数学展望 I **第 9 回：正多面体群 (1)**

正 4 面体群を 4 次対称群 S_4 の部分群として実現する.

8.1　正多面体群

定義 8.1. 正多面体 $\mathcal{P}_f$ $(f = 4, 6, 8, 12, 20)$ を $\mathbb{R}^3$ 内の単位球面に内接させる. このとき, 原点を中心とする回転のうち, 頂点を頂点にうつすものを $\mathcal{P}_f$ の **合同変換** と言う.
$\mathcal{P}_f$ の合同変換 σ の逆回転 σ^{-1} も合同変換であり, 合同変換 σ, τ を続けて行なった変換 ($\tau\sigma$ と書く) も合同変換である. さらに, 恒等変換 e (動かさない変換) も合同変換である. このことから, 合同変換全体は (変換の合成に関して)**群** であるという. この群を **正 f 面体群** と呼ぶ. また, 正 2 面体群と合わせてこれらをまとめて **正多面体群** と呼ぶ.

正多面体群をできるだけ分かりやすく記述するのが以下の目的である. 一応, 群の定義を与えておこう.

定義 8.2. 空でない集合 G に演算 $*$ が与えられていて, 次の条件を満たすとき, $(G, *)$ は**群**であると言う.

(1) **結合法則**が成立する:　$a * (b * c) = (a * b) * c \quad (a, b, c \in G)$.

(2) **単位元** e が存在する:　$a * e = e * a = a \quad (a \in G)$.

(3) 任意の元 a の**逆元** b (a^{-1} と書く) が存在する:　$a * b = b * a = e$.

有限個の元を持つ群を**有限群**と言い, そのときの元の個数 $|G|$ を群 G の**位数**[a] と言う.

[a]「元の位数」と関係はあるが, 意味は異なる.

まず, 正多面体群の位数を求めてみよう.

補題 8.3. (p, q) 型の正多面体 $\mathcal{P}_f$ の頂点の数, 辺の数, 面の数をそれぞれ v, e, f とする. このとき, 正 f 面体群 G の位数は,

$$|G| = pf = qv = 2e$$

である. 特に, 正 4 面体群の位数は 12, 正 6 面体群と正 8 面体群の位数は 24, 正 12 面体群と正 20 面体群の位数は 60 である.

実は正 6 面体群と正 8 面体群は位数が同じであるだけでなく, 全く同じである.

補題 8.4. 互いに**双対な正多面体**に対応する群は同型である. すなわち,

$$\begin{aligned} \text{正 6 面体群} &= \text{正 8 面体群} \\ \text{正 12 面体群} &= \text{正 20 面体群}. \end{aligned}$$

8.2　正４面体群は４次交代群

正４面体の頂点を 1, 2, 3, 4 とする．合同変換 σ を行うとき, **各頂点の位置にどの頂点が移されてきたか**を

$$\sigma\colon 1 \to 1, \quad 2 \to 3, \quad 3 \to 4, \quad 4 \to 2$$

のように表そう．頂点の行き先を指定すれば合同変換は定まってしまう．この合同変換を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

と表すことにする．一般に,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix} \quad \{i_1, i_2, i_3, i_4\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

という形の元全体がなす集合を S_4 と書く．S_4 は集合 $[4] = \{1, 2, 3, 4\}$ から自分自身への**全単射**全体のなす集合であり, 次のようなルールで積 (演算) と逆元を定めると, 恒等写像を単位元とする位数が $4! = 24$ の群になる．これを **４次対称群**と言う．

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \tau(1) & \tau(2) & \tau(3) & \tau(4) \end{pmatrix}$$

に対して,

$$\tau \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \tau(\sigma(1)) & \tau(\sigma(2)) & \tau(\sigma(3)) & \tau(\sigma(4)) \end{pmatrix}, \quad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

である．

例 8.5. 次の σ, τ に対して, $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, σ^2, σ^{-1} を求めよ．

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

定理 8.6. 正４面体群は４次対称群 S_4 の 部分群 として ４次交代群 A_4 になる．すなわち, 正４面体群の元は, 次の３つの**型**の計 12 個の元からなる．

型	代表元	元の位数	個数	変換の種類
(1) 型	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	1	1 個	恒等変換
(12)(34) 型	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	2	3 個	面の移動
(123) 型	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	3	8 個	面の回転

問 1. ４次対称群 S_4 にはどのような型の元があるか．