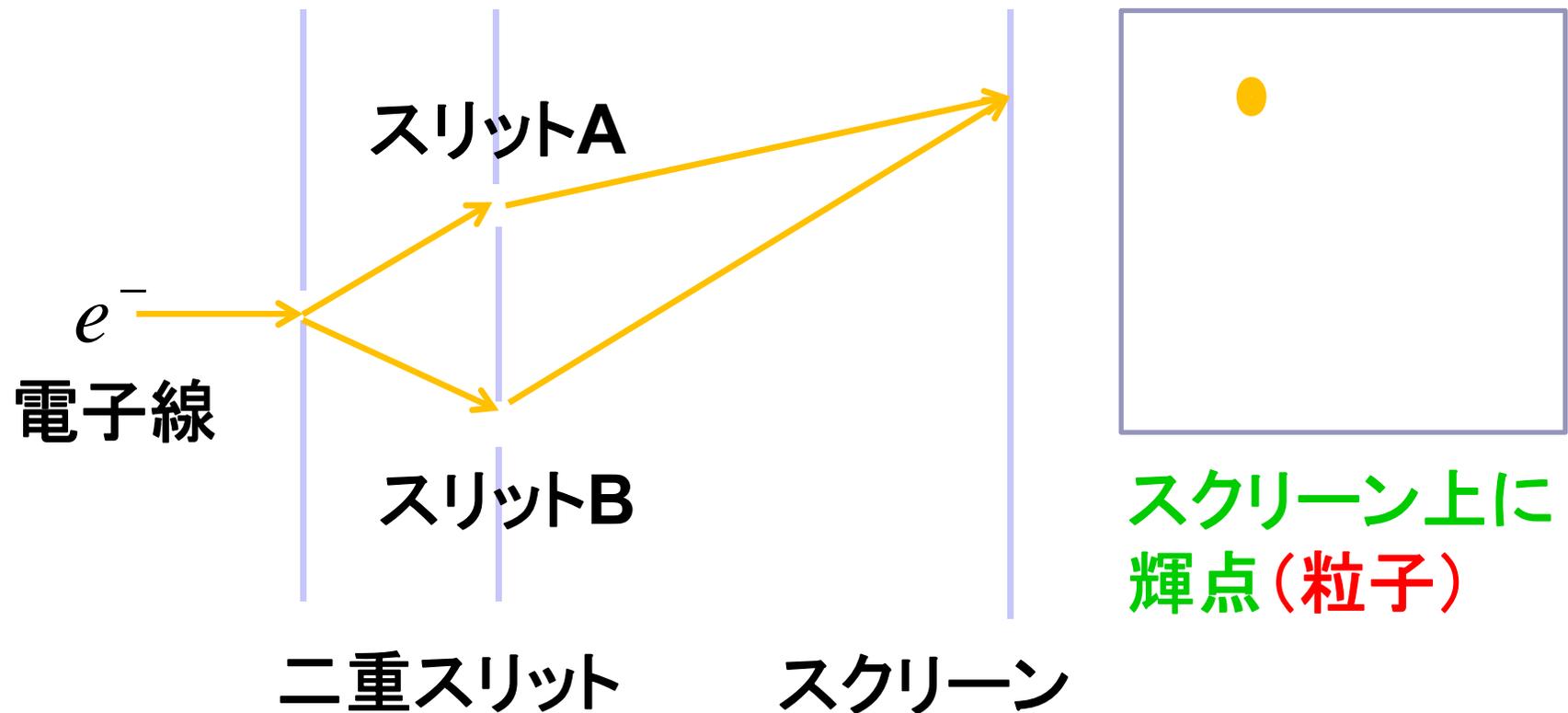
光の波動性：ヤングの実験

上から見た図



粒子性と波動性

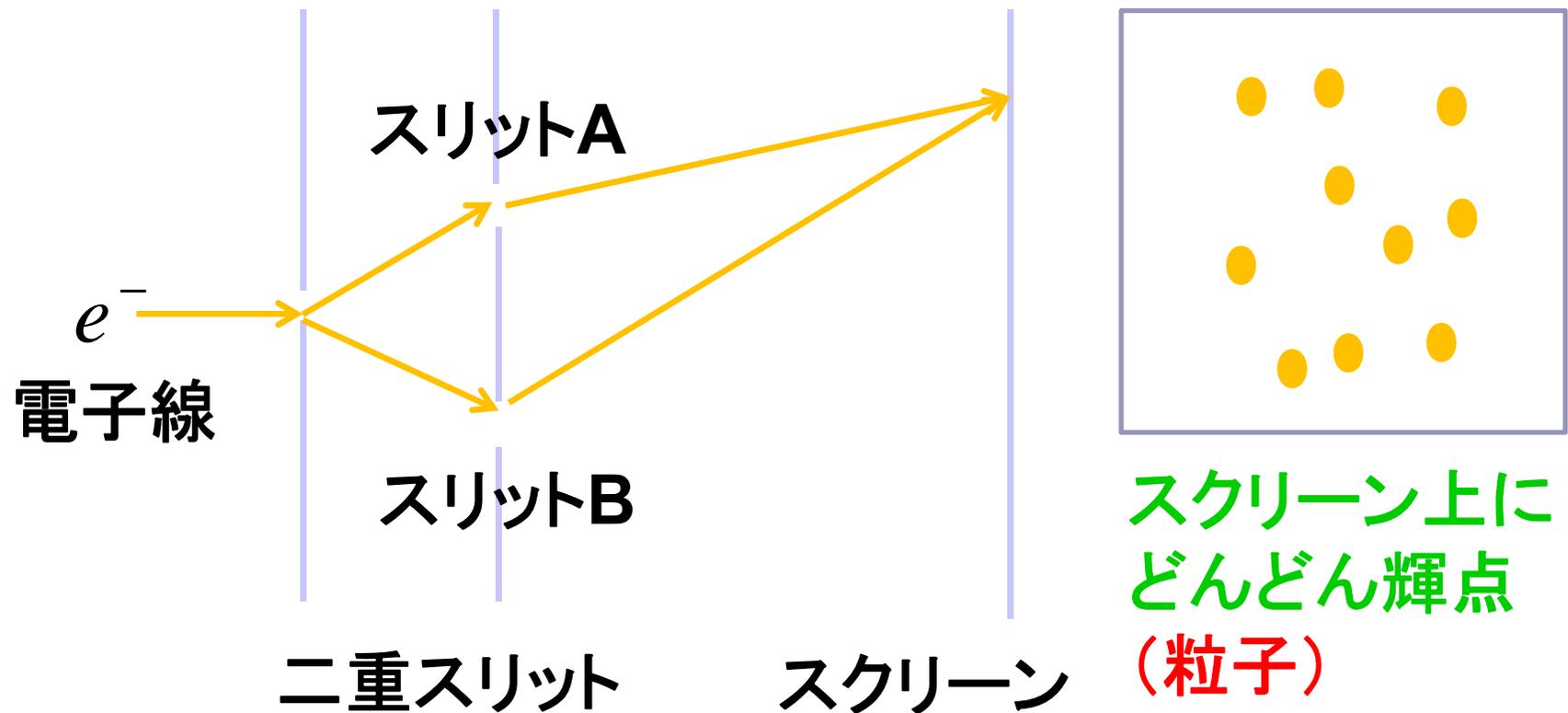
- これを電子(粒子)に対してやってみよう！
電子の二重スリット実験



粒子性と波動性

- これを電子(粒子)に対してやってみよう！
電子の二重スリット実験

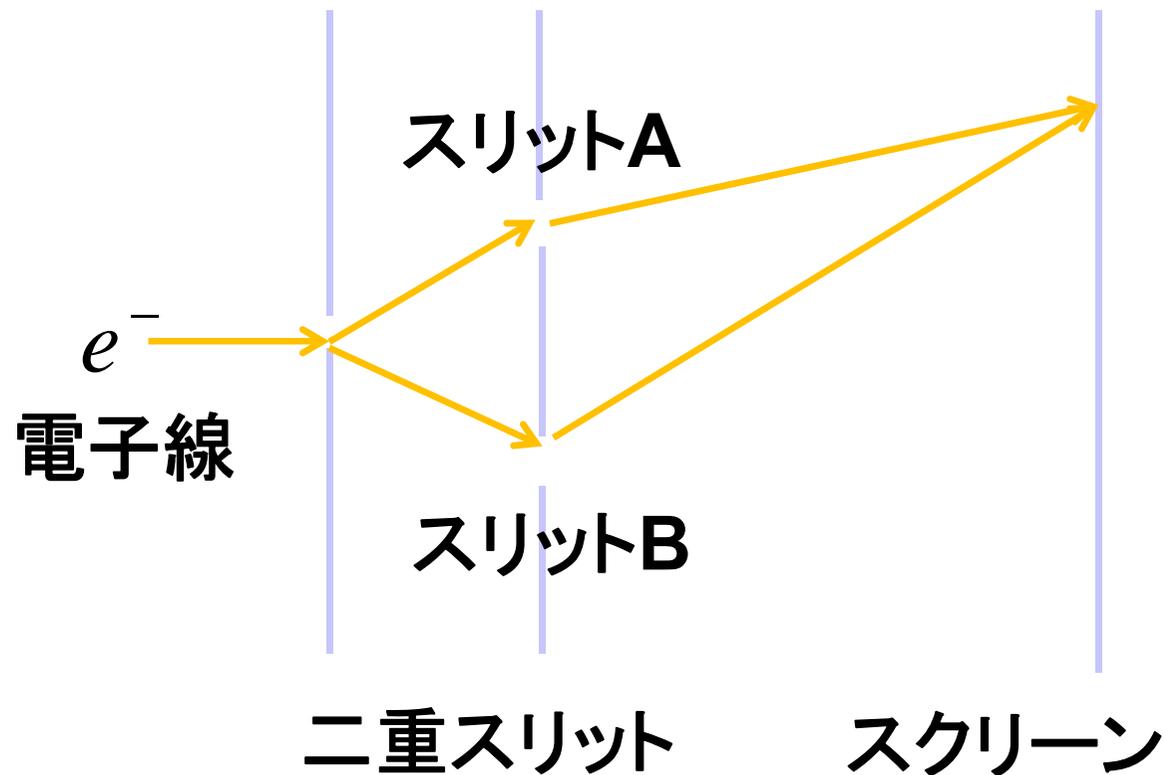
どんどん飛ばす.....



