数学展望 I **第 12 回： 正多面体群のまとめ**

10.1 練習問題

問 1. 次の各問に答えよ.

(1) **ユークリッドの互除法**を用いて, 17 と 682 の最大公約数を求めよ. また, $17x + 682y = 1$ を満たす整数の組 (x, y) を 1 組求めよ.

(2) $22x + 527y = 1$ を満たす整数の組 (x, y) を 1 組求めよ.

(3) $31x + 374y = 1$ を満たす整数の組 (x, y) を 1 組求めよ.

(4) (1) を利用して, 次の条件を満たす整数 n_1 を 1 つ求めよ.

$$\begin{cases} n_1 \equiv 1 & \pmod{17} \\ n_1 \equiv 0 & \pmod{22 \cdot 31} \end{cases}$$

(5) 次の条件を満たす整数 n_2 を 1 つ求めよ.

$$\begin{cases} n_2 \equiv 1 & \pmod{22} \\ n_2 \equiv 0 & \pmod{17 \cdot 31} \end{cases}$$

(6) 次の条件を満たす整数 n_3 を 1 つ求めよ.

$$\begin{cases} n_3 \equiv 1 & \pmod{31} \\ n_3 \equiv 0 & \pmod{17 \cdot 22} \end{cases}$$

(7) a, b, c, k を整数とする. (4),(5),(6) で求めた整数 n_1, n_2, n_3 に対して,

$$N = an_1 + bn_2 + cn_3 + 11594k$$

とおくとき, 次が成立することを確認せよ:

$$N \equiv a \pmod{17}, \qquad N \equiv b \pmod{22}, \qquad N \equiv c \pmod{31}.$$

(8) 次の 3 条件を満たす <u>最小の正の整数</u> N_0 を求めよ:

(a) N_0 は 17 で割ると, 1 余る.
(b) N_0 は 22 で割ると, 21 余る.
(c) N_0 は 31 で割ると, 2 余る.

(注) 上の問題は, **中国式剰余定理**の証明方法を暗示している.

問 2. 平面内で単位円に内接する正６角形 $P_0P_1\cdots P_5$ の合同変換について考える.

A を原点を中心に反時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させる**合同変換**としよう．このとき, 次の問に答えよ.

(1) A を１次変換 (線型変換) を表す行列とみるとき, その表示を求めよ．また, A^k (k は整数) を計算せよ.

(2) P_0 がどこにうつるかに注目すると,

$$\begin{array}{rl} A: & P_0 \to P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_4 \to P_5 \to P_0 \\ A^2: & P_0 \to P_2 \to P_4 \to P_0 \end{array}$$

だから, A, A^2 の**位数**はそれぞれ 6, 3 であることが分かる．同様にして, A^3, A^4, A^5 の位数をそれぞれ計算せよ.

(3) E (単位行列), A, A^2, A^3, A^4, A^5 のうち, 位数が６になるものの個数として, $\varphi(6)$ を求めよ.

(4) 素数 p に対して, $\varphi(p^e) = p^e - p^{e-1}$ (e は正の整数) であることを示せ.

(注)$\varphi(n)$ は**オイラー関数**と呼ばれる (初等整数論において重要な) 数論的関数である．**レポート問題, 問２において次の性質を用いても良い.**

$$\boxed{\ell \text{ と } m \text{ が互いに素} \Longrightarrow \varphi(\ell m) = \varphi(\ell)\varphi(m).}$$

※中国式剰余定理を用いれば (現在の知識でも) 証明することはできる.

(注) 正 n 角形を平面内で動かすと, 上記のように合同変換は回転のみになるが, 正 n 角形を**正２面体**と思うと, n 本の直線に関する折り返し (表と裏をひっくり返す) 合同変換が加わる．実際, x 軸に関する折り返し B を考えると, 折り返しの全体は $B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B$ で与えられる. n 個の回転と合わせて得られる合同変換群を**正２面体群**と呼ぶ.

問 3. 正４面体を単位球に内接させて, その合同変換について考える.

(1) (123) は三角形 $P_1P_2P_3$ の中心と頂点 P_4 を結ぶ直線を**回転軸**とする合同変換である．このことに注意して, $(123)^2 = (132)$, $(123)^3 = e$ を確めよ.

(2) (124)(123) を計算せよ.

(3) ３つの 1次独立な ベクトル $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix}$ の「**向き**」を行列式 $\det(\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2\,\mathbf{v}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$ の**符号**で定める．すなわち, 行列式の値が 3 ならば $+$, 行列式の値が -4 ならば $-$ という風にである．z 軸を中心に角 θ だけ回転させても「向き」は変化しないことを証明せよ.

(4) S_4 の元はすべて互換 (12), (13), (14) の積で書けることを具体的に示せ.

(5) 次の計算を実行せよ.

$$(a)\ (123)(1234) \quad (b)\ (1234)^{-1}(123)(1234) \quad (c)(234)(123) \quad (d)\ (1234)(123)^{-1}$$

(注) **正４面体群は** (４頂点の置換に関する４次対称群 S_4 の部分群として) **４次交代群** A_4 **に一致する**ことが知られている．実際, (123) のような合同変換の他, (12)(34) の型の元も合同変換として実現できることを言えば, A_4 の元がすべて正４面体群に含まれることが分かる．どちらの群も 12 個の元を含むから両者が等しくなるのである.

この証明からは何故 (12) のような合同変換が実現できないか, に関する直接的な説明が得られない．正４面体の合同変換が「向き」を換えないので, A_4 の元に限られることが分かる．レポート問題問３の最後の問題では, 頑張って原点の周りの「一般的な回転」を記述するか, 諦めてやや直観的な説明を付けると良い.

(注) 後半の問題はレポート問題問４に関連した問題で, ４次対称群の一般的性質に関する問題である．このような問題は「代数演習」もしくは「群論演習」にも多く見られる．正６面体群との関連は講義の前半で説明する予定なので省略する.