数学展望 I **第 6 回：閉多面体曲面のオイラー数**

閉多面体曲面のオイラー数についての公式と, ある三角形分割について述べる.

5.1 閉多面体曲面のオイラー数

(球面に同相な) 3 次元凸多面体のどんな境界複体のオイラー数も 2 である. また, トーラスの (ある) 境界複体のオイラー数は 0 であった. この事実を一般化してみよう.

定義 5.1. 有限個の凸多角形を辺でつなぎあわせて得られる図形 Q が, 次の 2 条件をみたすとき, **閉多面体曲面**であると呼ぶ.

(1)Q の各辺は丁度 2 つの面の辺である.

(2) Q の各頂点 v のリンク, すなわち, v を頂点とする多角形たちの v を含まない辺すべての合併はグラフとして連結である.

実は閉多面体曲面は図のようにいくつかの穴のあいた曲面に同相であることが知られている. 穴の数をこの閉多面体曲面の**種数** (genus) と言い, $g(Q)$ と表す. (3 次元の) 凸多面体は種数 $g = 0$ の閉多面体曲面である.

定理 5.2. **種数** g の閉多面体曲面 Q_g のオイラー数は

$$\chi(Q_g) = 2 - 2g$$

で与えられる. 別の言い方をすれば, Q_g の任意の境界複体 Δ に対して, 次が成り立つ:

$$\chi(\Delta) := f_0(\Delta) - f_1(\Delta) + f_2(\Delta) = 2 - 2g.$$

5.2 オイラー数とホモロジー群

「正多面体」を 3 次元の凸多面体と見て議論してきたが, 「オイラーの多面体公式」は Euler–Poincaré の公式, または, 閉多面体曲面のオイラー数に関する公式として一般化される.

また, d 次元凸多面体 $\mathcal{P}$ の境界複体を**三角形分割**して単体的複体 Δ を作るとき, **ホモロジー群**と呼ばれるベクトル空間が定まり, これら (の次元) を調べることも重要である. 実際, オイラー数はそれらの**次元**の**交代和**として求められる:

$$\chi(\mathcal{P}) = \dim H_0(\Delta;\mathbb{R}) - \dim H_1(\Delta;\mathbb{R}) + \cdots + \cdots + (-1)^{d-1} \dim H_{d-1}(\Delta;\mathbb{R}).$$

実際, 凸多面体 (もしくは球面) では, $d = 3$ で

$$\chi(\mathcal{P}) = \dim H_0(\Delta;\mathbb{R}) - \dim H_1(\Delta;\mathbb{R}) + \dim H_2(\Delta;\mathbb{R}) = 1 - 0 + 1 = 2$$

である. 興味を持った人は位相幾何学を勉強してみよう.

5.3 ちょっと良い三角形分割

平面内の点 $P_1, \ldots, P_v$ のどの 4 点も共通の円の上にのっていないものとしよう．このとき，これらの点を含む凸閉包の，$P_1, \ldots, P_v$ すべてを頂点とする三角形分割を構成する方法を述べよう．

頂点 $P_i \in \mathbb{R}^2$ に対して，

$$\Gamma_i = \left\{ P \in \mathbb{R}^2 \mid \ |PP_i| \leq |PP_j| \ (j = 1, \ldots, v) \right\}$$

とおく．ただし，$|PQ|$ は 2 点間の距離 (線分 PQ の長さ) を表す．このとき，$\mathbb{R}^2 = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_v$ は平面内を v 個の領域に分割する．この図を点 $P_1, \ldots, P_v$ の **Voronoi 図**と言う．

さて，Γ_i と Γ_j が隣り合う場合に限り，P_i と P_j を辺で結べば，これらの点の凸閉包の三角形分割が得られる．これを **Delaunay 三角形分割**という．これは性質の良い三角形分割を与える．

命題 5.3. *Delaunay* 三角形分割は，「三角形分割に現れる三角形の角の最小値」が最大のものになるような三角形分割である．言い換えれば，**Delaunay 三角形分割には細長い三角形が現れにくい！**

問題 5.4. 4 点 $P_1(0,0)$, $P_2(4,0)$, $P_3(2,2)$, $P_4(0,2)$ の Voronoi 図を書け．また，Delaunay 三角形分割を求め，他方の三角形分割と比較して上の命題の主張を確認せよ．

述べられなかった定理：McMullen の g-theorem, 上限定理, 下限定理 etc.