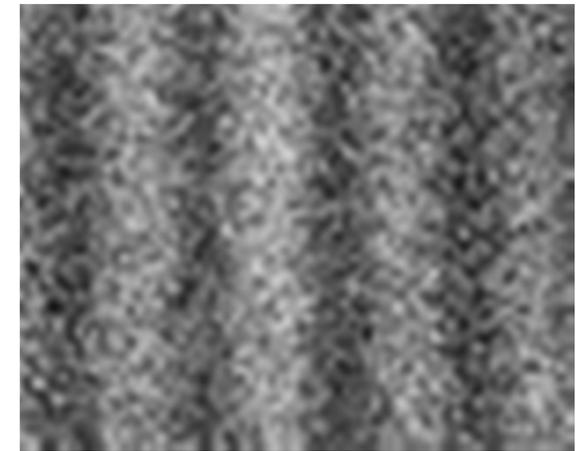
粒子性と波動性

- これを電子(粒子)に対してやってみよう！
電子の二重スリット実験

すると...



日立製作所HP[17]
外村彰さんの実験



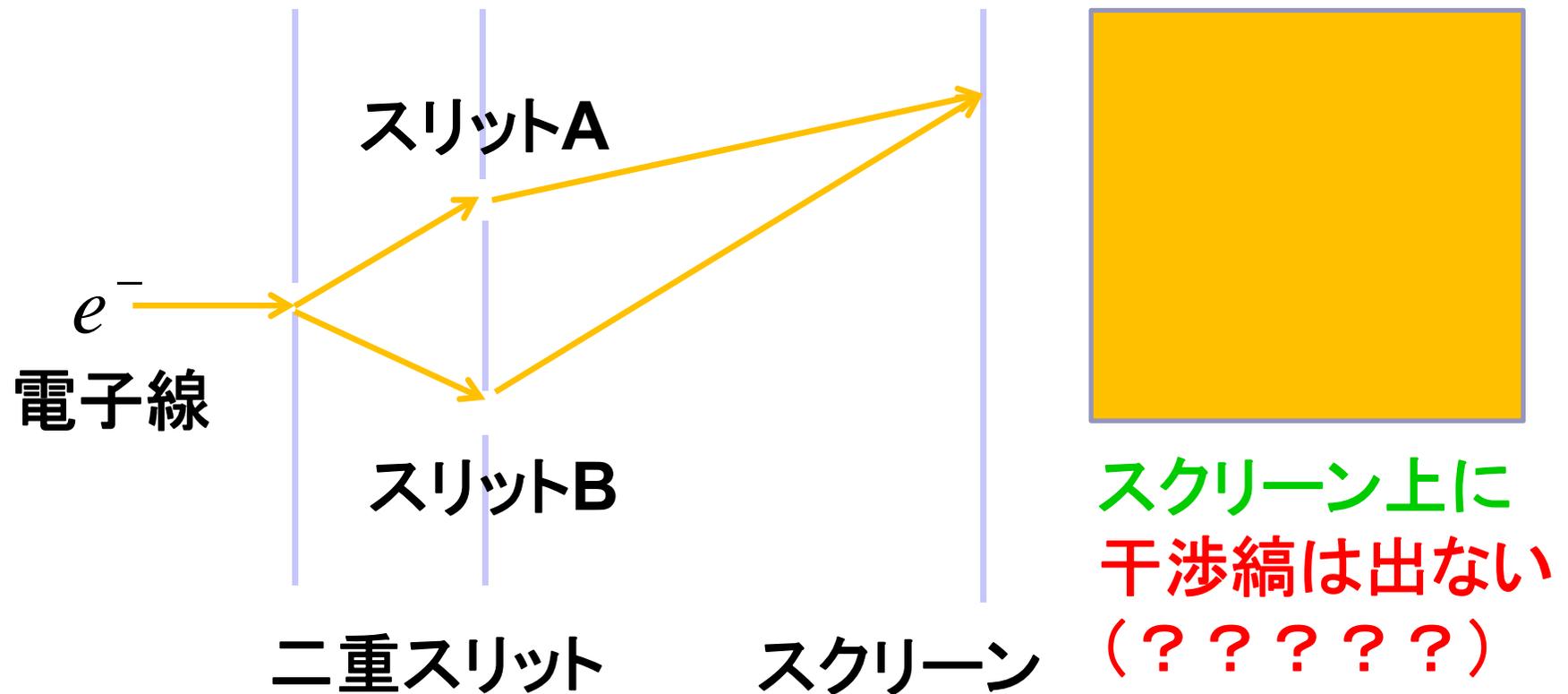
スクリーン上に
干渉縞！！！！
(波動性？！)

粒子性と波動性

- これを電子(粒子)に対してやってみよう!

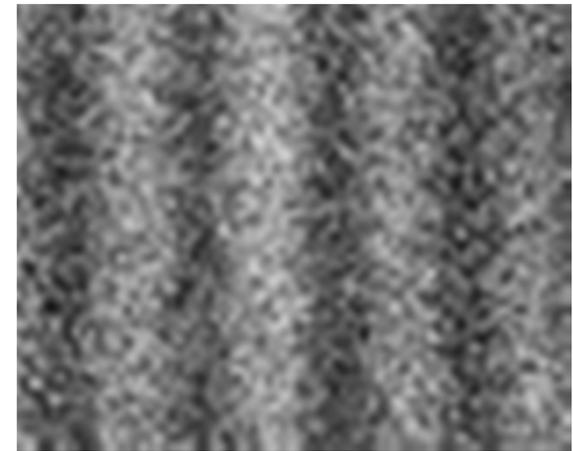
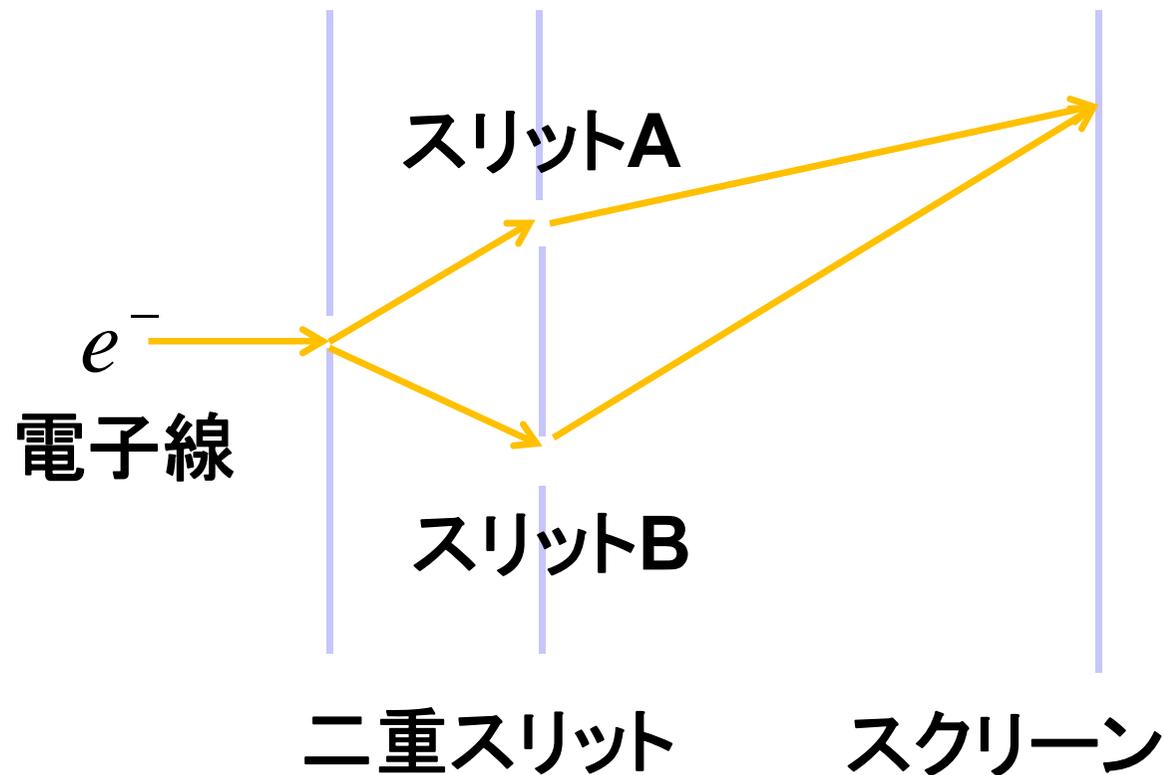
電子の二重スリット実験

どちらのスリットを通ったか(あるいは通らなかったか)を事前確認すると...



これに対する量子力学的解釈

- 干渉を起こす電子は両方のスリットを通った!

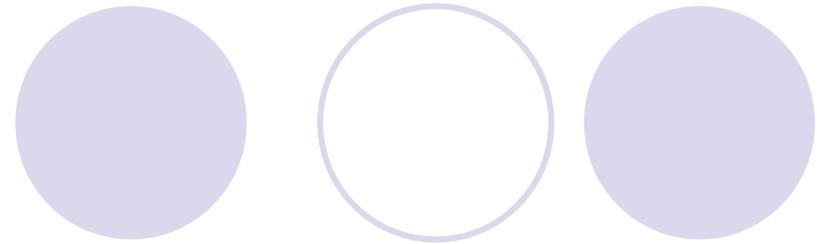


cf. 朝永振一郎
「光子の裁判」
「鏡の中の物理学」
(講談社) 収録

粒子性と波動性

- ド・ブロイ仮説(1923年)

運動量 p の粒子は波長 $\lambda = \frac{h}{p}$ の波であるとも解釈できる



- (祭) ド・ブロイ仮説を平面波の式に素朴に代入:

$$\psi(x, t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t) = \frac{i}{\hbar} p \psi(x, t), \quad \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \frac{-i}{\hbar} E \psi(x, t)$$

● (祭) シュレーディンガーの量子化:
古典論の関係式において

$$p \mapsto \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad E \mapsto i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

と置き換える操作のこと。これを

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

に適用すると以下の方程式が得られる:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x, t)$$

シュレーディンガー方程式 (プサイψって何??)

