数学展望 I **第 8 回：正多角形の対称性**

正多角形＝正 2 面体の合同変換 (回転, 折り返し) を調べる.

第 5 回までは, **正多面体**を**3 次元の凸多面体**と見て, オイラーの多面体公式を中心に**トポロジー**の視点から考察した. 第 7 回〜10 回では, **正多面体を (球面に内接させて) 自分自身に重なるように回転させる変換 (合同変換) がどれくらいあるか**を考察する. **群論**を道具として用いる.

7.1 正多角形の合同変換

正多角形は平面内にあるので, 「3 次元」の図形ではないが, 球面に内接させて見ると, **表と裏の面を持つ正 2 面体と思う**ことができる！

定義 7.1. $\mathbb{R}^3$ において単位球面に内接する**正 2 面体**で, xy 平面における切り口が正 n 角形のものを $\mathcal{M}_n$ とする. このとき, 次の変換を $\mathcal{M}_n$ の**合同変換**と呼ぶ:

- xy 平面の正 n 角形を回転させて, 頂点を頂点にうつす変換 (**回転**)
- 原点を通る直線に関する 180° の反転のうち, 頂点を頂点にうつす変換 (**折り返し**)

この合同変換の全体を D_{2n} と書いて, **正 2 面体群**と呼ぶ.

例 7.2. 正 4 角形 $\mathcal{M}_4$ の合同変換は,

正 n 角形の頂点を単位円周の n 等分に取る:

$$P_i\left(\cos\frac{2k\pi}{n}, \sin\frac{2k\pi}{n}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

P_n を反時計回りに $\dfrac{2\pi}{n}$ だけ回転させて P_1 にうつすような回転を A とし, x 軸を回転軸とする折り返しを B としよう. さらに, A または B という合同変換 $C_1, \ldots, C_\ell$ をこの順に続けて行う合同変換を $C_\ell \cdots C_2 C_1$ と書くとき,

定理 7.3. 切り口が正 n 角形である正 2 面体 $\mathcal{M}_n$ の合同変換の全体は, 次の $2n$ 個である:

$$E, A, A^2, \ldots, A^{n-1}, \quad B, AB, \ldots, A^{n-1}B.$$

ただし, E を恒等変換 (全く動かない変換) とする. また, 次の関係がある.

$$A^n = E, \quad B^2 = E, \quad BA = A^{-1}B (= A^{n-1}B).$$

実際, A, B は次の 2 次正方行列と思うことができる:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \ (ここに, \theta = \frac{2\pi}{n}), \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

<u>**例**</u> **7.4.** 次の合同変換を A, B の積の形に表せ.

7.2　元の位数

<u>**定義**</u> **7.5.** 正 2 面体群 D_{2n} の元 C に対して, $C^k = E$ となる最小の正の整数 k を元 C の**位数 (order)** と呼び, $\mathrm{ord}\,(C)$ と書く.

次の結果は行列の計算でも確められる.

<u>**定理**</u> **7.6.** 正 2 面体群の各元の位数は,

$$\mathrm{ord}\,(E) = 1, \quad \mathrm{ord}\,(A^\ell) = \frac{n}{(n,\ell)} \ (\ell = 1, 2, \ldots, n-1), \quad \mathrm{ord}\,(A^\ell B) = 2 \ (\ell = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

ただし, (n,ℓ) は n と ℓ の最大公約数を表す.

<u>**問**</u> **1.** 正 5 角形において, $\frac{6\pi}{5}$ の回転 (A^3) を何回か続けて行うとき, P_5 から出発して P_2 に到達するのは何回目か？また, 何回でもとの P_5 に戻るだろうか？　また, 正 6 角形ではどうか？

上の定理によれば, $\mathrm{ord}\,(A^3) = \frac{5}{(5,3)} = \frac{5}{1} = 5$ である. 実際, <u>3 と 5 は互いに素だから, $3x + 5y = 1$ となる整数 x,y が取れる.</u> 例えば, $x = 2$, $y = -1$ とすればよい. これより,

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}c@{\qquad}rcl}
3 \cdot \underline{2} & = & 5 \cdot 1 + 1 & & & & \\
3 \cdot \underline{4} & = & 5 \cdot 2 + \mathbf{2} & & & & \\
3 \cdot \underline{1} & = & 5 \cdot 0 + 3 & \longleftarrow & 3 \cdot 6 & = & 5 \cdot 3 + 3 \\
3 \cdot \underline{3} & = & 5 \cdot 1 + 4 & \longleftarrow & 3 \cdot 8 & = & 5 \cdot 4 + 4 \\
3 \cdot \underline{5} & = & 5 \cdot 2 + 5 & \longleftarrow & 3 \cdot 10 & = & 5 \cdot 5 + 5
\end{array}$$

と書けるので, <u>4</u> 回目で P_2 に到達する. 実際, P_5 は A^3 で次のように移る:

$$P_5 \to P_3 \to P_1 \to P_4 \to P_2 \to P_5$$

ちなみに, 正 6 角形では, $\underline{6} \to \underline{3} \to \underline{6}$ である (確かに, $\mathrm{ord}\,(A^3) = 6/(6,3) = 2$ である).