

数学展望I 第4回：凸多面体のf-列の特徴付け

(3次元)凸多面体のf列 (f_0, f_1, f_2) すなわち、頂点数、辺の数、面の数の組はどのような値を取りうるかを判定する定理を紹介する。これは単体的(三角形のみを面とする)凸多面体の場合にはマクマレン対応(g-theorem)の特別な場合として知られている。

テーマ： $(V, E, F) = (10, 19, 11)$ となる3次元凸多面体は存在するだろうか？

3.1 3次元凸多面体のf-列

以下では、 \mathcal{P} を(3次元)凸多面体とし、その頂点数、辺の数、面の数をそれぞれ、 $f_0(\mathcal{P})$ 、 $f_1(\mathcal{P})$ 、 $f_2(\mathcal{P})$ と表す。このとき、3つの(正の)整数の組

$$f(\mathcal{P}) = (f_0(\mathcal{P}), f_1(\mathcal{P}), f_2(\mathcal{P}))$$

を \mathcal{P} のf-列と言う。

問題 3.1. 一般に、どんな整数の組 (V, E, F) が与えられたとき、

$$(f_0(\mathcal{P}), f_1(\mathcal{P}), f_2(\mathcal{P})) = (V, E, F)$$

となるような(3次元)凸多面体 \mathcal{P} が存在するか？

例えば、9個の頂点、16本の辺、9個の面をもつような3次元凸多面体は存在するか？

(V, E, F) が(3次元)凸多面体 \mathcal{P} のf-列であるとする、オイラーの多面体公式より、

$$V - E + F = 2 \dots \dots (1)$$

である。 \mathcal{P} の面をそれぞれ p_1 角形、 p_2 角形、 \dots 、 p_F 角形とすると、

$$p_1 + p_2 + \dots + p_F = 2E$$

であるが、 $p_1, \dots, p_F \geq 3$ だから、 $3F \leq 2E \dots \dots (2)$ を得る。

また、各頂点に集まる辺の数をそれぞれ q_1 本、 q_2 本、 \dots 、 q_V 本とすれば、

$$q_1 + q_2 + \dots + q_V = 2E$$

であるが、 $q_1, \dots, q_V \geq 3$ に注意すると、 $3V \leq 2E \dots \dots (3)$ を得る。

例 3.2. $V = 4$ とすれば、(1)より $F = E - 2$ 。(2),(3)を共にみたまのは、 $(V, F) = (6, 4)$ のみ。 $(V, E, F) = (4, 6, 4)$ は(正)4面体のf-列に他ならない。

実は、上の3条件が求める条件である。少し変形すると、

定理 3.3. 3つの整数の組 (V, E, F) が、ある(3次元)凸多面体の f 列になるための必要十分条件は、次の3条件をすべてみたすことである:

$$E = V + F - 2.$$

$$V \leq 2F - 4.$$

$$F \leq 2V - 4.$$

このとき、 $V, F \geq 4$ で、 $E \leq 3V - 6$ である。

特に、 (V, E, F) が単体的(すべての面が3角形であるような)凸多面体の f 列になることと、

$$(V, E, F) = (4, 6, 4) + g(1, 3, 2) \left(= (g + 4, 3g + 6, 2g + 4) \right)$$

を満たす非負整数 g が存在することとは同値である。

注意 1. 上の定理において、

- 前者の結果(凸多面体の f 列の特徴付け)の高次元版は 未解決 のようである。
- また、後者の結果(単体的凸多面体の f 列の特徴付け)は g-theorem¹ と呼ばれる特徴付けの特別な場合である。

この定理を証明するには、正3角錐、正4角錐、正5角錐のいずれかから出発して、次の操作(I)または(II)を実行していくと、その f 列が与えられた (V, E, F) に等しいような凸多面体を見つけることができることを示せばよい。

ただし、(I)を行うためには「3角形の面の存在」が必要で、(ii)を行うには「3本の辺が集まっている頂点が存在」する必要がある。また、いずれの操作後もこの前提が保証されていることに注意せよ。

(I) 3角形の面の中に点を取り、少し引っ張りあげて3角錐を付け加える。

この操作で、頂点が1つ増え、面が2つ増える。

(II) 3本の辺が集まっている頂点の近くを切り落とす。

この操作で、頂点が2つ増え、面が1つ増える。

¹1971年にマクマレン(McMullen)が予想し、1980年頃、Stanley, Billera-Leeによりそれぞれの向きが証明された。特に、Stanleyによる証明は他の分野(代数幾何学、可換環論、トポロジー)の大道具を鮮やかに用いた画期的なものであった。