Erwin Schrödinger
ウィキペディア[18]

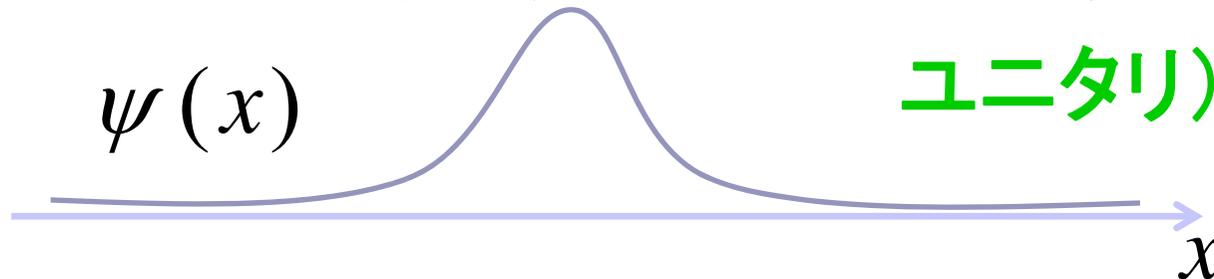


量子力学の基本原理

Max Born
ウィキペディア[19]



- ボルンの確率解釈: プサイ Ψ は粒子の存在確率分布を表す! (時間発展はユニタリ)



- プサイ Ψ の状態を観測して測定値が得られたとすると、状態 Ψ は突然、測定値に対応する固有状態ファイ φ に遷移する。(祭)

(Ψ はもともと φ の線形重ね合わせ)

→「観測問題」 cf. EPRパラドックス

アインシュタイン曰く「神がサイコロを振るはずがない」

cf. 並木美喜雄
「量子力学入門」
(岩波新書)

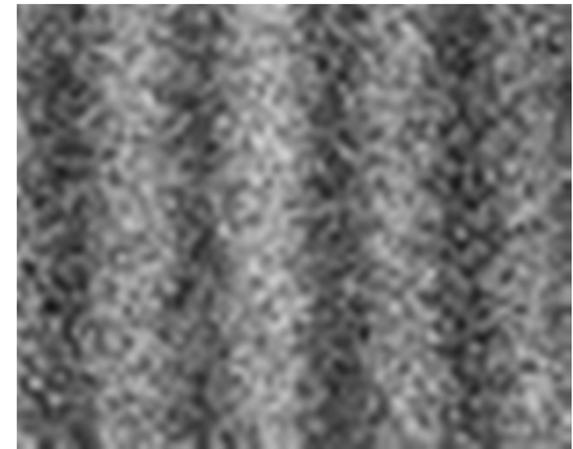
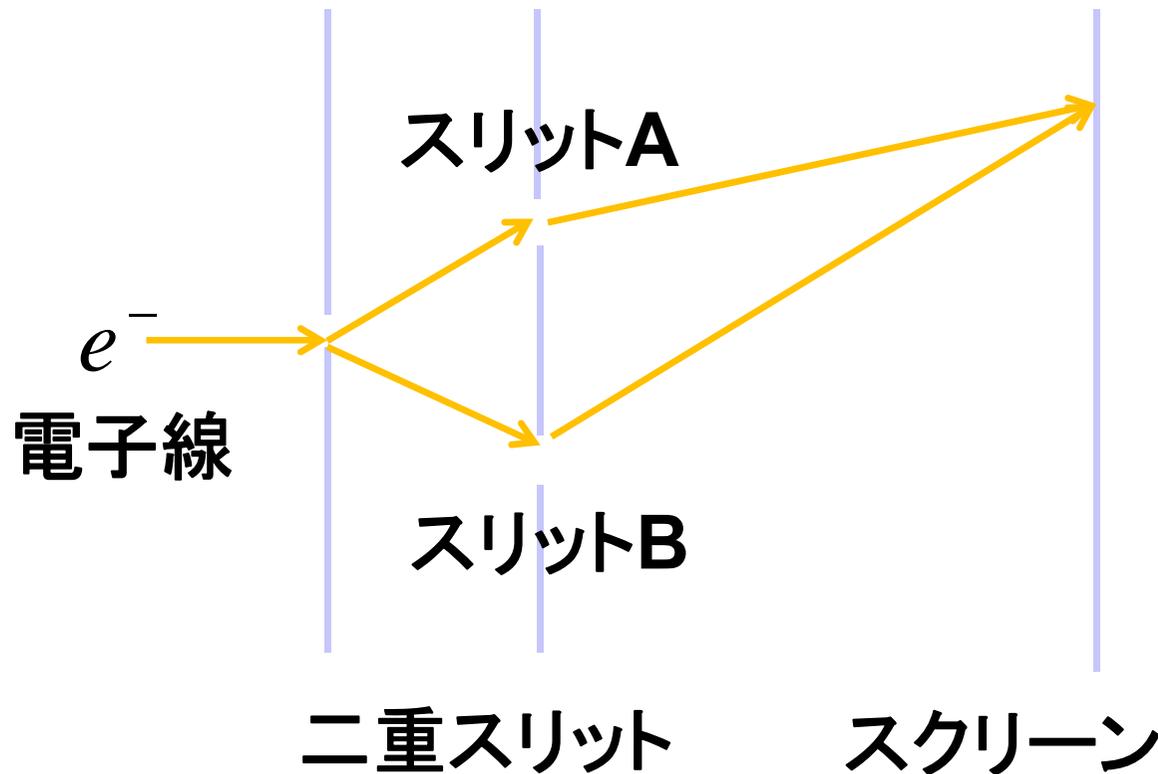
二重スリット実験に対する量子力学的解釈

- 干渉を起こす電子は両方のスリットを通った!

Aを通った状態 ↓ Bを通った状態

$$\psi = \varphi_A + \varphi_B$$

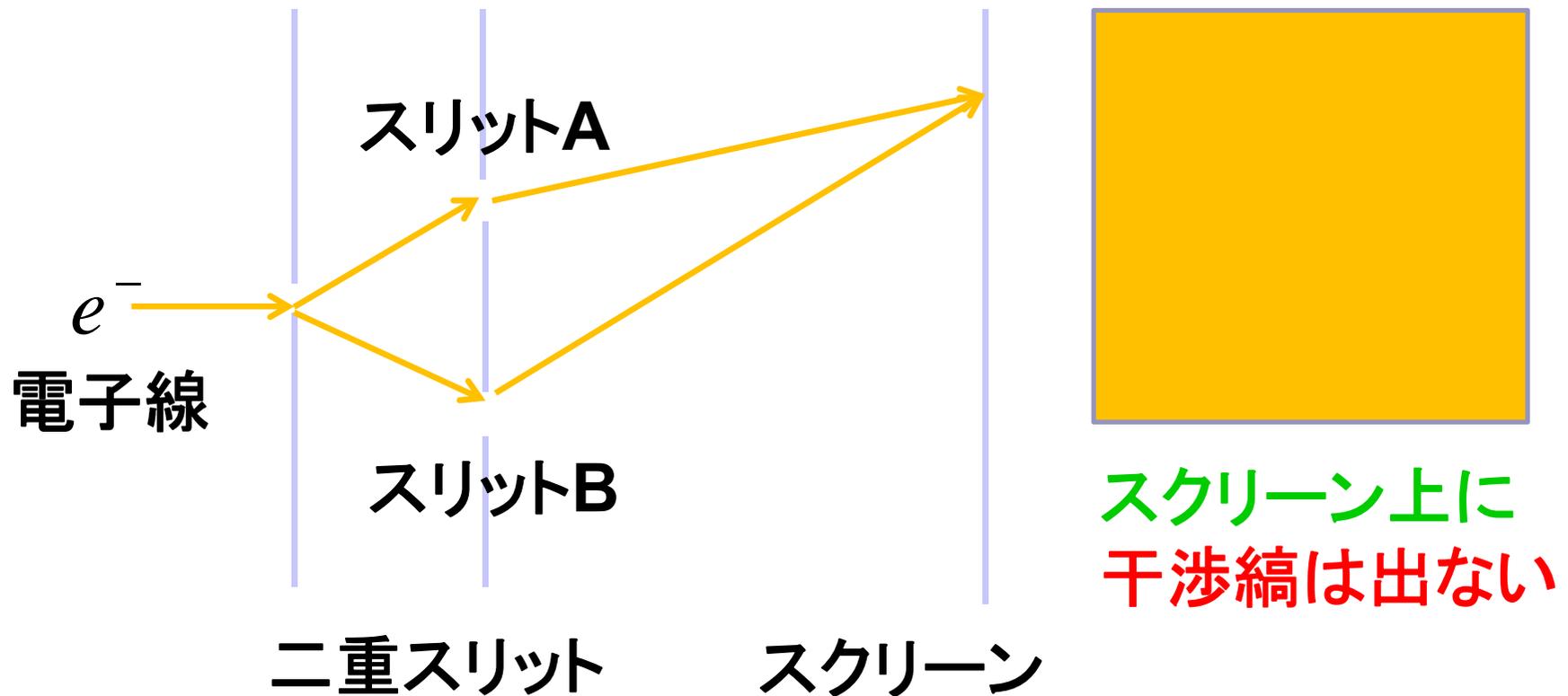
2つの状態の線形重ね合わせ(⇔干渉)



二重スリット実験に対する量子力学的解釈

- どちらのスリットを通ったか(あるいは通らなかったか)事前確認すると、

$\psi = \varphi_A \text{ or } \varphi_B$: 観測によって1つの状態に遷移
⇔ 重ね合わせなし ⇔ 干渉なし



量子力学の性質

Werner Heisenberg
ウィキペディア[20]



- ハイゼンベルグの不確定性関係:

粒子の座標 x と運動量 p の
ゆらぎの間に次の関係式が成り立つ。

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar / 2$$

(座標と運動量を同時に

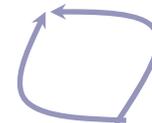
確定させることはできない！

$\Leftrightarrow \Delta x = 0, \Delta p = 0$ は不可能):

いわゆる「量子ゆらぎ」の一つ

(場の量子論でも量子ゆらぎは本質)

例: 粒子・反粒子の対生成・対消滅



まとめ

- 20世紀物理学の2大柱

特殊相対論

量子論



場の量子論(素粒子論): 3章

- 特殊相対論→時空の概念を一変させた
- 量子力学→あまりにも奇想天外クレイジー
(しかし実験事実と完璧に合う！)

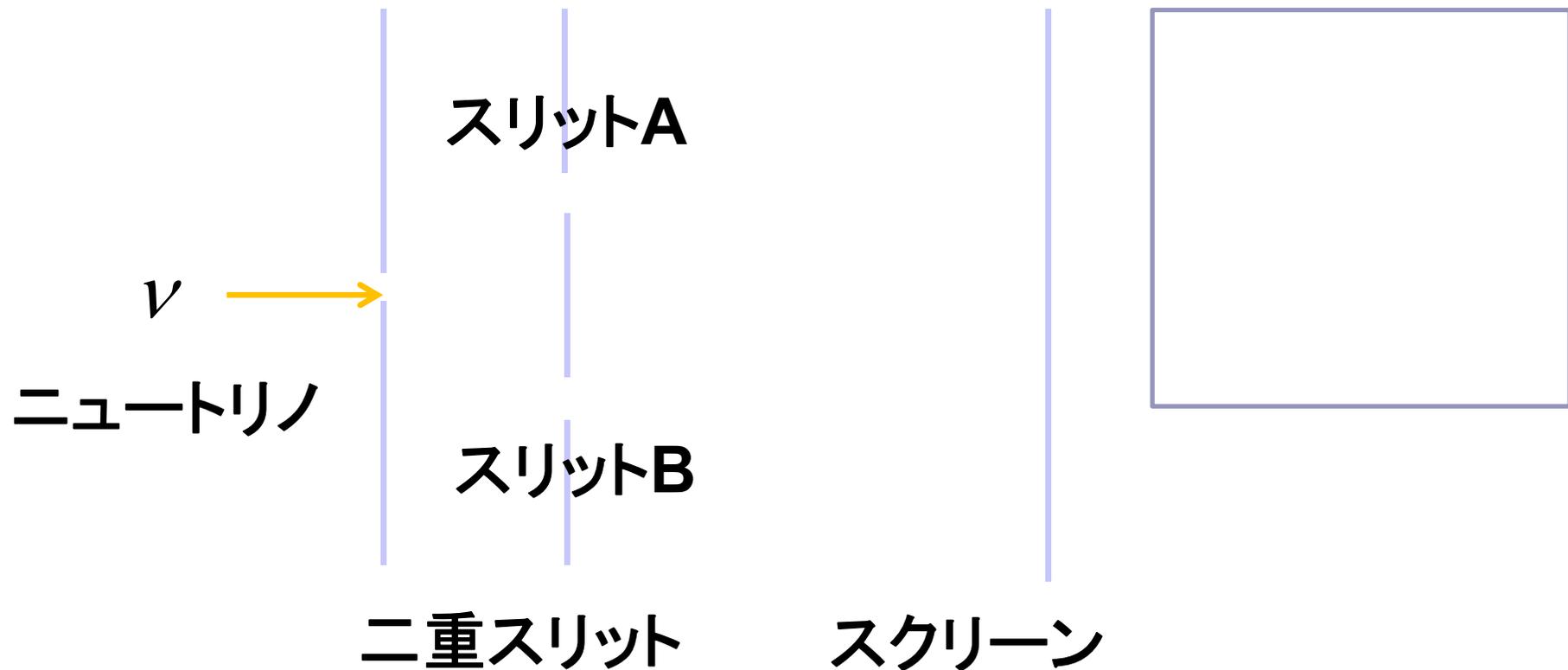
(例) 水素原子のエネルギースペクトル問題を完全に解いた。(実験と完全一致！)



by Niels Bohr [21]

☆ここで緊急^{仮想}実験開催☆

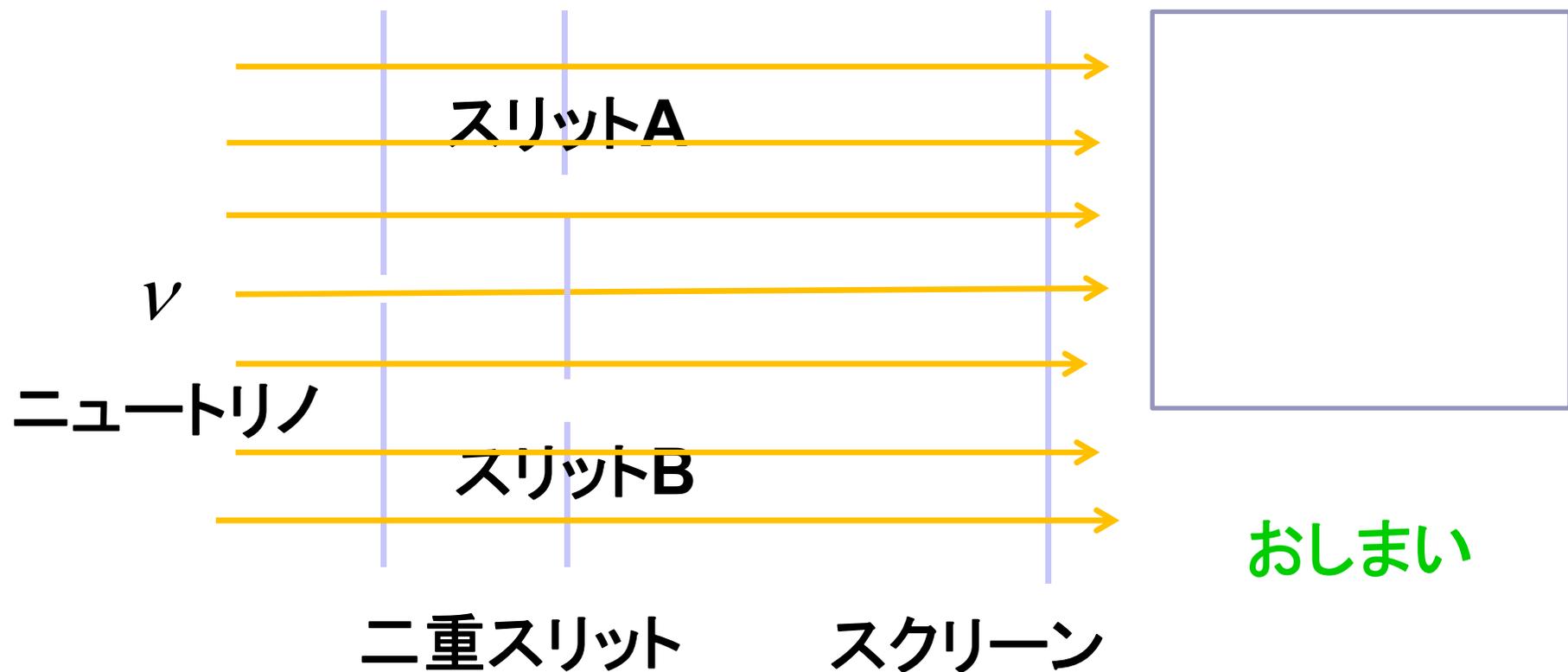
- これをニュートリノに対してやってみよう！
ニュートリノの二重スリット実験(世界初??)



☆ここで緊急^{仮想}実験開催☆

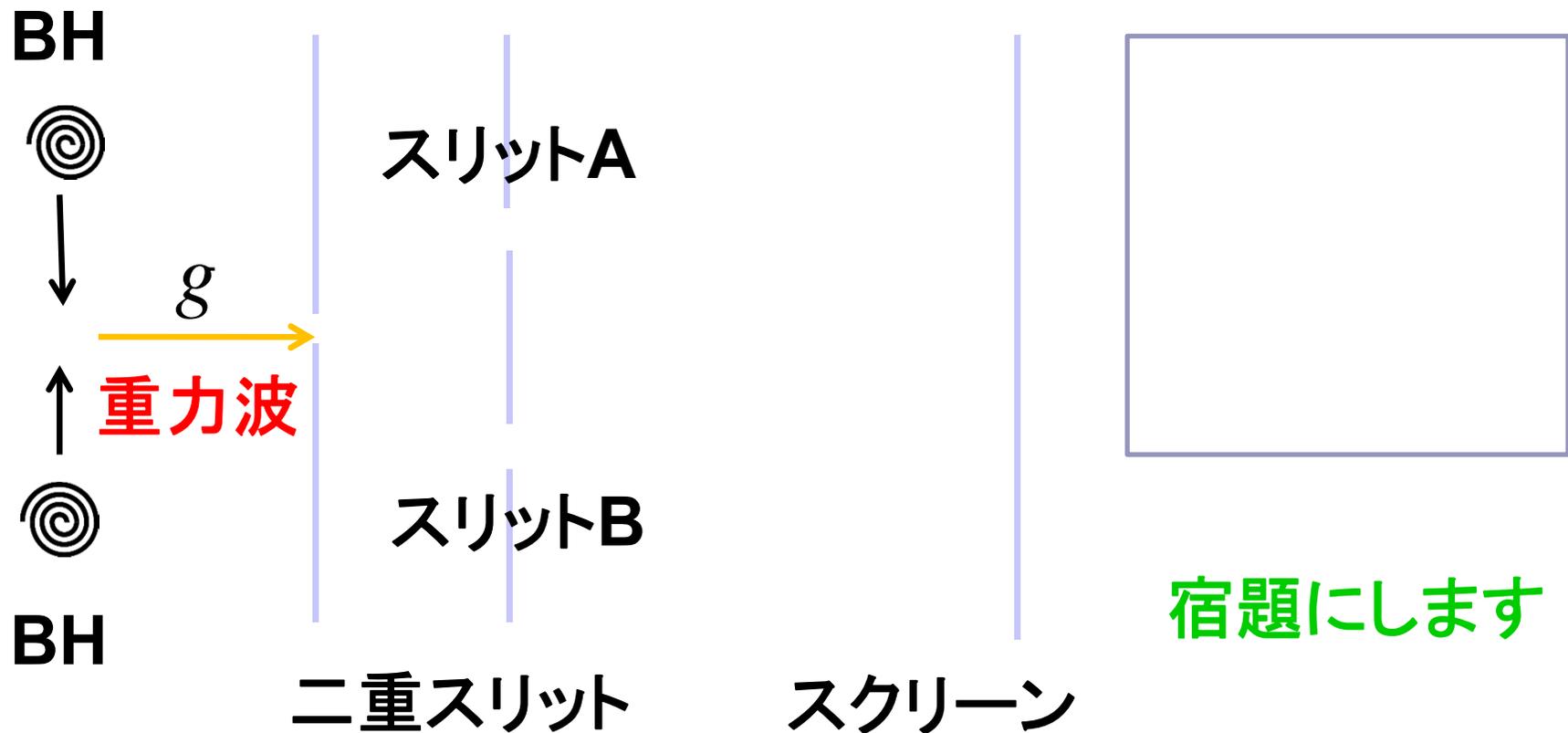
- これをニュートリノに対してやってみよう！
ニュートリノの二重スリット実験(世界初??)

(ほぼ) 素通り



☆でもさらに超緊急追加^{仮想}実験開催☆

- これを**重力波**に対してやってみよう！
重力波の二重スリット実験（世界初??）



2.3 ブラックホール物理学

cf. [江][H]

- **アインシュタイン方程式(重力の古典論) (祭) :**

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

右辺: 物質(星)の分布
左辺: 時空の曲がり具合

$g_{\mu\nu}$ (リーマン計量) についての2階の微分方程式

- **シュワルツシルト・ブラックホール解(球対称) (祭)**

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (G = 1, c = 1 \text{ とした})$$

$$= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

r : 原点からの距離

M : BHの質量

● シュワルツシルト・ブラックホール解(球対称) ⁴⁷

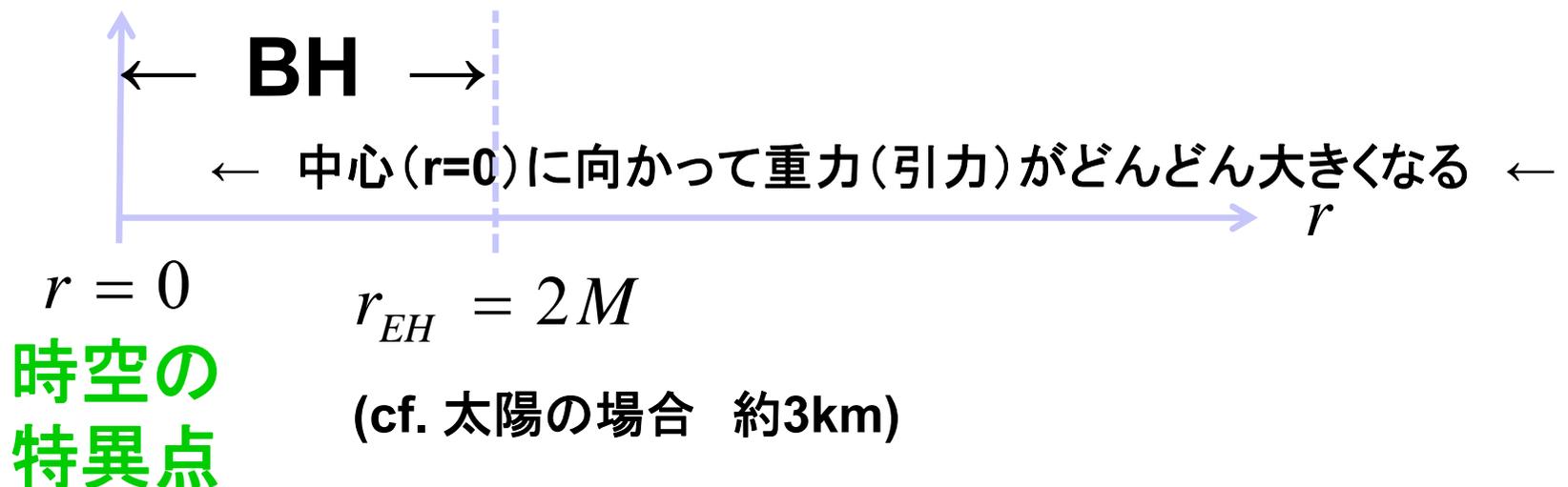
$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

r : 原点からの距離

M : BHの質量

$r = 2M$ ($=: r_{EH}$) : **事象の地平線(Event Horizon=EH)**

$r < r_{EH}$ の領域では光さえも逃れられない！
(EHの内部=ブラックホール)



ブラックホール(Black Hole=BH)研究の歴史

- 1915年: アインシュタインの一般相対論
- 1916年: シュワルツシルトBH解
- 1939年: 星の重力崩壊によるBHの形成
- 1965年: カー・ニューマンBH解
- 1965年～1975年: **黄金時代**(特異点定理・無毛定理・一意性定理・面積定理・・・)
[ペンローズ・ホーキング]
- 1972年: ブラックホール熱力学
- 1975年: ホーキング輻射の発見
- ...
- 1996年～: 超弦理論によるBH熱力学の解明: 3.3節



Oppenheimer
ウィキペディア[22]



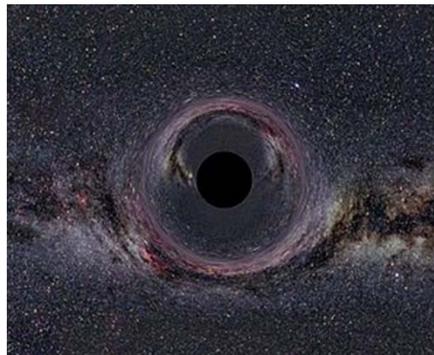
Roger Penrose
ウィキペディア[23]

ブラックホールはそもそもあるのか？

- はくちょう座X-1(強いX線の放射源)

cf.「慶永十五年(1408年)六月二十一日戌戌客星あらわる。天文博士 某、凶兆八ヶ条を奏す」
[続史愚抄三十二]

- 銀河中心の超巨大ブラックホール(太陽の1億倍程)



Ute Krausによる
シミュレーション
画像[24]

- 2つのブラックホール衝突による重力波の検出！

ブラックホールの性質

- **無毛定理**: ブラックホールには「毛」(個性)がない [カーター、ホーキング、イスラエル、ロビンソン]

ブラックホールを特徴づけるパラメータは
M(質量)、J(角運動量)、Q(電荷)のみ。

- **面積定理** [ホーキング]

ブラックホールの事象の地平線の面積Aは
時間とともに減少しない

(例) シュワルツシルトBH $A = 4\pi r_{EH}^2 = 16\pi M^2$

ブラックホールの性質

ブラックホール熱力学

[バーディーン、カーター、ホーキング]

	普通の熱力学	BH熱力学
第0法則	熱平衡において温度 T はいたるところ一定	定常BHにおいて表面重力加速度 κ はいたるところ一定
第1法則	下記(i)	下記(ii)
第2法則	エントロピー S は増大する	EHの面積 A は増大する
第3法則	$T=0$ は実現しない	$\kappa=0$ は実現しない

$$(i) \delta E = T \delta S + \text{work terms} \quad (ii) \delta M = \frac{\kappa}{2\pi} \delta \left(\frac{A}{4} \right) + \text{work terms}$$

- ・ブラックホールのエントロピー: $S = \frac{1}{4} A$ cf.[ベケンシュタイン]
- ・上記の議論はただの類似(似ているというだけ)!
- ・BHの温度って何? 熱放射するの??
- ・BHのエントロピーって何? おいしいの?

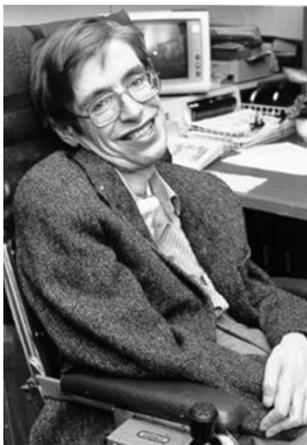
ホーキング輻射

- ブラックホールはそんなに「黒く」ない！

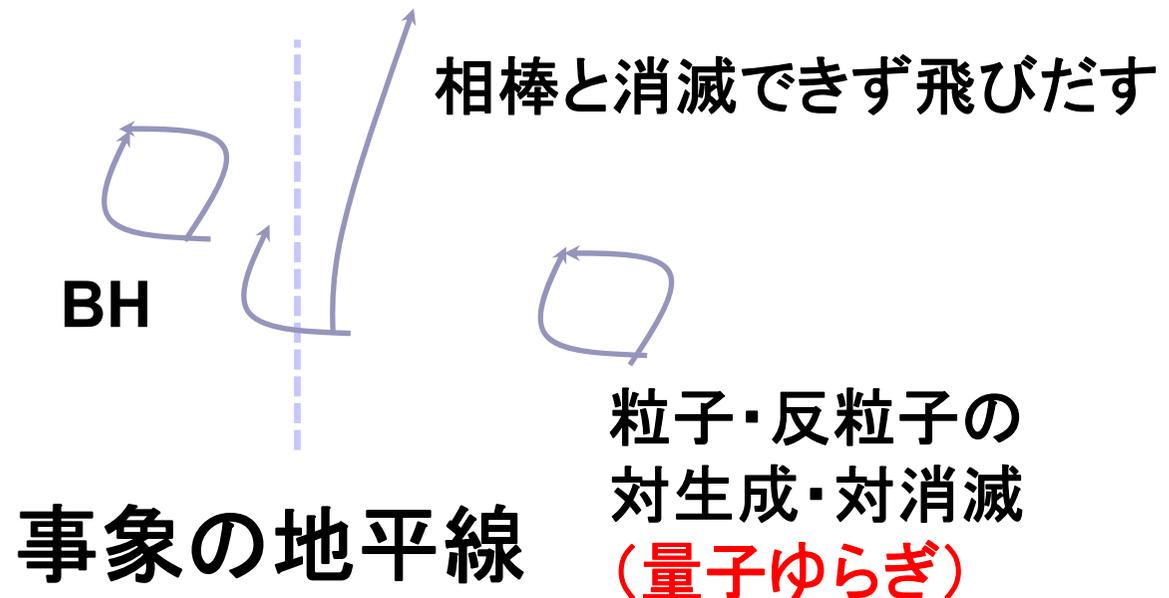
ブラックホールは**熱放射**をする！ [ホーキング、1974年]
(吸い込むだけではない！)

設定：ブラックホール時空を背景として固定し、
その上で物質場を量子化する

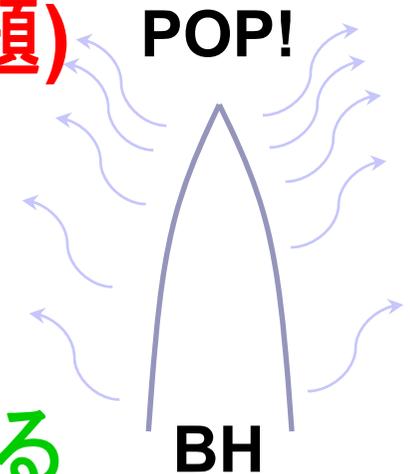
直観的説明：



Steven
Hawking
ウィキペ
ディア[25]



- 注：量子力学に従う物質場はユニタリな時間発展をする(因果律を守り過去から未来へ情報を保つ)
- シュワルツシルトBHの温度： $T = \frac{1}{8\pi M}$ (祭注：BHの比熱は負！)
熱放射によりエネルギー(質量)を失う
→ 温度が上がって放射が激しくなる → BHの蒸発
- BHに吸い込まれた物質の情報は一様なホーキング放射となり、蒸発後情報損失が起こるのでは？
(ブラックホールの情報損失問題：大問題)
- 2つの立場：
 - (i) 量子力学は破たんし情報は損失する
(ホーキングはこちらに賭けた)
 - (ii) 量子力学は破たんせず情報は保たれる
(プレスキルはこちらに賭けた) --- 続く



3. 素粒子論と現代数学

宇宙に関する素朴な疑問と重要な事実

- **素朴な疑問**: 宇宙はなぜ生まれたのか? どのように進化してきたのか? 宇宙が生まれる前は何かあったのか? このあと宇宙はどうなるのか?
- **事実(i)** 宇宙は有限サイズである
(cf. オルバーズのパラドックス「夜空はなぜ暗い?」)
- **事実(ii)** 宇宙は膨張している
(cf. ハッブルの発見「すべての星は地球から遠ざかっている。しかも遠いほど速い。」)
- (i)&(ii) → **ビッグバンの存在を示唆**

素粒子論からの一つのアプローチ

- まず相互作用の種類で素粒子の理論を分類：

	重力 graviton	電磁気力 photon	弱い力 weak boson	強い力 gluon
古典論 (マクロスケール)	アインシュタイン の一般相対論	マクスウェルの 電磁気学	NONE	NONE
量子論 (ミクロスケール)	弦理論? 不明	QED 大成功	WS 大成功	QCD 大成功

すべての種類の相互作用を含む！ → 「素粒子の統一理論」

ビッグバンの理解にはここが必要！
ブラックホールの理解にも必要！

3.1 素粒子物理学(標準模型関連)

素粒子物理学のはじまり(1930~40年代)

- 理論と実験の素晴らしい二人三脚

宇宙線の観測→新粒子の発見

理論の進展→新粒子の予言

- 陽電子(ディラックが1928年に理論から予言・アンダーソンが1932年に発見)

- パイ中間子 (湯川秀樹が1934年に理論から予言・パウエルが1947年に発見)

- ニュートリノ(パウリが実験事実から1930年に予言・ライネスとカワンが1956年に発見)



泡箱での粒子秘跡
泡箱TEEシャツ[26]



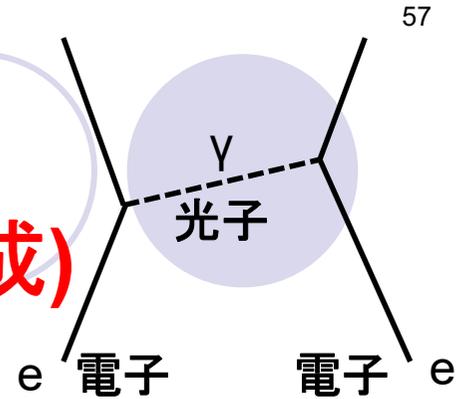
湯川秀樹
ウィキペディア[27]



パウリ
[28]

電磁相互作用の理論

- 古典論 = マクスウェルの電磁気学(完成)
- 量子論 = 量子電磁力学(Quantum ElectroDynamics=QED) 「世界一正確」な理論!
cf.木下東一郎氏の計算(スライドp13)
- 1948年:くりこみ理論の完成(実験との比較が可能に)
[ファインマン、シュウィンガー、朝永振一郎]
- ゲージ原理(後述)の立場では、 $U(1)$ ゲージ理論



Paul Dirac
Wikipedia[29]



Richard Feynman
Wikipedia[30]



Julian Schwinger
Wikipedia[31]



朝永振一郎
ウィキペディア[32]

ゲージ原理



YangMills60
HP[33]

ワイル[34]

- 内部対称性の局所化とゲージ場の導入
- 対称性の表現として群Gの言葉を用いる
- 1954年: ヤン・ミルズ理論(祭) (cf. 内山龍雄)



$$L = -\frac{1}{4g^2} \text{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu$$

電場・磁場の拡張

ゲージ場 $A_\mu : N \times N$ 行列 (最初に提唱されたのはN=2の場合)

- ヤン・ミルズ理論のくりこみ可能性の証明

G=U(1)(=電磁気学): 1948年(前述)

G=SU(N): 1971年 [トフーフト・ベルトマン]

- ヤン・ミルズ理論の困難: ゲージ場の質量はゼロでなければならない!

ヒッグス機構



マイスナー効果
ウィキペディア[35]

- 超伝導のBCS理論:電子のペア(クーパー対)が凝縮して、超伝導状態となり、光子が質量を持つ)
[バーディーン、クーパー、シュリーファー, 1957年]

- 超伝導の本質は対称性の自発的破れにあり
(南部陽一郎)→素粒子論に適用



南部陽一郎
工作舎HP[36]

- ヒッグス場の導入(1964年)

ヒッグス場が凝縮して真空期待値を持つ

→ 対称性が自発的に破れて

ゲージ場(の一部)が質量を持ちうる！

「ゲージ場が南部ゴールドストーン・モードを食べて重くなった」

弱い相互作用の理論(核分裂を引き起こす力)

- 量子論(1967年頃)=グラシヨウ・ワインバーグ・サラム(GSW)の理論
- ゲージ原理の立場では、 $SU(2) \times U(1)$ ゲージ理論
- ヒッグス機構によってゲージ場が質量獲得(W,Z)
- 1971年のくりこみ可能性証明により一挙注目



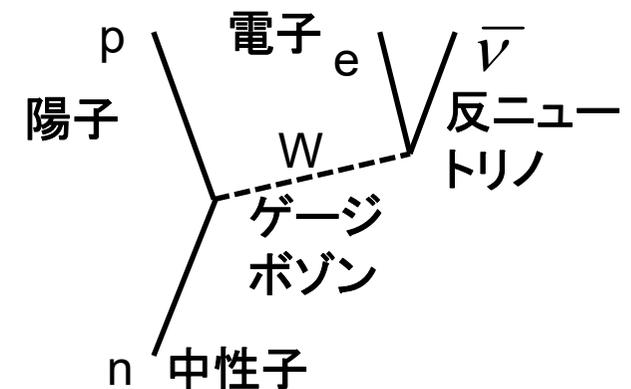
Sheldon Glashow [37],



Abdus Salam [38],



Steven Weinberg [39]



強い相互作用の理論(陽子を核内に収める力)

- 量子論 = 量子色力学(Quantum ChromoDynamics=QCD)
- ゲージ原理の立場では、SU(3)ゲージ理論

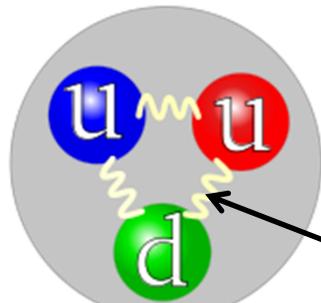
1964年:クォーク模型(ゲルマン)

陽子・中性子などは3つのクォークから成る
(電磁気の意味での)電荷の単位は1/3

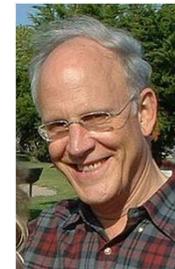
「色荷」という別種のチャージを持つ(赤・青・緑 3種)

ゲルマン

Novel財団HP[40]



u(アップ) クォークの電荷: $+2/3$
 d(ダウン) クォークの電荷: $-1/3$
 色荷の合計 = 白色で中性(安定)
 グルーオン(ゲージ粒子:色荷を持つ)



[41]



[42]



[43]

陽子 ウィキペディア[40]

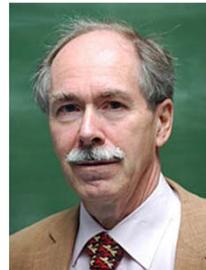
by グロス(左)、ポリツァー(中)、ウィルチェック(右)

- 1973年:漸近自由性(クォークは単独で取り出せない)

ゲージ理論と双対性

- 電磁双対性: 以下の入れ替えで理論が「等価」
弱結合理論 ↔ 強結合理論、素粒子 ↔ ソリトン
- モノポール(単磁子): ソリトン的一种
(例) ディラック・モノポール、トフーフト・ポリヤコフモノポール

トフーフト
ウィキペディア[44]



ポリヤコフ
ウィキペディア[45]

- インスタントン(瞬間子): 4次元ユークリッド空間に住む「ソリトン」。非摂動論的効果の理解に不可欠
- ゲージ理論 = 数学のベクトル束の理論(接続・曲率)
インスタントン・モノポールは数学的にも非常に重要な対象

ADHM(Atiyah-Drinfeld-Hitchin-Manin)構成法

ゲージ理論の数学(ベクトル束)の最高峰の成果

4次元ASDヤン・ミルズ方程式

ADHM方程式(≡0次元ASDYM)

$$\begin{aligned} F_{z_1 \bar{z}_1} + F_{z_2 \bar{z}_2} &= 0 \\ F_{z_1 z_2} &= 0 \end{aligned} \quad N \times N \text{ PDE}$$

$$\begin{aligned} [B_1, B_1^+] + [B_2, B_2^+] + I I^+ - J^+ J &= 0 \\ [B_1, B_2] + I J &= 0 \end{aligned} \quad k \times k \text{ 行列方程式}$$

1:1

解: インスタントン
($G=U(N)$, $C_2=k$)

解: ADHMデータ
($G='U(k)'$)

$$A_\mu : N \times N$$

$$B_{1,2} : k \times k, \quad I : k \times N, \quad J : N \times k$$

難

易

ポリヤコフ曰く「現代数学が役に立つ瞬間を初めてみた」

半分冗談

素粒子の標準模型

- 相互作用: $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ ゲージ理論
- 物質: 3世代のクォーク・レプトン (小林・益川理論含)
- ヒッグス場
- 標準模型のラグランジアン (祭):



小林誠・益川敏英
ともに[46]



CERN Equation T-shirt
CERN HP[47]

巨大加速器@CERN(スイス、ジュネーヴ)



CERN全貌 HERMETICS, NEWS, SCIENCE, TECHNOLOGYより[48] 直径約10km!



ATLAS実験検出器のレゴ模型
[名古屋大学ノーベル賞展示室]
(講演者撮影)
長さ約44m(実物が)

素粒子の標準模型の限界

- ニュートリノの質量がゼロになってしまう
(実際はノンゼロ by 梶田さん達の観測結果)
- 重力相互作用を記述しない
- なぜ3世代分のクォーク・レプトンから成るのか？
- なぜ質量・電荷が現在のようにになっているのか？
- ...
- →より根源的な新しい理論・理解が必要
(超対称性、大統一理論、弦理論、...)
- 超対称性: ボゾンとフェルミオンを入れ替えても
理論が変わらないという(大きな)対称性

ボゾン: スピンが0, 1, 2(整数)の粒子
 フェルミオン: スピンが1/2, 3/2(半奇数)の粒子

重カ子は
スピン2



ウィットンのモース理論(1982年)

- 惑星の形(トポロジー)を求めるには
 - 惑星に高さ関数だけ乗っけるのではなく
 - 超対称性ゲージ理論を丸ごと乗っければいい!

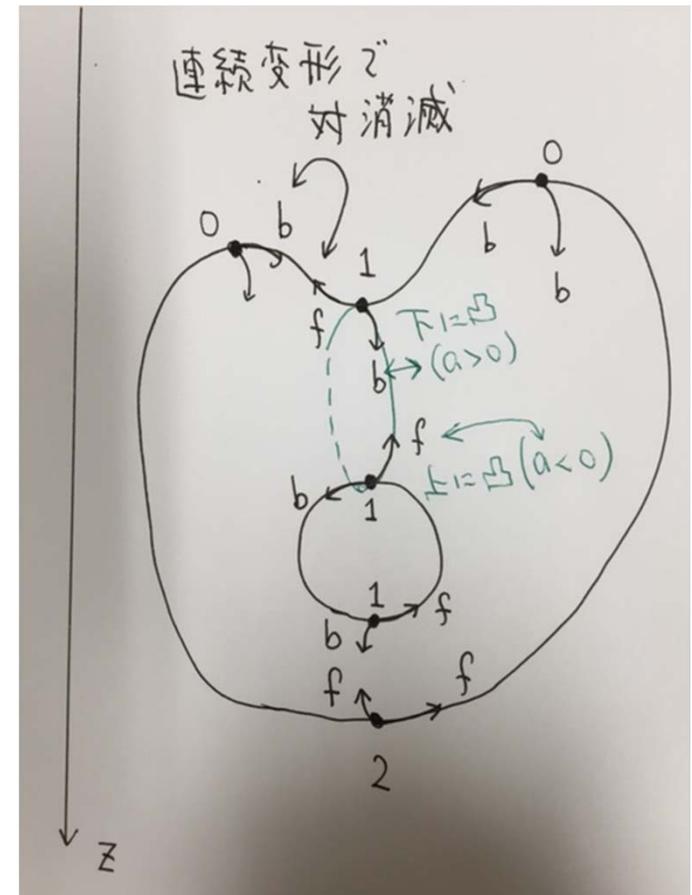
m_p : 臨界点に住む $E \doteq 0$ の
フェルミオンの数

物理量: $Tr (-1)^F =$

$$\begin{aligned} & (-1)^2 + (-1)^1 + (-1)^1 \\ & + (-1)^1 + (-1)^0 + (-1)^0 \\ & = 0 = \chi(T^2) : \text{位相不変量} \end{aligned}$$

※物理からの新しい視点と局所化のアイデア

→その後の数学・物理学に絶大な影響!



理論の詳細ト(祭)

● ハミルトニアン(量子力学バージョン)

$$H = Q^* Q + Q Q^*$$

微分(資料2ページ目微分の例3)!

● 基底状態

$$Q^* \varphi_F = \left(\frac{d}{dx} + W'(x) \right) \varphi_F = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_F = e^{W(x)}$$

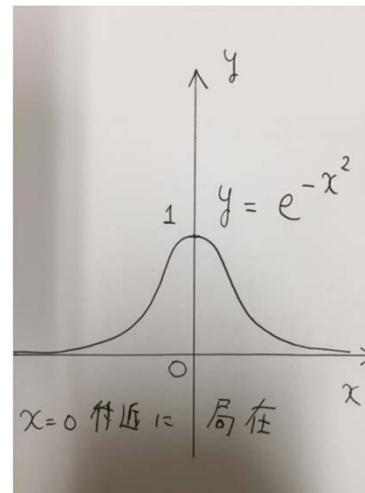
$$Q \varphi_B = \left(\frac{d}{dx} - W'(x) \right) \varphi_B = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_B = e^{-W(x)}$$

● 臨界点近傍で(ある断面に沿って) $W(x) \cong ax^2$

$$a > 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_B = e^{-ax^2}$$

$$a < 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_F = e^{+ax^2}$$

これが規格化可能解



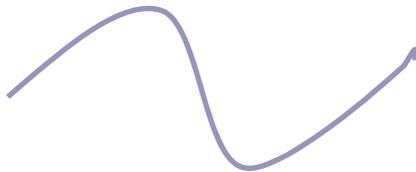
詳しくは原論文を読もう!

Edward Witten,
 "Supersymmetry
 and Morse theory,"
 J. Differential Geom.
 Vol.17(1982)p661-692.

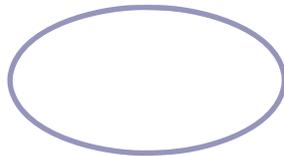
3.2 弦理論と現代数学

cf. [G][大3]

- 弦理論: 万物は弦(string)からできている
- 弦のさまざまな振動モード \leftrightarrow さまざまな素粒子



開弦(open string) \leftrightarrow 素粒子



閉弦(closed string) \leftrightarrow 重力

- すべての素粒子を含み、然るべき対称性を備える
- ブラックホールの理解に重要な知見を与えた(重力の量子論として本領発揮?)
- 新しい数学を次々に「予言」

弦理論のはじまり

- 1960年代: 双対共鳴模型

核内複合粒子の実験事実の説明

物理的意味付け→弦！

[南部・後藤・サスカインド・ニールセン・・・(1970年頃)]

- 1974年: 重力を含む！ [米谷・シャーク・シュワルツ]

- さまざまな困難

10次元時空でしか定義されない

(現実はもちろん4次元！6次元分はどこへ行った？)

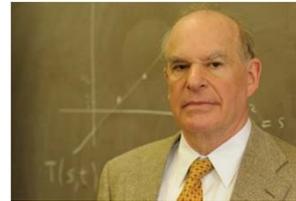
実験による直接的検証はほぼ不可能？

量子論的な問題(アノマリー等)

第1次ストリング革命

- 1984年: アノマリー相殺メカニズムの発見

by グリーン[49]・シュワルツ[50]



- 1980年代後半: カラビ・ヤウ(CY)空間コンパクト化

10次元 = 4次元時空 + 6次元CY空間(内部空間)

素粒子の標準模型の実現・現象論への応用

ミラー対称性の発見 → ホモロジカル・ミラー予想

摂動論的弦理論の完成(5種類)

by コンチェヴィッチ
(1994年) [51]

その後の数学に革命的影響



位相的場の理論(1982~1989年)

- トポロジカル・ツイストという魔法をかける
- 超対称場の理論 → 位相的場の理論(おもちゃ)
- BPS状態(エネルギー極小状態)だけを拾う理論
- 物理量が位相不変量になる(距離依存性なし!)

(例) Wittenのモース理論: 分配関数 = オイラー数

Donaldson不変量 → 4次元図形の精密な分類

- アティヤにより数学的に公理化される
- 位相的弦理論の計算方法

の確立(93年)

[ベルシャドスキー・チェコツティ
・大栗・バッフア]



Michael Atiyah
[53]



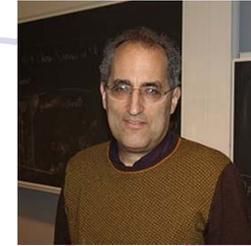
Simon
Donaldson
[52]

第2次ストリング革命

- 1994年: 双対性の進展



Nathan Seiberg [54]



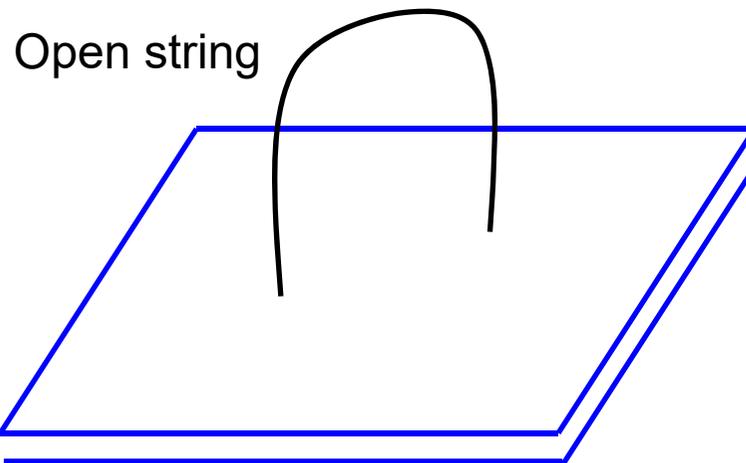
Edward Witten [55]

ザイバーグ・ウィッテン理論 → 幾何学へ多大な影響

S双対性テスト[バッフア・ウィッテン] → 数論との接点

- 1995年: M理論の提唱[ウィッテン]

- 1995年: Dブレーン(弦理論のソリトン)ポルチンスキー[56]

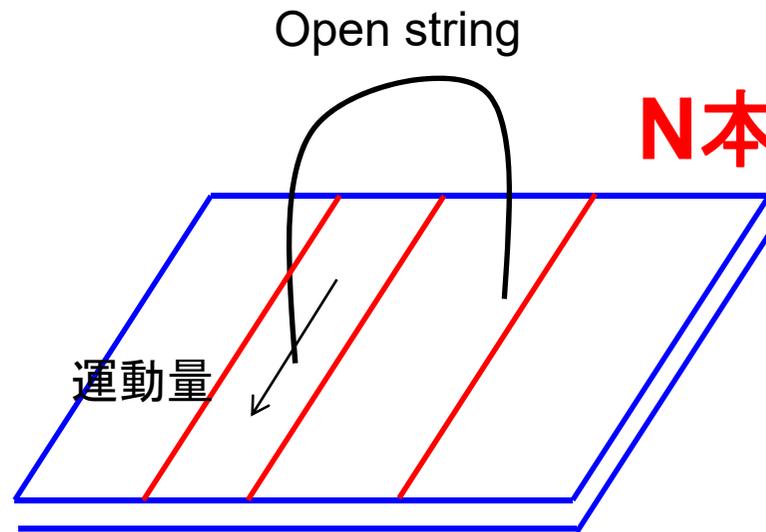


N枚重なった
Dpブレーン
⇒ (p+1)次元の
U(N)ゲージ理論
が乗っかる



Dpブレーン: 空間p次元に広がった「板状」物体

- 1996年：Dブレーンを用いたブラックホール・エントロピーの統計力学的理解
[ストロミンジャー・ヴァッフア],
[キャラン・マルダセナ]
- ・Dブレーンを大量に重ねるとブラックホールになる
- ・開弦の自由度の数え上げでエントロピーの統計力学的導出が可能(エントロピーの微視的起源)



N本のD1ブレーン(円に巻き付く)

この状況は5次元のBH:

$S=(EH\text{の面積})$

一方開弦の自由度の計算:

$S=(\text{求まる})=\text{完全一致!}$

N枚のD5ブレーン(5方向が円に巻き付く)

ADHM構成法再訪

ゲージ理論の数学の最高峰の成果の一つ

4次元ASDYang-Mills方程式

ADHM方程式(\equiv 0次元ASDYM)

$$F_{z_1 \bar{z}_1} + F_{z_2 \bar{z}_2} = 0$$

$$F_{z_1 z_2} = 0 \quad N \times N \text{ PDE}$$

$$[B_1, B_1^+] + [B_2, B_2^+] + I I^+ - J^+ J = 0$$

$$[B_1, B_2] + I J = 0$$

$k \times k$ 行列方程式

1:1

解: インスタントン
($G=U(N)$, $C_2 = k$)

解: ADHMデータ
($G=U(k)$)

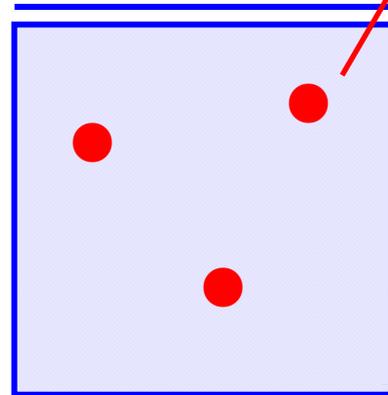
BPS条件

BPS条件

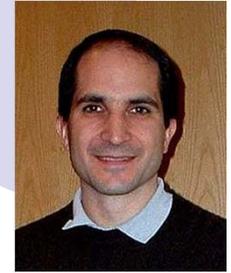
Dブレーンから
記述すると
自明!

N枚のD4 ブレーン

k個のD0 ブレーン



1997年: AdS/CFT対応(マルダセナ)



Juan
Maldacena
[57]

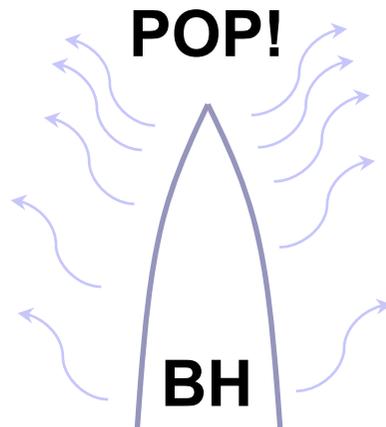
- ホログラフィック原理の具体的実現

バルクの $(d+1)$ 次元重力理論(AdS空間)

=境界の d 次元ゲージ理論(共形場理論)

- BPS状態については検証完了
- Non BPS状態について研究進展中
- BHの情報損失問題について重要な知見

バルクの重力理論 ← 等価 → 境界のゲージ理論



ユニタリな
時間発展
(情報を保つ)

● ブラックホールの情報損失問題再訪

量子力学に従う物質場はユニタリな時間発展をする
(因果律を守り、過去から未来へ情報を保つ)

ブラックホールに吸い込まれた物質の情報は一様な
ホーキング放射となり、情報損失が起こるのでは？

→2つの立場:このような状況では

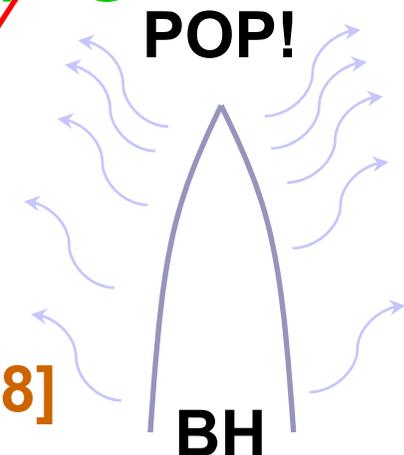
(i) 量子力学は破たんし情報は損失する
(ホーキングはこちらに賭けた)

(ベースボール)
百科事典

(ii) 量子力学は破たんせず情報は保たれる
(プレスキルはこちらに賭けた)

2004年、ホーキングは自ら
情報が損失しないという

研究発表を行った。ホーキングの負け[58]



以後の発展(主に現代数学との関連)

- 1999年: 非可換空間上のゲージ理論
[ザイバーク・ウィッテン] 数学者達
- 2002年: ネクラソフ予想 → が解決 [中島・吉岡]等
- 2004年: 大栗・ストロミンジャー・バッファ予想
(BHエントロピーについての公式)
- 2006年: カプスチン・ウィッテン → 電磁双対性とラングランズ双対性との深い深い関係(弦理論山と数論山が高い高いところにつながっている!?) cf.[F]
- 2008年: コンチェヴィッチ・ソイベルマン壁越え公式
- 2009年: アルデイ・ガイオット・立川予想 → 数学者達が解決
- ……以後ひたすら(果てしなく?)続く

素粒子論研究の現在の状況
それぞれ好き勝手に山登りしている
(物理山と数学山は予想以上に高く楽しい)



みなさんもぜひ一緒に登りましょう！
(ちょっとしたトレッキングもOK)

参考文献一覧

- [江] 江里口良治「時空のゆがみとブラックホール」(培風館)
- [深] 深谷賢治編「ミラー対称性入門」(日本評論社)
- [F] エドワード・フレンケル「数学の大統一に挑む」(文春)
- [G] ブライアン・グリーン「エレガントな宇宙」(草思社)
- [橋] 橋本幸士「超ひも理論をパパに習ってみた」(講談社)
- [H] ホーキング「宇宙を語る」(ハヤカワ文庫)
- [HKKPTVVZ] K.Hori 他, ``Mirror Symmetry,`` (AMS)(祭)
- [大1] 大栗博司「重力とは何か」(幻冬舎)
- [大2] 大栗博司「強い力と弱い力」(幻冬舎)
- [大3] 「大栗博司先生の超弦理論入門」(講談社)
- [P] Roger Penrose, ``The Road to Reality,`` (Vintage)
- 雑誌「数理科学」&別冊数理科学&雑誌「数学セミナー」の関連記事も楽しく参考になる。(大学入学後のお勧め)

出典一覧

- [1] <https://www.kek.jp/ja/NewsRoom/Highlights/20120727150000/>
- [2] <https://ja.wikipedia.org/wiki/プラトン>
- [3] <http://www.wallpaperlink.com/bin/0710/03956.html>
- [4] http://kabegami.mobi/lib/asia/kazakhstan/03956_480x640.html
- [5] <http://hitachikaihin.jp/spot/spot-829.html>
- [6] <http://ozsons.jp/math10pythagoras.htm>
- [7] <https://ja.wikipedia.org/wiki/ジョージ・マロリー>
- [8] http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~sg.www/award_s/medal11.html
- [9] https://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton
- [10] <https://ja.wikipedia.org/wiki/ジェームズ・クラーク・マクスウェル>
- [11] <https://ja.wikipedia.org/wiki/ルートヴィッヒ・ボルツマン>
- [12] <https://ja.wikipedia.org/wiki/ダフィット・ヒルベルト>
- [13] <https://ja.wikipedia.org/wiki/アンリ・ポアンカレ>
- [14] https://www.ushio.co.jp/jp/technology/glossary/material/attached_material_01.html
- [15] <https://ja.wikipedia.org/wiki/アルベルト・アインシュタイン>
- [16] https://en.wikipedia.org/wiki/Max_Planck
- [17] <http://www.hitachi.co.jp/rd/portal/highlight/quantum/doubleslit/index.html>
- [18] <https://ja.wikipedia.org/wiki/エルヴィン・シュレーディンガー>
- [19] <https://ja.wikipedia.org/wiki/マックス・ボルン>

- [20] <https://ja.wikipedia.org/wiki/ヴェルナー・ハイゼンベルク>
- [21] <https://ja.wikipedia.org/wiki/ニールス・ボーア>
- [22] <https://ja.wikipedia.org/wiki/ロバート・オッペンハイマー>
- [23] <https://ja.wikipedia.org/wiki/ロジャー・ペンローズ>
- [24] <http://www.spacetime.travel/expeditions/expeditions.html>
- [25] <https://ja.wikipedia.org/wiki/スティーヴン・ホーキング>
- [26] <https://www.zazzle.co.jp/泡箱Tシャツ-235053590272616960>
- [27] <https://ja.wikipedia.org/wiki/湯川秀樹>
- [28] <https://ja.wikipedia.org/wiki/パウリ効果>
- [29] https://en.wikipedia.org/wiki/Paul_Dirac
- [30] https://en.wikipedia.org/wiki/Richard_Feynman
- [31] https://en.wikipedia.org/wiki/Julian_Schwinger
- [32] <https://ja.wikipedia.org/wiki/朝永振一郎>
- [33] <http://www.ntu.edu.sg/ias/PastEvents/2015/Yang-Mills60/Pages/default.aspx>
- [34] <https://ja.wikipedia.org/wiki/ヘルマン・ワイル>
- [35] <https://ja.wikipedia.org/wiki/マイスナー効果>
- [36] <http://www.kousakusha.co.jp/NEWS/weekly20081014.html>
- [37] https://en.wikipedia.org/wiki/Sheldon_Lee_Glashow
- [38] https://en.wikipedia.org/wiki/Abdus_Salam
- [39] <https://ja.wikipedia.org/wiki/スティーヴン・ワインバーグ>

- [40] http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1969/gell-mann-bio.html
- [41] <https://ja.wikipedia.org/wiki/デイビッド・グロス>
- [42] <http://www.theory.caltech.edu/people/politzer/>
- [43] <https://ja.wikipedia.org/wiki/フランク・ウィルチェック>
- [44] <https://ja.wikipedia.org/wiki/ヘーラルト・トホーフト>
- [45] http://www.princeton.edu/physics/people/display_person.xml?netid=polyakov
- [46] <https://ja.wikipedia.org/wiki/小林・益川理論>
- [47] <http://design-guidelines.web.cern.ch/equation-range>
- [48] <http://thespiritscience.net/wp-content/uploads/2015/09/5CERN.jpg>
- [49] <http://alchemipedia.blogspot.jp/2009/10/michael-green-frs-physicist-lucasian.html>
- [50] <http://theory.caltech.edu/~jhs/>
- [51] <http://moogry.com/index.php?req=マキシム・コンツェビッチ>
- [52] <https://ja.wikipedia.org/wiki/サイモン・ドナルドソン>
- [53] <https://ja.wikipedia.org/wiki/マイケル・アティヤ>
- [54] <https://ja.wikipedia.org/wiki/ネーサン・サイバーグ>
- [55] <https://ja.wikipedia.org/wiki/エドワード・ウィッテン>
- [56] <https://ja.wikipedia.org/wiki/ジョセフ・ポルチンスキー>
- [57] <https://ja.wikipedia.org/wiki/フアン・マルダセナ>
- [58] <http://math.ucr.edu/home/baez/dublin/>
- [59] <http://www.1wallpaperhd.com/2014/10/hubble-space-wallpaper-03.html>